УДК 539.32:517.9
EDN RECOSP (https://elibrary.ru/recosp)
DOI 10.33113/mkmk.ras.2023.29.01.02

# ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ЦЕНТРОВ ВКЛЮЧЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМ РАДИУСОМ

Власов А.Н.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

## АННОТАЦИЯ

В работе излагается три варианта оценки эффективных характеристик деформационных свойств композитных материалов с периодическим расположением центров включений и случайными значениями их радиусов. Все рассмотренные в статье подходы по определению эффективных деформационных характеристик основаны на применении метода асимптотического усреднения дифференциальных уравнений теории упругости с быстро осциллирующими коэффициентами. При этом размер включений рассматривается как случайная величина с заданным законом распределения, основные характеристики которой определяются методами теории вероятности. Описанные в работе подходы определения свойств композитных материалов дают возможность получить не только средние значения эффективных характеристик, но и возможный разброс их значений. Показано, что из условия симметричности функции плотности вероятности по распределению радиуса включения не следует условие симметричности функции плотности вероятности распределения эффективных компонентов тензора жесткости композитных материалов с периодической структурой центров включений, т.е. их средние значения не лежат в центрах интервалов возможных принимаемых ими значений. Для слоистых сред были получены аналитические зависимости по определению эффективного тензора жесткости, аналогичные зависимости сред периодической структуры.

**Ключевые слова:** случайный размер включений; функция распределения радиуса включений; задача на ячейке; эффективный тензор жесткости; эффективные деформационные характеристики композитных материалов

# ESTIMATION OF THE EFFECTIVE STIFFNESS TENSOR OF A COMPOSITE MATERIAL WITH A PERIODIC POSITION OF INCLUSION CENTERS WITH A RANDOM RADIUS

Vlasov A.N.

*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

## ABSTRACT

The paper presents three options for evaluating the effective characteristics of the deformation properties of composite materials with a periodic arrangement of inclusion centers and random values of their radii. All approaches considered in the article to determine the effective deformation characteristics are based on the use of the method of asymptotic averaging of differential equations of elasticity theory with rapidly oscillating coefficients.

In this case, the size of inclusions is considered as a random variable with a given distribution law, the main characteristics of which are determined by the methods of probability theory. The approaches described in the paper for determining the properties of composite materials make it possible to obtain not only the average values of the effective characteristics, but also the possible range of their values. It is shown that from the condition of symmetry of the probability density function with respect to the distribution of the inclusion radius does not follow the condition of symmetry of the probability density function of the distribution of the effective components of the stiffness tensor of composite materials with a periodic structure of inclusion centers, i.e. their average values do not lie with the centers of the intervals of possible values they take. For layered media, analytical dependences were obtained to determine the effective stiffness tensor, similar to the dependences of media with a periodic structure.

**Keywords:** random size of inclusions; inclusion radius distribution function; a problem on a cell; effective stiffness tensor; effective elastic characteristics of composite materials

## ВЕДЕНИЕ

Основные работы по определению эффективных характеристик структурно неоднородных сред, основанных на усреднении дифференциальных уравнений (операторов) со случайными быстро осциллирующими коэффициентами [1], изложены в [2-14].

В настоящей работе представлены методы оценки эффективных характеристик деформационных свойств композитных материалов с периодическим расположением центров включений и случайными значениями их радиусов, и таким образом композитные материалы сводятся к эквивалентным по деформируемости однородным материалам. Предполагается, что область занимаемую композитом, можно разбить на ячейки равного размера с расположенными в них включениями, которые не выходят за их границы. Процедура усреднения эффективных деформационных характеристик (компонентов тензора жёсткости) композитных материалов реализована в трёх вариантах:

1. По заданному закону распределения радиуса включения как случайной величины определяется средний их радиус. В результате задача сводится к нахождению эффективного тензора жёсткости композитного материала периодической структуры. Затем компоненты эффективного тензора жёсткости определяются методом асимптотического усреднения Бахвалова [15,16].
2. Вначале методом асимптотического усреднения определяются значения эффективных компонентов тензора жёсткости в зависимости от радиуса включения. Таким образом получаем параметрическую зависимость эффективного тензора жёсткости от радиуса включения. При этом следует заметить, что каждому фиксированному радиусу отвечает свой эквивалентный композитный материал периодической структуры, которому соответствует свой эффективный тензор жёсткости. Далее, по заданному закону распределения радиуса включения определяются законы распределения компонентов эффективного тензора жёсткости, а потом уже находятся средние их значения и три их центральных момента – дисперсия, асимметрия и эксцесс.
3. По заданному закону распределения радиуса включения определяется «эффективное» включение, радиус которого равен максимальному размеру из возможных принимаемых включениями значений. Таким образом, композит приводится к эквивалентному композитному материалу периодической структуры. При этом тензор жёсткости «эффективного» включения является

функцией его радиуса. Затем, как и в первом варианте, эффективный тензор жёсткости определяется методом асимптотического усреднения Бахвалова.

