



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ*

Артамонова Н.Б., Шешенин С.В.

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,
г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Решение нелинейной связанной задачи, описывающей деформирование грунта при оттоке жидкости, имеет практическое применение, например, при моделировании деформирования дорожного полотна или при расчете неравномерной осадки инженерных сооружений. Уплотнение водонасыщенных дисперсных грунтов под нагрузкой, как правило, нелинейное и сопровождается большими деформациями, поэтому разработка геометрически и физически нелинейной связанной модели консолидации, учитывающей упругопластическое поведение материала, сопровождающееся изменением пористости и проницаемости, является весьма актуальной. Создание собственного программного кода является целесообразным, так как способствует повышению уровня научного моделирования и программирования в нашей стране. Представляется актуальным исследование устойчивости решения седловой задачи консолидации теоретически в линейном и нелинейном вариантах.

В настоящем исследовании сформулирована, математически исследована, обоснована на основе моделей и экспериментальных возможностей механики сплошных сред и численно реализована достаточно общая формулировка задачи совместного деформирования пористой твердой среды с протекающей через поры жидкостью в рамках физической и геометрической нелинейности. Постановка задачи выведена в скоростях перемещений твердой фазы и изменения давления воды в дифференциальном и вариационном виде. Уравнения фильтрации и изменения пористости переформулированы в лагранжевых координатах твердого каркаса согласно подходу ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) с использованием относительной скорости движения жидкости. Показана применимость метода Удзавы в качестве основной части метода решения нелинейных задач консолидации. Сходимость итерационного процесса изучена теоретически. Были проведены вычислительные эксперименты решения линейной задачи для подтверждения теоретической скорости сходимости итерационного процесса. Вычислительные эксперименты не только подтвердили теорию, но и добавили различные аспекты относительно характера сходимости, не улавливаемые теоретическим рассмотрением.

Ключевые слова: связанная нелинейная задача консолидации; седловая система; конечно-элементное моделирование; итерационный решатель; метод Удзавы; сходимость итерационного процесса

MATHEMATICAL STUDY OF THE LINEARIZED COUPLED CONSOLIDATION PROBLEM

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2022-284.

Artamonova N.B., Sheshenin S.V.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

ABSTRACT

The solution of a nonlinear coupled problem that describes the deformation of the soil during the outflow of fluid has practical applications, for example, in modeling the deformation of a roadway or in calculating the uneven settlement of engineering buildings. The compaction of water-saturated dispersed soils under load is usually nonlinear and is accompanied by large deformations. Therefore, the development of a geometrically and physically nonlinear coupled consolidation model that takes into account the elastoplastic behavior of the material, accompanied by a change in porosity and permeability, is very relevant. The creation of a program code is expedient, as it contributes to an increase in the level of scientific modeling and programming in our country. It seems relevant to study the stability of the solution of the saddle consolidation problem theoretically in linear and nonlinear versions.

In the present study, a fairly general formulation of the problem of coupled deformation of a porous solid medium with a liquid flowing through the pores within the framework of physical and geometric nonlinearity is formulated, mathematically investigated, justified on the basis of models and experimental possibilities of continuum mechanics, and numerically implemented. The statement of the problem is derived in terms of the rates of the solid phase displacement and changes in water pressure in differential and variational form. The filtration and porosity equations are reformulated in the Lagrangian coordinates of the solid skeleton according to the ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) approach using the relative fluid velocity. The applicability of the Uzawa method as the main part of the method for solving nonlinear consolidation problems is shown. The convergence of the iterative process has been studied theoretically. Computational experiments were carried out to solve a linear problem to confirm the theoretical rate of convergence of the iterative process. Computational experiments not only confirmed the theory, but also added various aspects regarding the nature of convergence that were not captured theoretically by consideration.

Keywords: coupled nonlinear consolidation problem; saddle system; finite element simulation; iterative solver; Uzawa method; convergence of the iterative process

ВВЕДЕНИЕ

Большинство разработанных моделей совместного деформирования скелета грунта и фильтрации жидкости используют линейную теорию упругости или упругопластичности для малых деформаций (например, [1-4]). В литературе есть обобщения классических уравнений консолидации с бесконечно малых на конечные деформации, например в работах [5-9].

