

УДК 534.1
EDN EGGHFZ (<https://elibrary.ru/egghfz>)
DOI 10.33113/mkmk.ras.2023.29.01.05



К ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ ЭФФЕКТА МАГНУСА НА ВОЗБУЖДЕНИЕ ПЛЯСКИ ПРОВОДА ВЛЭ*

Фельдштейн В.А.¹, Данилин А.Н.²

¹АО «Центральный научно-исследовательский институт машиностроения»,
г. Королёв, Россия

²ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Разработана нелинейная двухмодовая модель самовозбуждения вертикально-крутильных колебаний провода в ветровом потоке при наличии гололедных отложений. Самовозбуждение колебаний трактуется как неустойчивость равновесного состояния вследствие возникновения поперечной аэродинамической силы при закручивании провода (эффект Магнуса) и динамической связи вертикальных и крутильных колебаний.

Провод рассматривается как тяжелая гибкая нить с осредненными характеристиками, закреплённая между двумя равновысокими опорами. Натяжение провода считается постоянным по длине, но переменным во времени. Статические и динамические компоненты полных деформаций растяжения записываются в квадратичном приближении. Формы вертикальных и крутильных колебаний относительно статического положения равновесия аппроксимируются квадратичной функцией, близкой к первым парциальным модам.

Уравнения колебаний провода записываются в форме уравнений Лагранжа 2-го рода. Обобщенными координатами, отсчитываемыми от положений статического равновесия, являются изменения стрелы провисания и угла поворота сечения провода в центре пролета.

Определена группа критериальных безразмерных параметров модели и на основе данных о технических характеристиках проводов высоковольтных линий электропередачи выявлены практические диапазоны их изменения.

На основе линеаризованных уравнений получены условия самовозбуждения колебаний в виде зависимости критического параметра скорости ветра от параметра, обобщенно характеризующего возможные инерционные и геометрические характеристики гололедных отложений.

Ключевые слова: провод; тяжёлая гибкая нить; пляска; нелинейная модель; эффект Магнуса; критериальные параметры; условия самовозбуждения колебаний

ESTIMATION OF THE MAGNUS EFFECT INFLUENCE ON THE OHL CONDUCTOR GALLOPING EXCITATION

Feldstein V.A.¹, Danilin A.N.²

¹JSC “Central Research Institute for Machine Building”, Korolev, Russia

²Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Соглашение 22-19-00678).

ABSTRACT

A nonlinear two-mode model of self-excitation of vertical-torsional vibrations of a conductor in a wind flow with icy deposits has been developed. Self-excitation of vibrations is interpreted as instability of the equilibrium state due to the occurrence of transverse aerodynamic force when twisting the conductor (Magnus effect) and the dynamic coupling of vertical and torsional vibrations.

The conductor is considered as a heavy flexible thread with averaged characteristics, fixed between two equally high supports. The tension of the conductor is considered constant in length, but variable in time. Static and dynamic components of total tensile strains are written in the quadratic approximation. The waveforms of vertical and torsional vibrations relative to the static equilibrium position are approximated by a quadratic function close to the first partial modes.

The conductor oscillation equations are written in the form of the Lagrange equations. The generalized coordinates, counted from the positions of static equilibrium, are changes in the sag and the angle of rotation of the conductor section in the center of the span.

A group of criterion dimensionless model parameters has been determined and, based on data on the technical characteristics of OHL conductors, practical ranges of their changes have been identified.

On the basis of linearized equations, the conditions for self-excitation of oscillations are obtained in the form of a dependence of the critical parameter of wind speed on a parameter that generally characterizes the possible inertial and geometric characteristics of ice deposits.

Keywords: conductor; heavy flexible thread; galloping; nonlinear model; Magnus effect; criteria parameters; conditions of self-excitation of oscillations

ВВЕДЕНИЕ

В практике эксплуатации воздушных линий электропередачи (ВЛЭ) известен феномен «пляски» проводов – колебания с частотами ~ 1 Гц и с амплитудами порядка стрелы статического провисания провода [1,2]. Пляска возникает, как правило, при потере симметрии сечения провода вследствие гололедных отложений, что придает проводу некоторое аэродинамическое качество и создает динамическую связь вертикальных и крутильных колебаний. При этом хорошо наблюдаемые при пляске колебания провода в вертикальной плоскости могут быть объяснены эффектом Магнуса – возникновением аэродинамических поперечных сил, действующих на вращающиеся сечения провода. Теоретические основы этого эффекта заложены в классических работах Н.Е. Жуковского [3], который установил простую связь между подъёмной силой и циркуляцией скорости вдоль контура сечения крылового профиля (формула Жуковского). На возможность возникновения колебательного движения тел в потоке указывается в монографии Г. Ламба [4,5]. Целью данной работы является построение наиболее простого варианта модели, на базе которого может быть исследовано и обосновано условие самовозбуждения автоколебаний реальных проводов ВЛЭ.

1. МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДА И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Провод в полете между равновысокими опорами рассматривается как тяжелая гибкая нить (рис.1). Считая провод однородным по сечению цилиндром с осредненными модулем упругости и плотностью материала, примем,

что жесткости на растяжение и на кручение соответственно равны $B_\varepsilon = \pi d^2 E/4$, $B_\theta = \pi d^4 G/32$, где d – диаметр провода; E , G – модули упругости и сдвига.

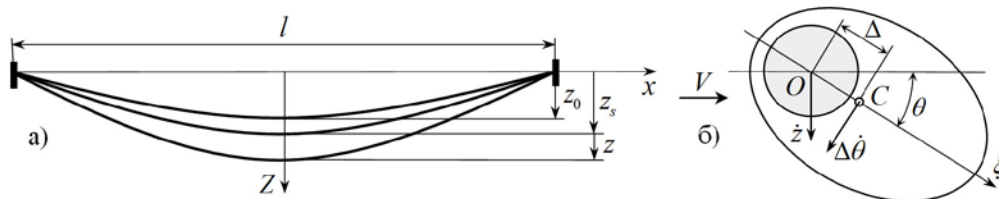


Рис.1. Провод в пролёте между равновысокими опорами: а) конфигурация провода в натуральном, статическом и динамическом состояниях; б) поперечное сечение провода с наледью в центре пролёта.

При стреле статического провисания, малой по сравнению с пролетом ($z_s \ll l$), что характерно для типовых пролетов ВЛЭ, конфигурация провода в положении равновесия является параболой $Z_s = z_s (1 - 4x^2/l^2) = z_s \psi(x)$. Натяжение провода считается постоянным, равным $T = mgl^2/(8z_s)$, где m – погонная масса провода с учетом массы гололеда.

Примем, что распределение массы провода с наледью симметрично относительно оси ξ , а центр массы поперечного сечения провода C смещён на расстояние Δ относительно геометрического центра сечения провода O , который считается центром крутильной жесткости и принимается за полюс. Суммарный погонный момент инерции провода с гололедом относительно полюса обозначается J_O . Эксцентриситет приложения силы тяжести относительно центра жесткости создает распределенный момент, вызывающий закручивание провода с поворотом сечений на угол $\Theta(x, t)$.

Формы вертикальных и крутильных колебаний относительно статического положения равновесия аппроксимируются функцией $\psi(x) = 1 - 4x^2/l^2$, близкой к первым парциальным модам

$$Z(x, t) - Z_s(x) = z(t)\psi(x), \quad \Theta(x, t) - \Theta_s(x) = \theta(t)\psi(x). \quad (1)$$

Обобщенными координатами, отсчитываемыми от положений статического равновесия, являются изменения стрелы провисания $z(t)$ и угла поворота сечения провода в центре пролета $\theta(t)$.

Длины провода в натуральном (недеформированном), статическом и возмущённом состояниях со стрелами z_0 , z_s , $z_s + z$, равны

$$L_0 = l \left(1 + \frac{8z_0^2}{3l^2} \right), \quad L_s = l \left(1 + \frac{8z_s^2}{3l^2} \right), \quad L_d = l \left[1 + \frac{8(z_s + z)^2}{3l^2} \right].$$

Соответственно статические и динамические компоненты полных деформаций растяжения $\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d$ и кручения $\gamma = \gamma_s + \gamma_d$ равны

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= \frac{T}{B_\varepsilon} = \frac{L_s - L_0}{L_0} \approx \frac{8}{3l^2} (z_s^2 - z_0^2), \quad \gamma_s = \theta_s \frac{d\psi}{dx}; \\ \varepsilon_d &= \frac{L_d - L_s}{L_s} \approx \frac{8}{3l^2} (z^2 + 2z_s z), \quad \gamma_d = \theta \frac{d\psi}{dx}.\end{aligned}\quad (2)$$

Потенциальная энергия провода при колебаниях, отсчитываемая от натурального состояния, равна

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} B_\varepsilon l (\varepsilon_s^2 + 2\varepsilon_s \varepsilon_d + \varepsilon_d^2) + \frac{1}{2} B_\theta \int_{-1/2}^{1/2} (\gamma_s^2 + 2\gamma_s \gamma_d + \gamma_d^2) dx - \\ &- mg \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ (z + z_s - z_0) \psi(x) + \Delta \sin[(\theta_s + \theta) \psi(x)] \right\} dx.\end{aligned}$$