Разработанные в статье подходы к оценке эффективных деформационных характеристик композитных материалов с периодическим расположением центров включений, характеризуемых случайной величиной радиусов, могут быть практически распространены и на оценку других физико-механических свойств.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим композитные материалы со случайным размером включений, у которых центры образуют периодическую структуру. При этом будем считать, что все включения целиком расположены в ячейках $(\Pi)$, которые имеют один и тот же фиксированный размер и плотно прилегают друг к другу. Геометрия таких материалов определяется ячейкой периодичности $\Pi$ с расположенным в ней включением случайного размера (рис.1). Для простоты будем предполагать, что включения имеют форму шара, либо цилиндра, либо слоя (в случае слоистых сред с фиксированным размером пакета слоев). Такое предположение не меняет сам подход к решению задачи усреднения уравнений теории упругости со случайными быстро осциллирующими коэффициентами и оценки свойств композитных материалов со случайным размером рассматриваемых включений, а также принципиально не влияет на его общность.

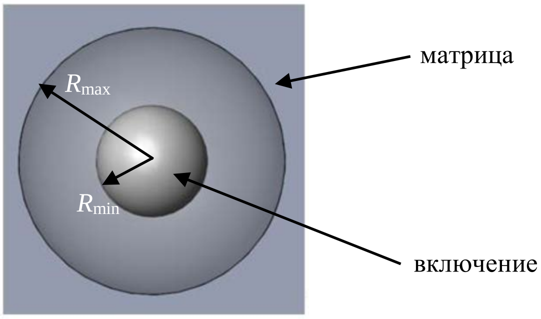


Рис.1. Ячейка $\Pi$ композитного материала с включением.

Будем решать задачу приведения такого композитного материала к эквивалентному однородному. Решение сводится к определению эффективных свойств этого материала (в данном случае – к определению эффективного тензора жесткости).

Предположим, что область, занимаемая композитным материалом, имеет характерный размер $L$ и составлена из структурных ячеек $\Pi$ размером $l_{cell}$, в которых расположены включения со случайными значениями радиуса $R$, где $2R < l_{cell}$, которые во всех ячейках $\Pi$ имеют одну и ту же функцию распределения. При этом также считаем, что значение радиуса включения в одной ячейке не влияет на их значения в других ячейках, т.е. радиусы включений в ячейках как случайные величины попарно независимы. Таким образом, коэффициент корреляции между ними равен нулю и, следовательно, исследование вероятностных характеристик в таких композитных материалах сводится к их определению на одной ячейке $\Pi$.

В ячейках $\Pi$ фазы композитного материала контактируют по границе раздела, определяемым радиусом включения. При этом коэффициенты дифференциальных уравнений теории упругости для каждой фазы определяются их тензорами жесткости и на каждой фазе предполагаются постоянными. Далее также будем считать, что на границе раздела фаз реализуются условия идеального контакта.

Приведем три метода оценки эффективного тензора жесткости рассматриваемого композитного материала. Для этого решим следующие задачи:

***Задача 1*** – Простейший метод оценки механических свойств композитных материалов со случайным размером включений, у которых центры образуют периодическую структуру.

***Задача 2*** – Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала со случайным размером включений, которая определяется с использованием зависимости эффективного тензора жесткости от радиуса включения для композитных материалов периодической структуры (радиус включения $R$ в каждой реализации композита фиксирован).

***Задача 3*** – Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала со случайным размером включений, которая строится на определении зависимости среднего значения тензора жесткости на ячейке по реализациям радиуса включения с последующим применением метода асимптотического усреднения.

## 1. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ ПО СРЕДНЕМУ ЗНАЧЕНИЮ РАДИУСА ВКЛЮЧЕНИЯ. ЗАДАЧА 1.

Этот метод оценки эффективного тензора жесткости состоит в определении среднего радиуса включения по известному закону его распределения с последующим применением метода асимптотического усреднения.

Средний радиус включения (математическое ожидание) определяется по формуле

$$M\left[R\right]=\bar{R}=\int_{R_{\min}}^{R_{\max}} r\cdot f\left(r\right)dr, \tag{1}$$

где $r$ – случайная величина (радиус), принимающая значения на отрезке $r\in\left[R_{\min},R_{\max}\right]$ по закону распределения с плотностью вероятности $f\left(r\right)$.