Задачи совместного деформирования грунта и движения жидкости могут решаться в несвязанной постановке (упругий режим фильтрации) и в связанной постановке. Основное различие между связанной постановкой и теорией упругого режима фильтрации состоит в описании процесса деформации скелета грунта. Уравнения упругого режима можно получить из уравнений связанной модели консолидации путем введения дополнительных ограничений на деформацию каркаса породы. Например, вводят допущение об отсутствии сдвиговых компонент тензора деформаций или отсутствии компоненты вертикального перемещения каркаса [3]. Тогда второе уравнение модели консолидации, описывающее фильтрацию жидкости, записывается относительно одной переменной, т.е. порового давления, и таким образом превращается в уравнение

типа диффузии или теплопроводности, а система уравнений в целом распадается на два несвязанных уравнения, решение которых не вызывает трудностей. В отличие от упругого режима фильтрации, в связанной постановке скелетная матрица деформируется в трех направлениях, вследствие чего деформация скелета и течение жидкости оказываются связанными друг другом и решение уравнений требуют совместного решения для давления воды и перемещений в скелете. Возможность совместных деформаций скелета породы и жидкости обеспечивают численные решения модели консолидации.

При решении задач об откачке нефти или воды из глубоких скважин упругий режим фильтрации в отдельных случаях бывает вполне приемлем. Например, в работе [3] модель упругого режима фильтрации использовалась для прогноза осадки земной поверхности при откачке пластовых вод в Равенне (Италия, южнее Венеции). Задачи о деформировании водонасыщенного грунта под нагрузкой, как правило, решаются в связанной постановке. Отличие решений связанной и несвязанной задач совместного деформирования скелета грунта и движения жидкости исследовалось, например, в [10]. При решении связанной задачи на начальном этапе откачки жидкости из скважины возникает повышение давления воды в массиве пород, сложенном переслаиванием водопроницаемых слоев и водоупоров. Это явление в литературе называется эффектом Мандела-Крайера, или Нордбергумским эффектом. Нордбергумский эффект наблюдается на практике и возникает при численном решении связанной задачи, но не происходит при упругом режиме фильтрации.

В 1990-е гг. были получены численные решения связанной модели Био, например, в работах зарубежных исследователей – в США [6,7], в Гонконге (моделирование осадки взлетно-посадочной полосы, построенной на искусственном острове в море). В России впервые численное решение связанной задачи консолидации было представлено в работах [11,12].

В настоящее время связанная модель Био применяется различными авторами для численного моделирования консолидации при квазистатических и динамических нагрузках, например, [8,9,13-17].

В полностью связанном методе уравнение равновесия среды и уравнение фильтрации решаются на каждом шаге по времени в виде общей системы [13,14]. В итерационном процессе типа метода Удзавы [18] уравнение равновесия и уравнение фильтрации связываются последовательно. Например, сначала решается задача фильтрации, а потом механическая задача, используя результат решения первой [13-16]. Итерационно связанное решение может быть таким же точным, как и полностью связанное, если заданы достаточно жесткие критерии сходимости, но количество итераций может быть очень большим. Итерационно связанные последовательные методы могут использовать независимые решатели механики сплошных сред [16].

Численное решение связанных уравнений трехмерной консолидации по-прежнему является сложной задачей [4]. Полностью связанный метод решения приводит к большим алгебраическим системам, количество неизвестных в которых может достигать нескольких сотен тысяч. Кроме того, матрица коэффициентов, полученная при численной дискретизации, может быть плохо обусловлена. Следовательно, для работы с полностью связанной схемой необходимы продвинутые решатели. При использовании итерационно связанной схемы может быть медленной сходимость итерационного процесса, зависящая от механических свойств жидкости и грунта [15].

Еще одна проблема связана с проявлениями неустойчивости численного решения в виде ложных осцилляций порового давления. Если сжимаемость жидкости достаточно мала по сравнению с объемной сжимаемостью скелета грунта [4], то на начальном этапе процесса консолидации скелет грунта ведет себя как несжимаемая среда, что приводит к патологии конечных элементов (КЭ), известной как «запирание» («locking»), которое вызывает ложные осцилляции порового давления [4]. Один из способов решения этой проблемы – использование пространственной аппроксимации разного порядка для перемещений и порового давления. Как известно из литературы (например, [17]), поровое давление следует аппроксимировать линейными конечными элементами, а перемещения – квадратичными КЭ.

Данная статья является продолжением работ авторов [19-23]. По сравнению с предыдущими работами, в статье представлено теоретическое исследование устойчивости решения седловой задачи консолидации в линейном случае, подтвержденное вычислительными экспериментами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ

Дифференциальная постановка связанной задачи консолидации «в скоростях» включает три уравнения – равновесия, фильтрации и пористости [19-23]