Далее используются следующие интегралы

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2} \psi(x) dx &= \frac{2}{3} l, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \psi^2(x) dx = \frac{8}{15} l, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx = \frac{16}{3l}, \\ \int_{-1/2}^{1/2} \sin[(\theta_s + \theta) \psi(x)] dx &\approx \int_{-1/2}^{1/2} \left[(\theta_s + \theta) \psi(x) - \frac{1}{6} (\theta_s + \theta)^3 \psi^3(x) \right] dx = \\ &= \frac{2l}{3} \left[(\theta_s + \theta) - \frac{4}{35} (\theta_s + \theta)^3 \right], \\ \int_{-1/2}^{1/2} \psi^2(x) \cos[(\theta_s + \theta) \psi(x)] dx &\approx \int_{-1/2}^{1/2} \psi^2(x) \left[1 - \frac{1}{2} \psi^2(x) (\theta_s + \theta)^2 \right] dx = \frac{8l}{15} \varphi(\theta); \\ \varphi(\theta) &= 1 - \frac{8}{21} (\theta_s + \theta)^2.\end{aligned}\quad (3)$$

Используя (3) и выражения (2) для деформаций, преобразуем потенциальную энергию, опуская постоянные слагаемые, к виду

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{8T}{3l} (z^2 + 2zz_s) + \frac{32B_\varepsilon}{9l^3} (z^2 + 2zz_s)^2 + \frac{8}{3l} B_\theta (\theta^2 + 2\theta_s \theta) - \\ &- \frac{2}{3} mgl \left\{ z + \Delta \left[\theta - \frac{4}{35} (3\theta_s \theta^2 + 3\theta_s^2 \theta + \theta^3) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (4)$$

Приравняв нулю группу слагаемых, линейных по z и θ , получим известное соотношение технической теории равновесия гибкой нити $z_s = mgl^2 / (8T)$ и квадратное уравнение для определения статического угла закручивания провода

$$\theta_s^2 + \frac{70}{3k} \theta_s - \frac{35}{12} = 0,$$

решением которого является

$$\theta_s = \frac{35}{3k} \left(\sqrt{1 + \frac{3k^2}{140}} - 1 \right) = \frac{35}{3k} \vartheta; \quad k = \frac{mgl^2 \Delta}{B_\theta}, \quad \vartheta = \sqrt{1 + \frac{3k^2}{140}} - 1.\quad (5)$$

Зависимость угла $\theta_s(k)$ показана на рис.2, откуда видно, что асимптотическое (при большом эксцентриситете Δ) значение угла, равное 1,70, отличается от предельного значения $\pi/2$ на 8,7%.

После исключения постоянных и линейных слагаемых выражение потенциальной энергии приобретает вид

$$\Pi = \frac{8T}{3l}z^2 + \frac{32B_\varepsilon}{9l^3}(z^2 + 2zz_s)^2 + \frac{8}{3l}B_\theta\theta^2 + \frac{8}{105}mgl\Delta(\theta^3 + 3\theta_s\theta^2). \quad (6)$$

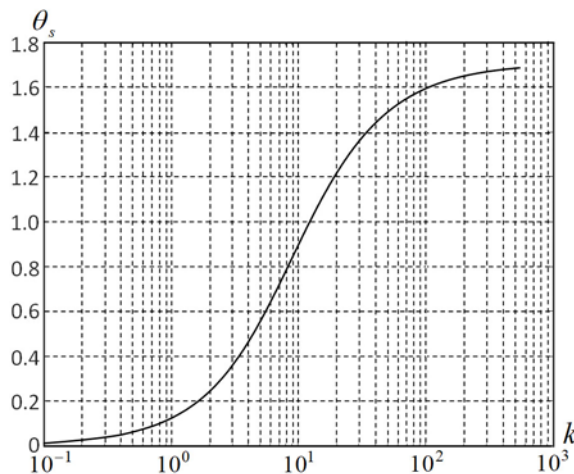


Рис.2. Зависимость угла закручивания от параметра k .

Кинетическая энергия, согласно теореме Кенига, равна

$$K = \frac{m}{2} \int_{-l/2}^{l/2} (V_B^2 + V_\Gamma^2) dx + \frac{J_c}{2} \dot{\theta}^2 \int_{-l/2}^{l/2} \psi^2(x) dx.$$

Выражая вертикальную и горизонтальную скорости центра масс V_B, V_Γ через обобщенные координаты

$$V_B = \dot{z}\psi(x) + \Delta\dot{\theta}\psi(x)\cos[(\theta_s + \theta)\psi(x)], \quad V_\Gamma = \Delta\dot{\theta}\psi(x)\sin[(\theta_s + \theta)\psi(x)],$$

и учитывая, что суммарный погонный момент инерции провода с наледью относительно полюса O равен $J_o = J_c + m\Delta^2$, получим

$$K = \frac{1}{2}(m\dot{z}^2 + J_o\dot{\theta}^2) \int_{-l/2}^{l/2} \psi^2(x) dx + m\Delta\dot{z}\dot{\theta} \int_{-l/2}^{l/2} \psi^2(x)\cos[(\theta + \theta_s)\psi(x)] dx$$