Таким образом, определив средний радиус включения, мы свели задачу по оценке эффективного тензора жесткости к задаче определения эффективного тензора жесткости композитного материала с периодической структурой и радиусом включений $\bar{R}$. Её решение находится из решения периодической задачи на ячейке $\Pi$ по быстрой переменной $\xi$ [16]

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(A_{ij}\left(\xi\right)\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(N_{i_1}\left(\xi\right)+\xi_{i_1}E\right)\right)=0, \tag{2}$$

$$\left[N_{i_1}\right]\Big|_{\xi\in\Sigma}=\left[n_i A_{ij}\left(\xi\right)\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(N_{i_1}\left(\xi\right)+\xi_{i_1}E\right)\right]\Bigg|_{\xi\in\Sigma}=0, \tag{3}$$

где $A_{ij}=\left\|c_{ikjl}\right\|$ – матрицы-функции, составленные из компонент тензора жёсткости четвёртого ранга $c_{ijkl}$, $\left(i,j,k,l=1,2,3\right)$; $N_{i_1}\left(\xi\right)$ – периодические по быстрой переменной $\xi$ матрицы-функции, представляющие собой решение задачи (2), (3), а $i_1=1,2,3$; $E$ – единичная матрица; $\boldsymbol{n}=\left(n_1,n_2,n_3\right)$ – единичный вектор нормали; $\Sigma$ – граница контакта матрица-включение.

Затем, эффективный тензор жесткости определяется, как среднее значение по ячейке периодичности решения задачи (1), (2)

$$\hat{A}_{ij} = \frac{1}{|\Pi|}\int_{\Pi}\left( A_{ik}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(N_j(\xi)+\xi_j E\right)\right)dv = \left\langle A_{ik}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(N_j(\xi)+\xi_j E\right)\right\rangle. \quad (4)$$

Дисперсия (второй центральный момент) радиуса включения определяется по формуле

$$D[R] = \sigma^2 = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \left(R-\overline{R}\right)^2 f(r)\,dr, \quad (5)$$

где $\sigma$ – среднеквадратическое отклонение.

В рамках рассматриваемого подхода среднеквадратическое отклонение позволяет оценить возможные отклонения значений эффективного тензора жесткости от его среднего значения $\hat{A}_{ij}$ при вариации радиуса включения относительно его среднего значения $\overline{R}$.

## 2. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ ПО ЗАВИСИМОСТИ ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ ОТ РАДИУСА ВКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ. ЗАДАЧА 2.

Для решения второй задачи вначале необходимо решить периодические задачи (2), (3), где $A_{ij}(R)$ есть матрицы-функции, составленные из компонент тензора жёсткости и параметрически зависящие от радиуса. Как результат решения такой задачи получаем зависимость эффективного тензора жесткости от радиуса включения $R$

$$\overline{A}_{ij}(R) = \left\langle A_{ik}(R)\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(N_j(\xi)+\xi_j E\right)\right\rangle. \quad (6)$$

Далее, если радиус включения, распределенный случайным образом с плотностью вероятности $f(r)$ на отрезке $R_{\min} \le r \le R_{\max}$, тогда возможные минимальные и максимальные значения эффективного тензора жёсткости будут равны $\overline{A}_{ij}^{\min} = \overline{A}_{ij}(R_{\min})$ и $\overline{A}_{ij}^{\max} = \overline{A}_{ij}(R_{\max})$, соответственно, а функции распределения компонентов эффективного тензора жёсткости $\hat{c}_{ijkl}$ будут определяться по формулам [17]

$$g_{ijkl}(x) = f\left(\overline{c}_{ijkl}^{\,-1}(r)\right)\left|\frac{d\left(\overline{c}_{ijkl}^{\,-1}(r)\right)}{dr}\right|. \quad (7)$$

Зная функции распределения компонентов эффективного тензора жёсткости $\overline{c}_{ijkl}$, четыре основных их первых момента (начальный момент первого порядка и три центральных момента – со 2-го по 4-й порядок, соответственно) будут определяться по следующим формулам:

1. Первый момент – среднее значение (математическое ожидание)

$$M\left[\overline{c}_{ijkl}\right] = \hat{c}_{ijkl} = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} c_{ijkl}(r)\, f\left(\overline{c}_{ijkl}^{\,-1}(r)\right)\left|\frac{d\left(\overline{c}_{ijkl}^{\,-1}(r)\right)}{dr}\right| dx. \quad (8)$$

2. Второй центральный момент – дисперсия

$$D\left[\overline{c}_{ijkl}\right] = \sigma^2 = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \left(\overline{c}_{ijkl}(r) - \hat{c}_{ijkl}\right)^2 f\left(\overline{c}_{ijkl}^{\ -1}(r)\right) \left|\frac{d\left(\overline{c}_{ijkl}^{\ -1}(r)\right)}{dr}\right| dx. \qquad (9)$$

3. Третий центральный момент

$$\mu_3 = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \left(\overline{c}_{ijkl}(r) - \hat{c}_{ijkl}\right)^3 f\left(\overline{c}_{ijkl}^{\ -1}(r)\right) \left|\frac{d\left(\overline{c}_{ijkl}^{\ -1}(r)\right)}{dr}\right| dx. \qquad (10)$$