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}) - \alpha \nabla p + \rho \mathbf{f} = 0 \\ n \nabla \cdot \left(\frac{k}{n \mu_f} \nabla p \right) = \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + n \beta_f \dot{p} - \beta_f \nabla p \cdot \frac{k}{\mu_f} \nabla p \\ \dot{n} - \nabla n \cdot \frac{k}{n \mu_f} \nabla p = (1 - n) \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u}(\xi, t) / \partial t, \quad \dot{p} = \partial p(\xi, t) / \partial t, \quad \dot{n} = \partial n(\xi, t) / \partial t, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$ – эффективные напряжения, \mathbf{u} – вектор средних перемещений в твердой фазе материала, $\alpha = \alpha(n)$ – коэффициент Био, p – среднее давление в жидкости, ρ – средняя плотность водонасыщенной среды, \mathbf{f} – вектор массовой силы, $n = n(\mathbf{u})$ – пористость, $k = k(n)$ – коэффициент проницаемости, $\mu_f = \text{const}$ – динамическая вязкость жидкости, $\beta_f = \text{const}$ – сжимаемость жидкости, ξ – лагранжевы координаты твердого скелета.

Последние два уравнения (фильтрации и изменения пористости) системы (1.1) выведены из закона фильтрации Дарси, уравнения состояния жидкости и уравнений сохранения масс твердой и жидкой фаз [19-23]. При выводе уравнений (1.1) были сделаны следующие допущения. Процесс деформирования среды изотермический. Поры материала полностью заполнены флюидом. Жидкость ньютоновская и однородная, изменение плотности жидкости ρ_f при изменении порового давления подчиняется закону баротропии ($d\rho_f/\rho_f = \beta_f dp$). В уравнениях неразрывности материал скелета принимается несжимаемым ($d\rho_s/dt = 0$), но в уравнении равновесия сжимаемость материала

скелета учитывается. Уравнения фильтрации и изменения пористости, изначально представленные в Эйлеровом подходе, были переформулированы в лагранжевых координатах твердой фазы с использованием относительной скорости течения жидкости согласно подходу ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) [24].

В задаче консолидации задавались следующие граничные условия. Часть границы ($\xi \in \Sigma_1$) неподвижна и непроницаема, остальная часть границы ($\xi \in \Sigma_2$) проницаема, и на ней действует поверхностная нагрузка

$$\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \xi \in \Sigma_1; \quad \boldsymbol{\sigma}^{eff} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S}; \quad p = 0; \quad \xi \in \Sigma_2, \quad (1.2)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к границе области $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, \mathbf{S} – поверхностная сила.

Для дальнейшего решения задачи консолидации численными методами была получена вариационная постановка в текущей конфигурации, а уравнение равновесия было линеаризовано с использованием дифференциала Гато [22]

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_V (\mathbf{d}(\mathbf{w}) : \mathbf{C}^d : \mathbf{d}(\mathbf{du})) dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}) : [(\nabla \mathbf{w})^T \cdot \nabla \mathbf{du}] dV - \\ & - \int_V \alpha dp \nabla \cdot \mathbf{w} dV - \int_V \alpha p (\nabla \cdot \mathbf{w}) (\nabla \cdot \mathbf{du}) dV - \\ & - \int_V \alpha p (\nabla \mathbf{w})^T \cdot \nabla \mathbf{du} dV - \int_V \rho d\mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dV - \int_{\Sigma_2} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{w} d\Sigma = 0 \\ & \int_V q \beta_f \nabla p \cdot \frac{k}{\mu_f} \nabla p dV - \int_V \nabla q \cdot \frac{k}{\mu_f} \nabla p dV - \int_V q \nabla n \cdot \frac{k}{n \mu_f} \nabla p dV = \\ & = \int_V q \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_V q n \beta_f \dot{p} dV \\ & \int_V h \dot{n} dV - \int_V h \nabla n \cdot \frac{k}{n \mu_f} \nabla p dV = \int_V h (1-n) \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \\ & \mathbf{C}_{ijkl}^d = J^{-1} F_{ip} F_{jq} F_{kr} F_{ls} \mathbf{C}_{pqrs}^E, \quad J = \det \mathbf{F}, \quad \mathbf{C}^E = \partial \mathbf{S}^{eff} / \partial \mathbf{E}, \\ & \mathbf{d}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{w})^T + \nabla \mathbf{w}], \end{aligned} \right. \quad (1.3)$$

где \mathbf{C}^d и \mathbf{C}^E – касательные модули соответственно в текущей и начальной конфигурациях, \mathbf{F} – деформационный градиент, \mathbf{S}^{eff} – второй тензор эффективных напряжений Пиола-Кирхгофа, \mathbf{E} – тензор деформаций Грина-Лагранжа, \mathbf{S} – поверхностная сила из граничных условий (1.2), \mathbf{w} , q , h – пробные функции из подпространств Соболева, удовлетворяющие заданным граничным условиям 1-го рода

$$H_u = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in W_2^1, \mathbf{w}|_{\Sigma_1} = 0 \right\}, \quad H_p = \left\{ q \mid q \in W_2^1, q|_{\Sigma_1} = 0 \right\}, \quad H_h = \left\{ h \mid h \in W_2^1 \right\}.$$

Уравнения (1.3) квазилинейные, т.е. линейные относительно \mathbf{du} , dp (или \dot{p}) и dn (или \dot{n}), но нелинейные относительно \mathbf{u} , p и n . Все функции в системе (1.3) зависят от лагранжевых координат ξ осредненной твердой фазы.