или, используя (3),

$$K = \frac{4l}{15}(m\dot{z}^2 + J_o\dot{\theta}^2) + \frac{8l}{15}m\Delta\dot{z}\dot{\theta}\varphi(\theta). \quad (7)$$

Провод находится в ветровом потоке, имеющем скорость V , направленную перпендикулярно пролету. Известно, что при обтекании потоком вращающегося цилиндра возникает поперечная сила (эффект Магнуса), поэтому на провод, совершающий крутильные колебания, действует знакопеременная подъемная сила, возбуждающая вертикальные колебания.

Вследствие несовпадения центров массы и жесткости сечений при обледенении, вертикальные силы инерции создают знакопеременный крутящий момент, вызывающий крутильные колебания. Таким образом, возникает цепь обратной связи, которая может привести к самовозбуждению автоколебаний.

Сила Магнуса на единицу длины, согласно теореме Н.Е. Жуковского [3], равна $F = \rho_v V \Gamma$, ρ_v – плотность воздуха, V – скорость набегающего потока, Γ – циркуляция скорости вокруг сечения цилиндра. Для цилиндра кругового сечения площадью S , каким приближенно можно считать провод при слабо

выраженной несимметрии гололедных отложений, $\Gamma = 2S\dot{\Theta}$. Тогда подъемная сила Магнуса равна: $F = -2S\rho_v V \dot{\theta} \psi(x)$. Знак минус отражает тот факт, что при выбранных направлениях отсчета z , θ и направлении скорости ветра, как показано на рис.1б, сила направлена против оси Z . Вычисляя виртуальную работу на вертикальном перемещении $\delta A = \delta z \int_{-1/2}^{1/2} F \psi dx$, определим обобщенную силу

$$Q = -\frac{16}{15} \rho_v S l V \dot{\theta}. \quad (8)$$

Выражения (6), (7) и (8) позволяют записать уравнения колебаний провода в форме уравнений Лагранжа 2-го рода в виде

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \frac{10\Gamma}{ml^2}(1+2\beta)z + \frac{80B_\varepsilon}{3ml^4}(z^3 + 3z_s z^2) + \Delta(\ddot{\theta}\varphi + \dot{\theta}\dot{\varphi}) + 2\frac{\rho_v SV}{m}\dot{\theta} &= 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{10B_\theta}{J_0 l^2}(1+\mathcal{G})\theta + \frac{3}{7}\frac{mg\Delta}{J_0}\theta^2 + \frac{m\Delta}{J_0}\ddot{\varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где введены безразмерные параметры

$$\beta = \frac{8B_\varepsilon z_s^2}{3\Gamma l^2} = \frac{64B_\varepsilon z_s^3}{3mgl^4}, \quad \mathcal{G} = \frac{3mgl^2 \Delta \theta_s}{35B_\theta};$$

с учётом выражения для k в формулах (5) также имеем: $\mathcal{G} = \sqrt{1 + 3k^2/140} - 1$.

В уравнениях (9) коэффициенты при z и θ соответственно равны

$$\frac{10\Gamma}{ml^2}(1+2\beta) = \omega_z^2(1+2\beta), \quad \frac{10B_\theta}{J_0 l^2}(1+\mathcal{G}) = \omega_\theta^2(1+\mathcal{G}),$$

где множители $\omega_z^2 = 10\Gamma/(ml^2) \approx \pi^2 T/(ml^2)$, $\omega_\theta^2 = 10B_\theta/(J_0 l^2) \approx \pi^2 B_\theta/(J_0 l^2)$ представляют собой (в приближении $10 \approx \pi^2$) квадраты частот поперечных и крутильных колебаний провода, как прямолинейной струны. Параметры β и \mathcal{G} учитывает кривизну провисающего провода.

Приведем уравнения (9) к безразмерному виду, приняв в качестве масштабов времени и длины соответственно $\tau = \sqrt{ml^2/(10\Gamma)}$, z_s

$$\begin{aligned} \ddot{q} + 2\beta_B \dot{q} + \omega_B^2 q + \beta(3q^2 + q^3) + \delta(\varphi \ddot{\theta} + \dot{\varphi} \dot{\theta}) + v\dot{\theta} &= 0, \\ \ddot{\theta} + 2\beta_K \dot{\theta} + \omega_K^2 \theta + \lambda \varphi \ddot{q} + \frac{12\lambda \theta^2}{35} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь и далее обозначено

$$\delta = \frac{\Delta}{z_s}, \quad \lambda = \frac{z_s \Delta}{r^2}, \quad v = \frac{4\rho_v SV}{m\sqrt{5gz_s}} = \frac{\rho_v}{\rho_c} \frac{4V}{\sqrt{5gz_s}}, \quad q = \frac{z}{z_s},$$

где $r = \sqrt{J_0/m}$ – радиус инерции сечения относительно полюса; ρ_c – осредненная плотность материала провода; β_B , β_K – коэффициенты демпфирования.