4. Четвёртый центральный момент

$$\mu_4 = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \left(\overline{c}_{ijkl}(r) - \hat{c}_{ijkl}\right)^4 f\left(\overline{c}_{ijkl}^{\ -1}(r)\right) \left|\frac{d\left(\overline{c}_{ijkl}^{\ -1}(r)\right)}{dr}\right| dx. \qquad (11)$$

По третьему и четвёртому моментам определяются два важных показателя функций распределения случайных величин. Это асимметрия и эксцесс, соответственно

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}; \quad Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (12)$$

Асимметрия $Sk$ является показателем отклонения закона распределения случайной величины от симметричного распределения. Если закон распределения симметричный, то асимметрия $Sk = 0$. Положительная величина коэффициента асимметрии указывает на наличие правосторонней асимметрии. Это означает, что правая ветвь плотности вероятности относительно максимальной ординаты вытянута больше, чем левая. Отрицательный знак коэффициента асимметрии свидетельствует о наличии левосторонней асимметрии и при этом левая ветвь плотности вероятности вытянута больше относительно максимальной ординаты.

Эксцесс $Ex$, определяемый для симметричных законов распределения, является показателем островершинности по отношению к нормальному закону распределения. В случае нормального закона распределения эксцесс $Ex = 0$. Положительная величина эксцесса указывает на то, что плотность вероятности случайной величины более островершинное по сравнению с плотностью вероятности нормального закона распределения. Если величина эксцесса отрицательная, то плотность вероятности случайной величины плосковершинное по сравнению с плотностью вероятности нормального закона распределения.

Изложенная методика позволяет определять среднее значение эффективного тензора жесткости $\hat{A}_{ij}$, его возможные минимальные и максимальные значения $\hat{A}_{ij}^{\min} = \hat{A}_{ij}\left(R_{\min}\right)$ и $\hat{A}_{ij}^{\max} = \hat{A}_{ij}\left(R_{\max}\right)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma$, асимметрию $Sk$ и, если необходимо, эксцесс $Ex$ для композитных материалов периодической структуры, которые отличаются друг от друга лишь размером включений, где размер включений является случайной величиной.

## 3 ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ ПО ЗАВИСИМОСТИ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ НА ЯЧЕЙКЕ. ЗАДАЧА 3.

При подходе, сформулированном в постановке задачи 3, вначале определяется среднее значение тензора жесткости материала на ячейке как функции быстрой переменной $\overline{A}_{ij}\left(\xi\right)$ в композитном материале периодической структуры, а затем вычисляется эффективный тензор жесткости композитного материала с использованием метода асимптотического усреднения.

Пусть радиус включения $R$, являющийся случайной величиной, распределен по закону с плотностью вероятности $f(r)$. Найдём усреднённый тензор жесткости (математическое ожидание) $\bar{A}_{ij}(\xi)$ как функцию быстрой переменной тензора жесткости со случайным значением радиуса $A_{ij}(\xi, R)$. Усреднённая функция $\bar{A}_{ij}(\xi)$ будет определяться в общем случае следующим образом

$$\begin{aligned}\bar{A}_{ij}(\xi) = M\left[A_{ij}(\xi, r)\right] = A_{ij}^{inc} P(\xi) + A_{ij}^{m}\left(1 - P(\xi)\right) = \\ = A_{ij}^{m} + \left(A_{ij}^{inc} - A_{ij}^{m}\right) P(\xi).\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь в (13) и (4) $A_{ij}^{m}$, $A_{ij}^{inc}$ – матрицы, составленные из компонент тензоров жесткости матрицы и включений, соответственно; $P(\xi)$ – вероятность того, что точка с координатами $\xi$ будет принадлежать включению.

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение в этом случае, как функции быстрой переменной $\xi$, будут находиться в соответствии с формулой

$$D\left[A_{ij}(\xi, r)\right] = \sigma^2 = \left(A_{ij}^{inc} - \bar{A}_{ij}(\xi)\right)^2 P(\xi) + \left(A_{ij}^{m} - \bar{A}_{ij}(\xi)\right)^2 \left(1 - P(\xi)\right). \tag{14}$$