В качестве определяющих соотношений в (1.3) могут использоваться соотношения для гиперупругого материала при существовании упругого потенциала, а также теория пластического течения или деформационная теория пластичности.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ

Для удобства сформулируем уравнения (1.3) в дифференциальном виде

$$\left\{ \begin{aligned} & \nabla \cdot \left(\mathbf{C}^d(\mathbf{u}) : \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) - \alpha(n) \nabla \frac{\partial p}{\partial t} - \\ & - \alpha(n) \nabla p \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \alpha(n) \nabla p \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(p) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = 0 \\ & n(\mathbf{u}) \nabla \cdot \left(\frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p \right) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + n(\mathbf{u}) \beta_f \frac{\partial p}{\partial t} - \beta_f \nabla p \cdot \frac{k(n)}{\mu_f} \nabla p \\ & \frac{\partial n}{\partial t} - \nabla n \cdot \frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p = (1-n) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad (2.1)$$

Исследуем нелинейную систему (2.1) на корректность в предположении, что градиенты давления и пористости малы. Действительно, делаем замену $p \rightarrow p + p_0$, $n \rightarrow n + n_0$, где $p_0(\mathbf{x})$ и $n_0(\mathbf{x})$ – начальные значения (до процесса консолидации). Следовательно, p и n – это их изменения. Основное допущение касается градиентов p и n , которые предполагаются малыми по сравнению с градиентами p_0 и n_0 соответственно. Отбрасывая малые члены второго порядка, приходим к упрощенной системе уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \nabla \cdot \left(\mathbf{C}^d(\mathbf{u}) : \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) - \alpha(n) \nabla \frac{\partial p}{\partial t} - \\ & - \alpha(n) \nabla p_0 \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \alpha(n) \nabla p_0 \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(p) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = 0 \\ & n(\mathbf{u}) \nabla \cdot \left(\frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p \right) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + n(\mathbf{u}) \beta_f \frac{\partial p}{\partial t} - 2\beta_f \nabla p \cdot \frac{k(n)}{\mu_f} \nabla p_0 \\ & \frac{\partial n}{\partial t} - \nabla n \cdot \frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p_0 - \nabla n_0 \cdot \frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p - \nabla n_0 \cdot \frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p_0 = \\ & = (1-n) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) дополняются граничными условиями на функции \mathbf{u} и p . Для простоты будем считать, что начальное давление и пористость однородны: $p_0(\mathbf{x}) = \text{const}$, $n_0(\mathbf{x}) = \text{const}$. Тогда уравнения (2.2) упрощаются [22]

$$\left\{ \begin{aligned} & \nabla \cdot \left(\mathbf{C}^d(\mathbf{u}) : \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) - \alpha(n) \nabla \frac{\partial p}{\partial t} + \rho(p) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = 0 \\ & n(\mathbf{u}) \nabla \cdot \left(\frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p \right) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + n(\mathbf{u}) \beta_f \frac{\partial p}{\partial t} \\ & \frac{\partial n}{\partial t} = (1-n) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad (2.3)$$

Согласно идее метода Удзавы [18], $\partial \mathbf{u} / \partial t$ можно выразить как решение первого уравнения в (2.3) с соответствующими граничными условиями

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{F} - \alpha \nabla \frac{\partial p}{\partial t} \right), \quad \mathbf{F} = \rho \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

где \mathbf{A} означает оператор этой краевой задачи в соответствующем функциональном пространстве. Формула (2.4) объясняет идею метода Удзавы и не претендует на математическую строгость. С другой стороны, это соображение можно легко привести к строгой форме, если рассматривать собственные функциональные пространства и операторные уравнения, эквивалентные вариационным уравнениям.