В выбранных единицах измерения парциальные частоты вертикальных и крутильных колебаний равны: $\omega_B = \sqrt{1+2\beta}$, $\omega_K = \sqrt{1+\gamma} \cdot c_K/c_B$, где $c_K = \sqrt{B_\theta/J_0}$, $c_B = \sqrt{T/m}$ – скорости крутильных и поперечных волн.

Отношение волновых скоростей выражается через введенные выше параметры: $c_K/c_B = \sqrt{8\lambda/k}$. Тогда крутильная частота

$$\omega_K = \sqrt[4]{64\lambda^2 \left(\frac{1}{k^2} + \frac{3}{140} \right)}. \quad (11)$$

В уравнения (10) введены слагаемые, соответствующие модели линейного демпфирования. На практике демпфирование существенно меньше критического, поэтому коэффициенты β_B , β_K считаются малыми по сравнению со значениями частот ω_B , ω_K .

2. КРИТЕРИАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Система определяется пятью безразмерными параметрами подобия (без коэффициентов демпфирования): β , k , λ , δ , ν . Оценим диапазоны их изменения применительно к типовым проводам ВЛЭ. В Таблице 1 приведены необходимые конструктивные характеристики сталеалюминиевых проводов высоковольтных ВЛЭ согласно [6].

В [2] приводятся данные об эксплуатационных параметрах проводов этого типа в виде зависимости максимальной стрелы z_s от длины пролета $l = 200 \dots 550$ м (рис.3): для легкого провода АС 150/24 $z_s = 3 \dots 25$ м, для тяжелого АС 300/66 $z_s = 3 \dots 17$ м.

Таблица 1.

Механические характеристики сталеалюминиевых проводов.

Марка провода	Сечение ал./ст., мм ²	Диаметр, мм	Жесткость на растяж., МН	Масса погонная, кг/м	Разрывное усилие, кН
АС 150/24	149/24,2	17,1	15,2	0,599	52,3
АС 150/34	147/34,3	17,5	17,1	0,675	62,6
АС 185/29	181/29	18,8	18,5	0,728	62,0
АС 240/32	244/31,7	21,6	23,4	0,921	75,0
АС 240/39	236/38,6	21,6	24,2	0,952	80,9
АС 300/48	295/47,8	24,1	30,2	1,186	100,6
АС 300/66	288,5/65,8	24,5	33,4	1,313	117,5

Отсюда следуют оценки параметров: для легкого провода – $z_s/l = 0,015 \dots 0,045$, $\beta = 0,85 \dots 7,70$; для тяжелого – $z_s/l = 0,015 \dots 0,030$, $\beta = 0,85 \dots 3,50$. Остальные параметры менее определены, поскольку связаны с характером обледенения и скоростью ветра. Радиус инерции сечения с наледью имеет порядок диаметра провода $r/d = O(1)$. Относительное расстояние между полюсом и центром массы $0 < \Delta/d < O(1)$. Малые значения Δ соответствуют равномерному по сечению слою наледи независимо от его толщины, а значения $\Delta \approx d$ – выраженной асимметрии наледи. Отсюда следует, что для легкого провода можно принять $\delta = (1 \dots 5) \cdot 10^{-3}$, а для тяжелого – $\delta = (1 \dots 10) \cdot 10^{-3}$.

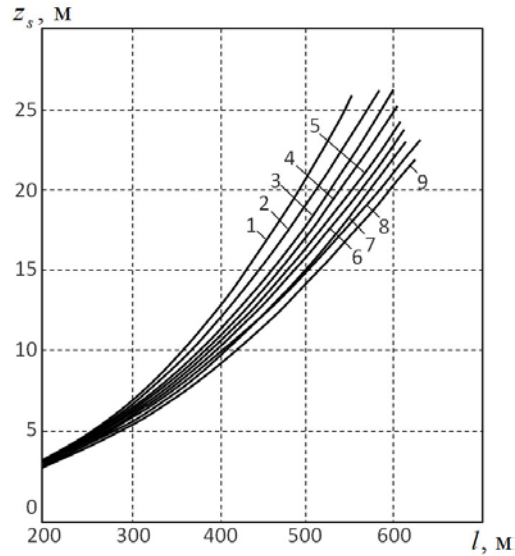


Рис.3. Стрелы провеса проводов различных марок от длины пролёта [2]:
 1 – АС-150/24; 2 – АС-185/29; 3 – АС-150/24 и АС-240/32; 4 – АС-240/39;
 5 – АС-185/43 и АС-300/48; 6 – АС-400/51; 7 – АС-240/56; 8 – АС-500/64;
 9 – АС-300/66.