Определим закон распределения $P(\xi)$ тензора жесткости на ячейке. Очевидно, что вероятность $P(\xi) = 0$, если значение быстрой переменной $\xi$ лежит за пределами области максимального радиуса, который может реализоваться для включения $R_{\max}$, а в случае, когда $\xi$ принадлежит области, соответствующей минимальному значению радиуса включения $R_{\min}$ вероятность $P(\xi) = 1$. Если же $\xi$ лежит на сфере радиуса $R$, где $R \in \left[R_{\min}, R_{\max}\right]$, то вероятность того, что $\xi$ будет принадлежать включению, т.е. $A_{ij}(\xi) = A_{ij}^{inc}$, очевидно будет равна

$$P\{\xi\} = \int_{R}^{R_{\max}} f(r)\, dr. \tag{15}$$

Из вышесказанного следует, что среднее значение тензора жёсткости на ячейке, в соответствии с (13) и (15), будет определяться следующим образом

$$\bar{A}_{ij}(\xi) = \begin{cases} A_{ij}^{inc}, \quad \text{где } |\xi| \in \left[0, R_{\min}\right] \\ A_{ij}^{m} + \left(A_{ij}^{inc} - A_{ij}^{m}\right) \int_{R}^{R_{\max}} f(r)\, dr, \quad \text{где } |\xi| \in \left[R_{\min}, R_{\max}\right], \\ A_{ij}^{m}, \quad \text{где } |\xi| \in \left[R_{\max}, l_{cell}/2\right] \end{cases} \tag{16}$$

а дисперсия (квадрат среднеквадратического отклонения) – следующим образом

$$\sigma^2 = \begin{cases} 0, \quad \text{где } |\xi| \in \left[0, R_{\min}\right] \\ \begin{bmatrix} \left(A_{ij}^{m} - \bar{A}_{ij}(\xi)\right)^2 + \\ + \left(A_{ij}^{inc} - A_{ij}^{m}\right)\left(A_{ij}^{inc} + A_{ij}^{m} - 2\bar{A}_{ij}(\xi)\right) \int_{R}^{R_{\max}} f(r)\, dr \end{bmatrix}, \quad \text{где } |\xi| \in \left[R_{\min}, R_{\max}\right] \\ 0, \quad \text{где } |\xi| \in \left[R_{\max}, l_{cell}/2\right] \end{cases} \tag{17}$$

Здесь $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ для сферических включений, $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ для цилиндрических включений и $|\xi| = |\xi_1|$ для слоя-включения.

Далее, в соответствии методом асимптотического усреднения эффективные деформационные характеристики композитного материала с периодической структурой будут определены из решения периодической задачи (2), (3) по формуле

$$\hat{A}_{ij} = \left\langle \bar{A}_{ik}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial\left(N_j + \xi_j E\right)}{\partial \xi_k} \right\rangle = \left\langle \bar{A}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) + \bar{A}_{ik}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial N_j}{\partial \xi_k} \right\rangle. \tag{18}$$

Заметим, что в (17) тензор жесткости $\bar{A}_{ik}(\xi)$, заданный на ячейке периодичности в матричной форме, представляет собой непрерывные по координате $\xi$ матрицы-функции класса $C^0$, в то время как в (4) и (6) такой тензор определяется кусочно-непрерывными функциями.

## 4. ОЦЕНКА ДЕФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК (ПРИМЕР РАСЧЕТОВ)

Для начала заметим, что если размер включений в композитных материалах принимает значения $R_{\min}$ до $R_{\max}$, то для них область возможных значений эффективного тензора жесткости будет варьироваться в пределах от $\hat{A}_{ij}^{\min} = \hat{A}_{ij}(R_{\min})$ и до $\hat{A}_{ij}^{\max} = \hat{A}_{ij}(R_{\max})$.

Получаемые средние значения для эффективного тензора жёсткости $\hat{A}_{ij}$, среднеквадратическое отклонение $\sigma$ и, если необходимо, асимметрия $Sk$ и эксцесс $Ex$ можно рассматривать как оценки соответствующих характеристик эффективного тензора жесткости композитных материалов со случайным размером включений, у которых центры образуют периодическую структуру.

Далее оценим эффективные деформационные характеристики слоистой среды, состоящей из переслаивания двух материалов, где один из них выполняет роль матрицы, а другой роль включения со случайным размером, при этом будем считать, что слои ортогональны оси $x_1(\xi_1)$ (рис.2).

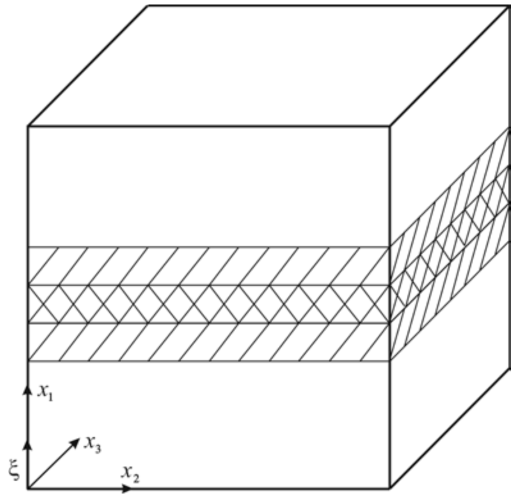


Рис.2. Модель слоистой среды.