Мы приходим к уравнениям (2.5) путем подстановки (2.4) в два оставшихся уравнения в (2.3). В результате получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = (1-n) \nabla \cdot \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{F} - \alpha \nabla \frac{\partial p}{\partial t} \right) \\ n(\mathbf{u}) \nabla \cdot \left(\frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p \right) = \nabla \cdot \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{F} - \alpha \nabla \frac{\partial p}{\partial t} \right) + n(\mathbf{u}) \beta_f \frac{\partial p}{\partial t} \end{cases} \quad (2.5)$$

Система (2.5) включает два связанных квазилинейных нестационарных уравнения. Существование решения системы (2.5) основано на том, что $\nabla \cdot \mathbf{A}^{-1} \nabla$ – положительно определенный симметричный оператор, спектрально эквивалентный тождественному оператору. Следовательно, второе уравнение в (2.5) – это уравнение параболического типа, если $n > 0$. Следовательно, его решение $p = p(n, t, \mathbf{x})$ существует. Если его подставить в первое уравнение (2.5), то оно превратится в нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно n . Существование единственного решения этого уравнения кажется очевидным при достаточно общих условиях.

Предлагаемый алгоритм решения системы (2.3) использует ту же идею подстановки Удзавы. Он заключается в решении на каждом шаге внутренней седловой системы, состоящей из двух последних уравнений в (2.3), с использованием алгоритма типа Удзавы и последующем уточнении первого уравнения с использованием неявной схемы Эйлера. Конечно, сначала мы используем дискретизацию по t с помощью разностных производных назад.

Важное замечание касается оператора $\nabla \cdot \mathbf{A}^{-1} \nabla$. Он положительно определенный и симметричный при некоторых ограничениях на граничные условия. Рассмотрим вариационную постановку, соответствующую системе (2.3)

$$\begin{cases} \int_V (\nabla \mathbf{w} : \mathbf{C}^d(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{d}\mathbf{u}) dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}) : [(\nabla \mathbf{w})^T \cdot \nabla \mathbf{d}\mathbf{u}] dV - \\ - \int_V \alpha dp \nabla \cdot \mathbf{w} dV - \int_V \rho d\mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dV - \int_{\Sigma_2} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{w} d\Sigma = 0 \\ \int_V \nabla q \cdot \frac{k}{\mu_f} \nabla p dV + \int_V q \nabla n \cdot \frac{k}{n \mu_f} \nabla p dV + \int_V q \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_V q n \beta_f \dot{p} dV = 0 \\ \int_V h \dot{n} dV = \int_V h(1-n) \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \end{cases} \quad (2.6)$$

Из (2.6) видно, что для внутренней седловой задачи система (2.3) (или (2.6)) является самосопряженной, если в силу граничных условий выполнено равенство

$$\int_V \text{grad } p \cdot \mathbf{u} dV + \int_V \text{div } \mathbf{u} p dV = 0.$$

Последнее условие выполняется для ряда практических задач. Задача может быть решена и в несимметричном случае, но симметрия, конечно, значительно упрощает процедуру решения. После решения системы первых двух уравнений (2.6) пористость пересчитывается из третьего уравнения (2.6). Далее рассчитанное значение пористости учитывается при решении уравнений равновесия и фильтрации на следующем шаге по времени.

Дискретизация линейаризованного вариационного уравнения равновесия и уравнения фильтрации из (2.6) по пространственным координатам осуществлялась с помощью метода конечных элементов (МКЭ), что означает $H_u \rightarrow H_u^N$ и $H_p \rightarrow H_p^N$, где H_u^N и H_p^N – N-мерные подпространства, т.е. $H_u^N \in H_u$ и $H_p^N \in H_p$. При дискретизации для аппроксимации приращений перемещения скелета использовались 20-узловые серендиповы квадратичные элементы (Q2), а для аппроксимации приращений давления жидкости – 8-узловые трилинейные элементы (Q1). Такие конечные элементы (КЭ) удовлетворяют LBB (Ладыженской-Бабушки-Бреци) условию корректности дискретизированной седловой системы [17,25]. Функции $du^N(\xi, t) \in H_u^N$ и $dp^N(\xi, t) \in H_p^N$ являются приближенными решениями первых двух уравнений (2.6). Это означает пространственную дискретизацию.

Также для численного решения системы (2.6) требуется дискретизация по времени. Последнее делается с разностных производных назад. Такой подход иногда называют полудискретизацией, что просто означает независимость пространственной и временной дискретизации. Используя эту идею, мы приходим к полностью дискретизированным вариационным уравнениям, которые должны выполняться для любых пробных функций $w^N(\xi, t) \in H_u^N$ и $q^N(\xi, t) \in H_p^N$

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_V (\nabla w^N : C^d(u^N) : \nabla \Delta u^N) dV + \int_V \sigma^{eff}(u^N) : [(\nabla w^N)^T \cdot \nabla \Delta u^N] dV - \\ & - \int_V \alpha \Delta p^N \nabla \cdot w^N dV - \int_V \rho \Delta f \cdot w^N dV - \int_{\Sigma_2} \Delta S \cdot w^N d\Sigma = 0 \\ & \int_V \nabla q^N \cdot \frac{k}{\mu_f} \nabla p^N dV + \int_V q^N \nabla n \cdot \frac{k}{n\mu_f} \nabla p^N dV + \int_V q^N \nabla \cdot \frac{\Delta u^N}{\Delta t} dV + \\ & + \int_V q^N n \beta_f \frac{\Delta p^N}{\Delta t} dV = 0 \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

Здесь $\tau = \Delta t$ означает шаг по времени.