Условия самовозбуждения колебаний существенно зависят от соотношения радиуса инерции r сечения и эксцентриситета центра массы сечения относительно оси провода Δ . Поэтому оценим отношение Δ/r . Для сечения, симметричного относительно оси ξ (рис.1), распределение массы можно охарактеризовать функцией одной переменной $m(\xi)$. Тогда масса сечения, центр массы, момент инерции относительно полюса соответственно равны: $M = \int md\xi$, $\Delta = \int m\xi d\xi / M$, $Mr^2 = \int m\xi^2 d\xi$. Искомое отношение, выраженное через эти величины, удовлетворяет условию

$$\frac{\Delta}{r} = \frac{\int m\xi d\xi}{\sqrt{\int m\xi^2 d\xi \cdot \int md\xi}} < 1 \quad (12)$$

в силу неравенства Коши-Буняковского. Таким образом $0 < \Delta/r < 1$.

В выражении $\lambda = (z_s/r)(\Delta/r)$ первый сомножитель – большая величина, однако второй может быть достаточно малым (при равномерной наледи). Это же характерно и для параметра $k \propto m\Delta$, где сомножители в принципе слабо связаны: первый характеризует объем наледи, а второй – неравномерность ее распределения по сечению. Поэтому параметры k и λ целесообразно оценить по их влиянию на частоты колебаний провода.

Согласно сделанным выше оценкам частота вертикальных колебаний $\omega_B = 1,5 \dots 4$ для легкого провода и $\omega_B = 1,5 \dots 3$ для тяжелого провода. Зависимости частоты крутильных колебаний от k , согласно формуле (11) при $\lambda = 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3$, приведены на рис.4.

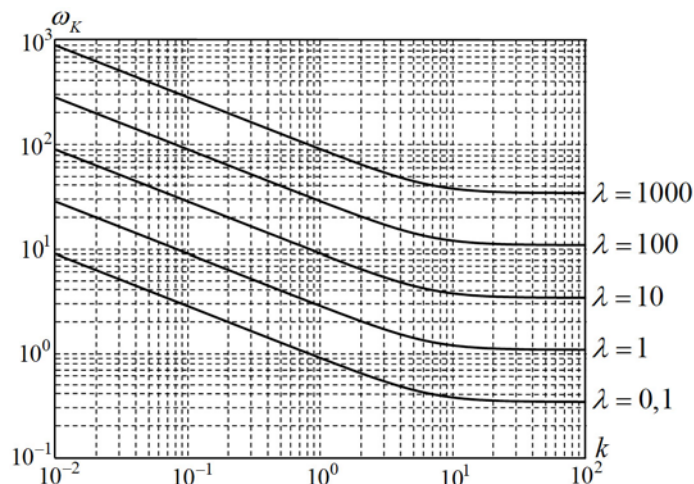


Рис.4. Зависимости крутильных частот от параметра k при различных значениях параметра λ .

Как видно, параметр k влияет на частоту только при $k < 10$, чем и определяется актуальный диапазон его изменения. Соотношение частот вертикальных и крутильных колебаний голого провода оценивается как $\omega_k/\omega_b \approx \sqrt{2(1+\nu)\varepsilon_s} \approx 20$, что является верхней оценкой. Гололед уменьшает это отношение. Следовательно, при $\omega_b = 1,5 \dots 4$ верхнее значение частоты крутильных колебаний $\omega_k < 30 \dots 100$. Отсюда следует, что при малых значениях $k \sim 0,1$ параметр $\lambda = 10^1 \dots 10^2$; при средних значениях $k \sim 1$ параметр $\lambda = 10^2 \dots 10^3$; при больших значениях $k \sim 10$ параметр $\lambda = 10^3 \dots 10^4$.

Так как $r, \Delta = O(d)$ – величины порядка диаметра провода, имеют место сильные неравенства: $\delta \ll 1$ и $\lambda \gg 1$, причем произведение $\delta\lambda = O(1)$. При этой оценке примем: для легкого провода $\delta = (5 \dots 1) \cdot 10^{-3}$, $\lambda = 200 \dots 1000$; для тяжелого провода $\delta = (10 \dots 1) \cdot 10^{-3}$, $\lambda = 100 \dots 1000$.

Скоростной параметр ν при скоростях ветра $V = 5 \dots 20$ м/с принимает значения: для легкого провода $\nu = (0,6 \dots 4,5) \cdot 10^{-2}$, а для тяжелого $\nu = (0,6 \dots 3,5) \cdot 10^{-2}$.