В этом случае задача на ячейке (2), (3) упрощается и принимает следующий вид [17]

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left( A_{11}(\xi)\frac{\partial N_j}{\partial \xi} + A_{1j}(\xi) \right) = 0, \quad \xi \notin \Sigma, \tag{19}$$

$$\left[ N_j \right]\Big|_{\xi\in\Sigma} = \left[ \left( A_{i1}(\xi)\frac{\partial N_j}{\partial \xi} + A_{ij}(\xi) \right) n_i \right]\Bigg|_{\xi\in\Sigma} = 0, \tag{20}$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = (1,0,0)$ вектор вешней нормали к границе раздела слоёв равен; $\xi = \xi_1$; $i, j = 1, 2, 3$.

Решение периодической задачи на ячейке (19), (20) можно представить в матричном виде следующим образом [18]

$$\hat{A}_{ij} = \left\langle A_{ij} \right\rangle + \left\langle A_{i1} A_{11}^{-1} \right\rangle \left\langle A_{11}^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle A_{11}^{-1} A_{1j} \right\rangle - \left\langle A_{i1} A_{11}^{-1} A_{1j} \right\rangle, \tag{21}$$

или покомпонентной записи [19,20]

$$\hat{c}_{kilj} = \left\langle c_{kilj} \right\rangle + \left\langle c_{kim1} c_{m1n1}^{-1} \right\rangle \left\langle c_{n1p1}^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle c_{p1q1}^{-1} c_{q1lj} \right\rangle - \left\langle c_{kim1} c_{m1n1}^{-1} c_{n1lj} \right\rangle. \tag{22}$$

Здесь под $c_{n1p1}^{-1}$ понимается элемент матрицы $A_{11}^{-1}$ обратной к матрице жёсткости $A_{11}$.

Далее будем полагать, что слои изотропны. Тогда компоненты тензоров модулей упругости слоёв, как известно, характеризуются двумя независимыми постоянными – модулем Юнга $E$ и коэффициентом Пуассона, которые определяются в стандартных экспериментальных исследованиях. В этом случае компоненты тензора жёсткости четвёртого ранга $c_{ijkl}$ выражаются через независимые деформационные характеристики $E$ и $\nu$ следующим образом [19]

$$c_{ijkl} = \frac{E}{2(1-\nu)}\left( \frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \right), \tag{23}$$

где $\delta_{ij}$ – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$).

В условиях принятых предположений слоистая среда ведёт себя как макроскопически трансверсально-изотропная среда с плоскостью изотропии параллельной плоскости напластования. Компоненты эффективного тензора жёсткости при этом, как это следует из (21)-(23), определяются по формулам [18,19]

$$\begin{gathered}
\hat{c}_{1111} = \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle^{-1}; \quad \hat{c}_{1122} = \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle^{-1}; \\
\hat{c}_{2222} = \left\langle \frac{E}{1-\nu^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle^2 \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle^{-1}; \\
\hat{c}_{2233} = \left\langle \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle^2 \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle^{-1}; \\
\hat{c}_{1212} = \hat{c}_{1313} = \frac{1}{2}\left\langle \frac{1+\nu}{E} \right\rangle^{-1} = \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{G} \right\rangle^{-1}; \\
\hat{c}_{2323} = \frac{1}{2}\left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle = \frac{1}{2}\left( \hat{c}_{2222} - \hat{c}_{2233} \right).
\end{gathered} \tag{24}$$

Рассмотрим слоистую среду (см. рис.2), которая представляет собой периодическое переслаивание песчаника (матрица) и алевролита (включение). В расчётах будем предполагать, что мощность аргиллита лежит в пределах от 0.2 м до 0.3 м, а размер пакета слоёв равен $l_{cell} = 1.1$ м. Для простоты вычислений, предполагается, что мощность аргиллита подчиняется равномерному закону распределения. Отсюда можно заключить, что среднее значение толщины слоя аргиллита $M\left[l_m\right] = 0.25$ м, а среднеквадратическое отклонение – $\sigma\left[l_m\right] = 0.01/12$ м. При этом коэффициент асимметрии равен $Sk = 0$, а коэффициент эксцесса – $Ex = -6/5$.

Значения деформационных характеристик песчаника и аргиллита примем следующими: модуль общей деформации $E_s = 6000$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu_s = 0.15$ у песчаника, и, соответственно, модуль общей деформации $E_m = 800$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu_m = 0.15$ у алевролита. Такие значения характеристик имеют слоистые горные породы, залегающие, например, в основании плотины на р. Белая (Агидель).

Результаты расчетов некоторых компонентов эффективного тензора жесткости слоистой среды, а также границы их возможного разброса в соответствии с решением задач 1-3 представлены в Таблице 1.

Таблица 1.