Теперь рассмотрим квазилинейную алгебраическую систему (2.7), так как именно эти два уравнения образуют седловую систему и ее решение требует значительного внимания. Третье уравнение в (2.6) становится обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ), если u определить из (2.7) и подставить в (2.6). Такой метод решения известен в литературе как разбиение по физическим процессам.

Обозначим вектор приращений узловых перемещений элемента как $\Delta \hat{u}^r = (\Delta \hat{u}_1^r, \Delta \hat{u}_2^r, \Delta \hat{u}_3^r)^T$ ($r = 1, \dots, 20$), а приращений узлового давления жидкости в элементе как $\Delta \hat{p}^q$ ($q = 1, \dots, 8$). Тогда аппроксимация КЭ по любому элементу имеет вид

$$\Delta \mathbf{u}^N = \sum_{r=1}^{20} \overset{u}{N}_r \Delta \hat{\mathbf{u}}^r, \quad \Delta p^N = \sum_{q=1}^8 \overset{p}{N}_q \Delta \hat{p}^q,$$

где $\overset{u}{N}_r$ и $\overset{p}{N}_q$ – функции формы элементов Q2 и Q1 соответственно. Последние формулы представляют конечно-элементную аппроксимацию на локальном или элементном уровне. С другой стороны, необходимо рассматривать алгебраическую систему (2.7) на глобальном уровне. Тогда КЭ аппроксимация имеет вид

$$\Delta u_\alpha^N = \sum_{i=1}^{N_u} U_\alpha^i \varphi_i, \quad U^i = (U_1^i, U_2^i, U_3^i), \quad \Delta p^N = \sum_{i=1}^{N_p} P^i \psi_i.$$

Запишем систему (2.7) в блочной форме на каждом временном шаге, используя глобальный вектор неизвестных U и P

$$\begin{bmatrix} A & D \\ B & -\tau C \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ G \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Уже подчеркивалось, что самосопряженность или симметричность всей блочной матрицы в (2.8), т.е. $D = B^T$, очень важна для построения эффективного алгоритма решения системы (2.7). В терминах блочной матрицы (2.8) идея метода Удзавы для седловой задачи (2.8) состоит в том, чтобы выразить U из первого уравнения в (2.8)

$$U = A^{-1}(F - B^T P), \quad (2.9)$$

и подставить (2.9) во второе уравнение в (2.8). Тогда мы получаем

$$\left(\frac{1}{\tau} B A^{-1} B^T + C \right) P = \frac{1}{\tau} B A^{-1} F - \frac{1}{\tau} G = F^*. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) может быть решено различными итерационными методами. Прямое решение невозможно, так как невозможно прямое вычисление матрицы $B A^{-1} B^T$. Прежде всего, обозначим оператор Шура как

$$\mathbb{S} = \frac{1}{\tau} B A^{-1} B^T + C. \quad (2.11)$$

Симметрия оператора Шура (2.11) позволяет использовать все итерационные методы вплоть до самого быстрого метода сопряженных градиентов. Если матрица (2.11) несимметрична, то можно использовать менее эффективные итерационные методы. Общий двухслойный итерационный метод имеет вид

$$\mathbb{B} \frac{P^{s+1} - P^s}{\tau^{s+1}} + \mathbb{S} P^s = F^*. \quad (2.12)$$

Скорость сходимости процесса (2.12) зависит от выбора предобуславливателя \mathbb{B} . Для того чтобы скорость итерационного процесса была высокой, предобуславливатель \mathbb{B} следует выбрать в таком виде, чтобы он был спектрально эквивалентен оператору \mathbb{S} [26]. Спектральная эквивалентность означает выполнение следующих неравенств

$$0 < \gamma_1 \mathbb{B} \leq \mathbb{S} \leq \gamma_2 \mathbb{B}, \quad (2.13)$$