3. УСЛОВИЯ САМОВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Условия мягкого самовозбуждения колебаний сводятся к условиям неустойчивости равновесного состояния и определяются из уравнений линейного приближения.

Линеаризуем уравнения (10), опуская слагаемые, выше первого порядка относительно обобщенных координат и скоростей

$$\begin{aligned} \ddot{q} + 2\beta_B \dot{q} + \omega_B^2 q + a\delta\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} &= 0, \\ \ddot{\theta} + 2\beta_K \dot{\theta} + \omega_K^2 \theta + a\lambda\ddot{q} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где коэффициент $a = 1 - (8/21) \cdot \theta_s^2$.

Представляя решение системы (13) в виде $q = q_0 e^{st}$, $\theta = \theta_0 e^{st}$, придём к характеристическому уравнению $b_0 s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4 = 0$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 - a^2 \lambda \delta, \quad b_1 = 2(\beta_B + \beta_K) - a \lambda \nu, \\ b_2 &= \omega_K^2 + 4\beta_K \beta_B + \omega_B^2 \approx \omega_K^2 + \omega_B^2, \\ b_3 &= 2(\omega_K^2 \beta_B + \omega_B^2 \beta_K), \quad b_4 = \omega_K^2 \omega_B^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Из условия $\theta_s < \pi/2$ следует, что $0 < a < 1$, а в силу (12) имеем $\lambda \delta = (\Delta/r)^2 < 1$, следовательно $b_0 > 0$. Очевидно также, что $b_{2,3,4} > 0$. Таким образом, равновесие становится неустойчивым и в системе возбуждаются колебания при выполнении хотя бы одного из условий [7]

$$b_1 < 0, \quad B = b_1 b_2 b_3 - b_1^2 b_4 - b_0 b_3^2 < 0. \quad (15)$$

Второе неравенство (15) эквивалентно двум: $b_1 < b_1^{(1)}$ и $b_1 > b_1^{(2)}$, где $b_1^{(1,2)}$ – корни уравнения $B = 0$, рассматриваемого как квадратное уравнение относительно b_1 . С учётом положительных значений $b_{0,2,3,4}$ из теоремы Виета следует, что $b_1^{(1,2)} > 0$. Поэтому, условия (15) эквивалентны условиям

$$b_1 < b_1^{(1)}, \quad b_1 > b_1^{(2)}; \quad (16)$$

$$b_1^{(1,2)} = (1 + \eta^{-1})(\beta_B + \eta \beta_K) \left(1 \mp \sqrt{1 - 4 \frac{1 - a^2 \delta \lambda}{\eta + 2 + \eta^{-1}}} \right), \quad (17)$$

где параметр $\eta = \omega_B^2 / \omega_K^2$.

Таким образом, система будет динамически неустойчивой, если значение b_1 находится вне интервала между корнями $b_1^{(1,2)}$.

Физически очевидно, что развитию автоколебаний должна способствовать близость парциальных частот вертикальных и крутильных колебаний; поэтому существенным параметром является частотное рассогласование, которое характеризуется параметром η , входящим в формулу (17). Очевидно также, что для самовозбуждения колебаний существенна связанность вертикальных и крутильных мод, обусловленная несимметрией сечения при обледенении провода. Этот фактор обобщенно характеризует параметр k (см. (5)), связывающий крутильную жесткость провода, массу, а также эксцентриситет гололедных отложений относительно оси провода, создающий крутящий момент при вертикальных колебаниях.

Внешнее ветровое воздействие на провод определяет кинематический параметр ν . Поэтому условиям самовозбуждения (16) целесообразно придать иной вид, используя в качестве переменной параметр ν вместо b_1 . Для этого достаточно воспользоваться выражением b_1 из (14). Тогда с учётом обозначений $\nu^{(1,2)} = (2\beta_B + 2\beta_K - b_1^{(1,2)}) / a \lambda$ условия самовозбуждения (16) могут быть записаны в виде

$$\nu < \nu^{(2)}, \quad \nu > \nu^{(1)}.$$

Это соответствует известному практическому факту, что пляска возникает в определённых диапазонах скоростей, что соответствует выявленному двустороннему ограничению на скорость ветра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В современной литературе используется лишь единственное условие возникновения пляски проводов ВЛЭ, предложенное в 1934 г. Ден-Гартогом [8]. В его работах показано, что пляска проводов представляет собой автоколебательный процесс, который возбуждается и поддерживается аэродинамическими силами, возникающими при обтекании воздушным потоком проводов с наледью (гололёдом, изморозью). В более поздних работах установлены критерии, при которых возможно возникновение автоколебаний [9,10]. Однако, опыт наблюдения галопирования проводов ВЛЭ свидетельствует о неоднозначности причин возбуждения и поддержания этого феномена [11].