Значения компонентов эффективного тензора жёсткости.

| № задачи | Вероятностные параметры | $\hat{c}_{1111}$, МПа | $\hat{c}_{2222}$, МПа | $\hat{c}_{1122}$, МПа | $\hat{c}_{2233}$, МПа | $\hat{c}_{1212} = G_{\perp}$, МПа |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $M$ | 2557 | 5009 | 451.3 | 819.0 | 1053 |
| | max | 2904 | 5261 | 512.4 | 866.1 | 1196 |
| | min | 2285 | 4758 | 403.2 | 774.2 | 940.8 |
| 2 | $M$ | 2.337 | – | – | – | 963.2 |
| | max | 2904 | 5261 | 512.4 | 866.1 | 1196 |
| | min | 2285 | 4758 | 403.2 | 774.2 | 940.8 |
| | $\sigma$ | 279.8 | – | – | – | 114.5 |
| | $Sk$ | 1.486 | – | – | – | 1.489 |
| | $Ex$ | -0.623 | – | – | – | -0.612 |
| 3 | $M$ | 2814 | 5017 | 496.6 | 827.0 | 1159 |
| | max | 2904 | 5261 | 512.4 | 866.1 | 1196 |
| | min | 2285 | 4758 | 403.2 | 774.2 | 940.8 |

Из этой таблицы видно, что средние значения компонентов эффективного тензора жёсткости, полученные с использованием первых двух методов, меньше их соответствующих средне интервальных величин $\left(\max - \min\right)/2$, а полученные с использованием третьего метода больше. Отсюда можно сделать вывод, что если плотность вероятности функции распределения размера промежуточного слоя (включения) симметричная $\left(Sk = 0\right)$, то функции распределения плотности вероятности компонентов эффективного тензора жёсткости не обязаны удовлетворять этому условию, т.е. теряют условие симметричности $\left(Sk \neq 0\right)$.

Наименьшие средние значения компонентов эффективного тензора жёсткости получаются при использовании второго метода их оценки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены три метода оценки эффективных характеристик деформационных свойств композитных материалов с периодическим расположением центров включений и случайными значениями их радиусов, т.е. три метода сведения композитных материалов к эквивалентным однородным по деформируемости материалам.

Показано, что из рассмотренных методов по второму получаются наименьшие средние значения компонентов эффективного тензора жёсткости, а по третьему – наибольшие.

Получено, что из условия симметричности функции плотности вероятности распределения радиуса включения не следует условие симметричности функции плотности вероятности распределения эффективных компонентов тензора жесткости композитных материалов с периодической структурой центров включений.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Власов А.Н. *Сведение уравнения теории упругости со случайными коэффициентами на области с периодической структурой к усредненному уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами. Эффективный тензор жесткости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №3. – С.309-322.
2. Козлов С.М. *Осреднение дифференциальных операторов с почти периодическими быстроосциллирующими коэффициентами* // Математический сборник. – 1978. – Т.107(149). – №2(10). – С.199-217.
3. Козлов С.М. *Осреднение случайных структур* // Доклады Академии наук СССР. – 1978. – Т.241. – №5. – С.1016-1019.
4. Козлов С.М. *Проводимость двумерных случайных сред* // Успехи математических наук. – 1979. – Т.34. – №4(208). – С.193-194.
5. Козлов С.М. *Осреднение случайных операторов* // Математический сборник. – 1979. – Т.109(151). – №2(6). – С.188-202.
6. Клепцына М.Л., Пятницкий А.Л. *Усреднение случайной нестационарной задачи конвекции-диффузии* // Успехи математических наук. – 2002. – Т.57. – №4(346). – С.95-118.
7. Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. – М.: Мир, 1982. – 336 с.
8. Паньков А.А. *Статистическая механика пьезокомпозитов*. – Пермь: Изд-во Пермского государственного технического университета, 2009. – 480 с.
9. Паньков А.А. *Механика пьезокомпозитов. Электро- и магнитоупругость неоднородных сред*. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 476 p.
10. Eshelby J.D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems* // Proc. R.Soc. Lond. A. – 1957. – Vol.241. – Pp.376-396.
11. Frisch U. *Wave Propagation in Random Media* / In: Probabilistic Methods in Applied Mathematics. – New York, Academic Press, 1968. – Vol.1. – Pp.75-198.
12. Kleptsyna M., Piatnitski A., Popier A. *Homogenization of random parabolic operators. Diffusion approximation* // Stochastic Processes and their Applications.