с независимыми от сетки границами γ_1, γ_2 . Оказалось, что спектральную эквивалентность обеспечивает выбор предобуславливателя \mathbb{B} в виде

$$\mathbb{B} = \frac{\kappa}{\tau} E + C, \quad (2.14)$$

где κ – итерационный параметр. В самом деле, из (2.11) и (2.14) следует, что \mathbb{S} отличается от \mathbb{B} так же, как $BA^{-1}B^T$ отличается от тождественного оператора E . На самом деле имеет место следующая последовательность неравенств. Прежде всего, предположим, что матрица A спектрально эквивалентна конечно-элементной дискретизации C_0 дифференциального оператора Лапласа, взятого с обратным знаком. Эта эквивалентность

$$c_1 C_0 \leq A \leq c_2 C_0, \tag{2.15}$$

подробно записывается в виде неравенств

$$\begin{aligned} 0 < c_1 \int_V (\nabla \mathbf{w})^T : \nabla \mathbf{w} dV &\leq \int_V (\nabla \mathbf{w} : \mathbf{C}^d : \nabla \mathbf{w} + \boldsymbol{\sigma}^{eff} : [(\nabla \mathbf{w})^T \cdot \nabla \mathbf{w}]) dV \leq \\ &\leq c_2 \int_V (\nabla \mathbf{w})^T : \nabla \mathbf{w} dV, \end{aligned}$$

которые предположительно выполняются для любой функции \mathbf{w} при текущих значениях \mathbf{C}^d и $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$. Эти неравенства обеспечивают единственность решения для дифференциала вектора перемещения в данный момент процесса деформирования.

Запишем неравенства (2.15) в терминах обратных матриц A^{-1} и C_0^{-1}

$$\frac{1}{c_2} C_0^{-1} \leq A^{-1} \leq \frac{1}{c_1} C_0^{-1}. \tag{2.16}$$

Спектральная эквивалентность $BC_0^{-1}B^T$ тождественному оператору E означает

$$0 < mE \leq BC_0^{-1}B^T \leq E. \tag{2.17}$$

Тогда из (2.16) и (2.17) следует

$$\frac{m}{c_2} E \leq BA^{-1}B^T \leq \frac{1}{c_1} E. \tag{2.18}$$

Наконец, объединяя неравенства (2.18) с определениями \mathbb{S} (2.11) и \mathbb{B} (2.14), приходим к неравенствам

$$\min \left\{ \frac{m}{\kappa c_2}, 1 \right\} \mathbb{B} \leq \mathbb{S} \leq \max \left\{ \frac{1}{\kappa c_1}, 1 \right\} \mathbb{B}, \tag{2.19}$$

что означает спектральную эквивалентность \mathbb{S} и \mathbb{B} в виде (2.13) с оценками

$$\gamma_1 = \min \left\{ \frac{m}{\kappa c_2}, 1 \right\}, \quad \gamma_2 = \max \left\{ \frac{1}{\kappa c_1}, 1 \right\}. \tag{2.20}$$

Важно подчеркнуть, что скорость сходимости любого итерационного процесса определяется соотношением γ_1/γ_2 . Это означает, что скорость не зависит от шага τ по времени и коэффициента проницаемости k .

Далее мы опишем всю итерационную схему на каждом временном шаге для удобства в терминах дифференциальных операторов. Алгоритм разделен на две части в соответствии с физическими процессами, как указано выше. Итерационный метод становится двухуровневым методом. Внутренняя итерационная процедура представляет собой описанный выше метод типа Удзавы, предложенный для задачи фильтрации в [12,27]

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{C}^d(\hat{\mathbf{u}}^{m-1}) : \operatorname{grad} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{m,s}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^{eff}(\hat{\mathbf{u}}^{m-1}) \cdot \operatorname{grad} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{m,s-1}) + \\ + \rho^{m-1} \Delta \mathbf{f} = \alpha(n^{m-1}) \operatorname{grad} \Delta \hat{p}^{m,s-1} \\ -n^{m-1} \operatorname{div} \left(\frac{k(n^{m-1})}{n^{m-1} \mu_f} \nabla (\hat{p}^{m-1} + \Delta \hat{p}^{m,s}) \right) = \nabla \cdot \frac{\Delta \hat{\mathbf{u}}^{m,s}}{\Delta t} + n \beta_f \frac{\Delta \hat{p}^{m,s}}{\Delta t} \end{array} \right.$$

Здесь m и s – номер шага по времени и номер внутренней итерации соответственно. Это итерационный процесс внутреннего уровня.