В настоящей статье предложена альтернативная модель самовозбуждения вертикально-крутильных колебаний провода в ветровом потоке при наличии гололедных отложений. Самовозбуждение колебаний трактуется как неустойчивость равновесного состояния вследствие возникновения поперечных аэродинамических сил при закручивании провода (эффект Магнуса) и динамической связи вертикальных и крутильных колебаний.

Определена группа критериальных безразмерных параметров модели и выявлены практические диапазоны их изменения.

На основе вариационного принципа получены нелинейные уравнения колебаний, а также их линейные аналоги, с помощью которых получены условия самовозбуждения колебаний.

Более детальное исследование задачи с анализом условий самовозбуждения пляски проводов ВЛЭ не является целью настоящей статьи и составит предмет дальнейших исследований с использованием разработанной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яковлев Л.В. *Пляска проводов на воздушных линиях электропередачи и способы борьбы с нею*. – М.: Энергетик: Энергопрогресс, 2002 – 95 с.
2. Александров Г.П. и др. *Проектирование линий электропередачи сверхвысокого напряжения*. – С-Пб.: «Энергоатомиздат», Санкт-Петербургское отделение, 1993 – 560 с.
3. Жуковский Н.Е. *Собрание сочинений*. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948-1950 – 7 т.
4. Ламб Г. *Гидродинамика*. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947 – 929 с.
5. Фабер Т.Е. *Гидроаэродинамика*. – М.: Постмаркет, 2001 – 560 с.
6. *ГОСТ 839-80. Провода неизолированные для воздушных линий электропередачи. Технические условия*.
7. Малкин И.Г. *Теория устойчивости движения*. – М.: Наука, 1966 – 532 с.
8. Ден-Гартог Дж. П. *Механические колебания*. – М.: Физматгиз, 1960 – 574 с.
9. *EPRI Transmission Line Reference Book. Wind-Induced conductor motion*. – Palo Alto (California): Electrical Power Research Institute, 1979 – 255 p.
10. *EPRI Transmission Line Reference Book. Wind-induced conductor motion*. – Electrical Power Research Institute: Final Report, November 2006.
11. Бекметьев Р.М., Жакаев А.Ш., Ширинских Н.В. *Пляска проводов воздушных линий электропередачи*. – Алма-Ата: Изд-во «Наука» Казахской ССР, 1979 – 152 с.

REFERENCES

1. Yakovlev L.V. *Plyaska provodov na vozdushnykh liniyakh ehlektrperedachi i sposoby bor'by s neyu* [Gallopings of OHL conductors and ways to combat it]. Moskva, Ehnergetik, Ehnergoprogress, 2002, 95 p.
2. Aleksandrov G.P. i dr. *Proektirovanie linij ehlektrperedachi sverkhvysokogo napryazheniya*. [Design of ultra-high voltage transmission lines]. Sankt-Peterburg, Ehnergoatomizdat, Sankt-Peterburgskoe otdelenie, 1993, 560 p.
3. Zhukovskij N.E. *Sobranie sochinenij* [Collected Works]. Moskva-Leningrad, Gostekhizdat, 1948-1950, 7 vol.
4. Lamb G. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moskva-Leningrad, OGIZ, 1947, 929 p.
5. Faber T.E. *Gidroaehrodinamika* [Hydroaerodynamics]. Moskva, Postmarket, 2001, 560 p.
6. GOST 839-80. *Provoda neizolirovannye dlya vozdushnykh linij ehlektrperedachi. Tekhnicheskie usloviya* [Non-insulated conductors of overhead power lines. Specifications].
7. Malkin I.G. *Teoriya ustojchivosti dvizheniya* [Theory of motion stability]. Moskva, Nauka, 1966, 532 p.
8. Den-Gartog Dzh. P. *Mekhanicheskie kolebaniya* [Mechanical vibrations]. Moskva, Fizmatgiz, 1960, 574 p.
9. EPRI *Transmission Line Reference Book. Wind-Induced conductor motion*. Palo Alto (California), Electrical Power Research Institute, 1979, 255 p.
10. EPRI *Transmission Line Reference Book. Wind-induced conductor motion*. Electrical Power Research Institute: Final Report, November 2006.
11. Bekmet'ev R.M., Zhakaev A.SH., Shirinskih N.V. *Plyaska provodov vozdushnykh linij ehlektrperedachi* [Gallopings of overhead power lines conductors]. Alma-Ata, Izdatelstvo Nauka Kazakhskoj SSR, 1979, 152 p.

Поступила в редакцию 18 января 2023 года.

Сведения об авторах:

Фельдштейн Валерий Адольфович – д.т.н., г.н.с., АО «Центральный научно-исследовательский институт машиностроения», г. Королёв, Россия; e-mail: dinpro@mail.ru
Данилин Александр Николаевич – д.ф.-м.н., г.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: andaniilin@yandex.ru