– 2014. – 25 p.
13. Mohammed M., Sango M. *Homogenization of Linear Hyperbolic Stochastic Partial Differential Equation With Rapidly Oscillating Coefficients: the Two Scale Convergence Method* // Asymptotic Anal. – 2015. – Vol.91. – No.3-4. – Pp.341-371.
14. Wei Wang, Daomin Cao, Jinqiao Duan. *Effective Macroscopic Dynamics of Stochastic Partial Differential Equations in Perforated Domains* // SIAM J. Math. Anal. – 2007. – Vol.38. – No.5. – 1508.
15. Бахвалов Н.С. *Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами* // Доклады Академии наук СССР. – 1975. – Т.221. – №3. – С.516-519.
16. Бахвалов Н.С., Панасенко. Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
17. Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. – М.: Высшая школа, 2006. – 575 с.
18. Власов А.Н., Мерзляков В.П. *Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород*. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.
19. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. – М.: Изд-во Московского университета, 1984. – 336 с.
20. Победря Б.Е., Горбачев В.И. *О статических задачах упругих композитов* // Вестник МГУ. – 1977. – №5. – С.101-111.

## REFERENCES

1. Vlasov A.N. *Svedenie uravneniya teorii uprugosti so sluchajnymi koehffitsientami na oblasti s periodicheskoj strukturoj k usrednennomu uravneniyu teorii uprugosti s postoyannymi koehffitsientami. Ehffektivnyj tenzor zhestkosti [Reduction of the equation of elasticity theory with random coefficients on a periodical position of centers of includes with a random radius to the average equation with constant coefficients. Effective stiffness tensor]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2021, Vol.27, No.3, Pp.309-322.
2. Kozlov S.M. *Averaging differential operators with almost periodic, rapidly oscillating coefficients*. Math. USSR-Sb., 1979, Vol.35, No.4, Pp.481-498.
3. Kozlov S.M. *Osrednenie sluchajnykh struktur [Averaging of random structures]*. Doklady Akademii nauk SSSR, 1978, Vol.241, No.5, Pp.1016-1019.
4. Kozlov S.M. *Conductivity of two-dimensional random media*. Russian Math. Surveys, 1979, Vol.34, No.4, Pp.168-169.
5. Kozlov S.M. *Averaging of random operators*. Math. USSR-Sb., 1980, Vol.37, No.2, Pp.167-180.
6. Klepcyna M.L., Pyatniczkij A.L. *Homogenization of a random non-stationary convection-diffusion problem*. Russian Mathematical Surveys, 2002, Vol.57, No.4, Pp.729-751.
7. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials.* New York, Wiley, 1979, 348 p.
8. Pan’kov A.A. *Statisticheskaya mekhanika p’ezokompozitov [Statistical mechanics of piezocomposites]*. Perm’, Izdatel’stvo Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2009, 480 p.
9. Pan’kov A.A. *Mechanics of piezocomposites. Electro- and magnetoelasticity of inhomogeneous media.* LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011, 476 p.
10. Eshelby J.D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems.* Proc. R.Soc. Lond. A, 1957, Vol.241, Pp.376-396.

11. Frisch U. *Wave Propagation in Random Media*. In: Probabilistic Methods in Applied Mathematics. New York, Academic Press, 1968, Vol.1, Pp.75-198.
12. Kleptsyna M., Piatnitski A., Popier A. *Homogenization of random parabolic operators. Diffusion approximation.* Stochastic Processes and their Applications, 2014, 25 p.
13. Mohammed M., Sango M. *Homogenization of Linear Hyperbolic Stochastic Partial Differential Equation With Rapidly Oscillating Coefficients: the Two Scale Convergence Method.* Asymptotic Anal., 2015, Vol.91, No.3-4, Pp.341-371.
14. Wei Wang, Daomin Cao, Jinqiao Duan. *Effective Macroscopic Dynamics of Stochastic Partial Differential Equations in Perforated Domains*. SIAM J. Math. Anal., 2007, Vol.38, No.5, 1508.
15. Bakhvalov N.S. *Osrednenie differentsial'nykh uravnenij s chastnymi proizvodnymi s bystro ostsilliruyushhimi koehffitsientami [Averaging of partial differential equations with rapidly oscillating coefficients]*. Doklady Akademii nauk SSSR, 1975, Vol.221, No.3, Pp.516-519.
16. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh [Averaging of Processes in Periodic Media]*. Moskva, Nauka, 1984, 352 p.
17. Ventcel' E.S. *Teoriya veroyatnostej [Probability theory]*. Moskva, Vysshaya shkola, 2006, 575 p.
18. Vlasov A.N., Merzliakov V.P. *Usrednenie deformatsionnykh i prochnostnykh svojstv v mekhanike skal'nykh porod [Homogenization of deformation and strength properties in rock mechanics]*. Moskva, Izdatel'stvo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2009, 208 p.
19. Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1984, 336 p.
20. Pobedrya B.E., Gorbachev V.I. *O staticheskikh zadachakh uprugikh kompozitov [On static problems of elastic composites]*. Vestnik MGU, 1977, No.5, Pp.101-111.


*Поступила в редакцию 02 декабря 2022 года.*

Сведения об авторе:

Власов Александр Николаевич – д.т.н., директор, ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: bah1955@yandex.ru