Внешний процесс заключается в уточнении пористости и перемещений по неявному методу Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n^{m,r}}{\Delta t} &= (1 - n^{m,r}) \nabla \cdot \frac{\Delta \mathbf{u}^{m,r-1}}{\Delta t}, \quad \rho^{m,r} = (1 - n^{m,r}) \rho_s + n^{m,r} \rho_f, \\ \operatorname{div}(\mathbf{C}^d(\hat{\mathbf{u}}^{m,r-1}) : \operatorname{grad} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{m,r}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^{eff}(\hat{\mathbf{u}}^{m,r-1}) \cdot \operatorname{grad} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{m,r}) + \rho^{m,r} \Delta \mathbf{f} &= \\ &= \alpha(n^{m,r}) \operatorname{grad} \Delta \hat{p}^m, \end{aligned}$$

где r – номер внешней итерации.

Предложенная модель была реализована в собственном программном коде и использовалась для моделирования упругопластического деформирования водонасыщенного грунта под нагрузкой при оттоке жидкости и гиперупругого деформирования биологического материала, насыщенного кровью или плазмой [19-23].

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Проанализируем результаты вычислительных экспериментов решения линейной задачи, выполненных для подтверждения приведенной выше теоретической скорости сходимости. В соответствии с развитой в предыдущем разделе теории скорость сходимости определяется отношением γ_1/γ_2 . Согласно (2.19), (2.20), она не зависит от коэффициента проницаемости k и шага дискретизации τ .

Были произведены вычислительные тесты для оценки предложенного предобуславливателя \mathbb{B} . Проводилось сравнение $\mathbb{B} = \frac{\kappa}{\tau} \mathbf{E} + \mathbf{C}$ с $\mathbb{B} = \mathbf{C}$.

Последний случай соответствует $\kappa = 0$. Решалась задача о вдавлении штампа. Выбирались следующие параметры сетки: A1 – 11x11x11, A2 – 21x21x21, A3 – 31x31x31, A4 – 41x41x41. Самая мелкая конечно-элементная (КЭ) сетка (41x41x41) изображена на рис.3.1 (слева – недеформированная, справа – деформированная). Точность, определяющая сходимость итераций, равна $\varepsilon = 0.00001$.

В таблице 3.1 приведено число итераций, достаточных для достижения точности ε при итерационном параметре $\kappa = 0$ для разных значений коэффициента проницаемости k . Расчеты проводились на конечно-элементной сетке A1 (11x11x11) для шага дискретизации по времени $\tau = 0.5$, коэффициента Пуассона $\nu = 0.4$, объемного модуля $K = 1$ (все используемые параметры задачи – безразмерные величины). Видно, что при уменьшении коэффициента проницаемости k сходимость нарушается.

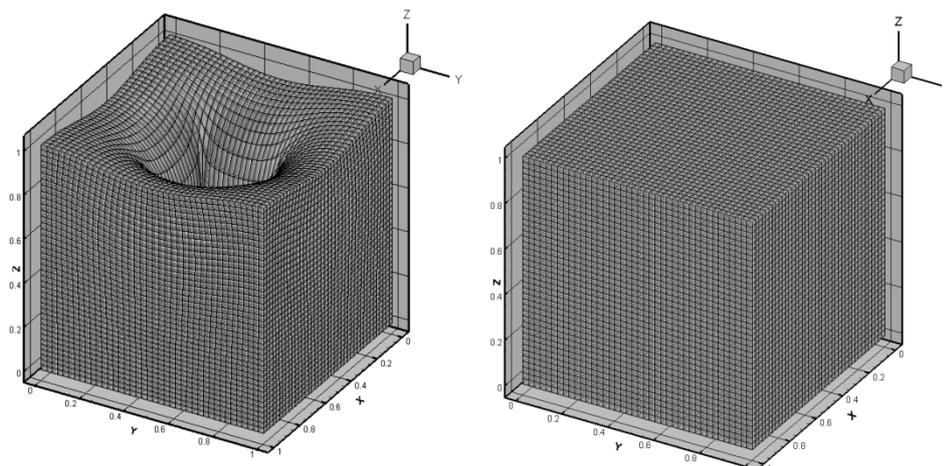


Рис.3.1. Конечно-элементная сетка 41x41x41.

Таблица 3.1.

КЭ сетка A1, $\kappa = 0$, $\tau = 0.5$, $\nu = 0.4$, $K = 1$					
k	100	10	1	0.1	0.01
Число итераций	9	9	33	нет сходимости	нет сходимости

В таблице 3.2 аналогично приведено достаточное для достижения точности ε число итераций при итерационном параметре $\kappa = 0.5$ для разных значений коэффициента проницаемости k и разных КЭ сеток. Можно заметить (табл.3.2), что при уменьшении коэффициента проницаемости k сходимость также нарушается, но для значительно меньшего значения k . Для $k > 0.1$ сходимость итераций имеет место и скорость сходимости почти не зависит от коэффициента проницаемости k . Нарушение сходимости при малых $k < 0.1$ может быть вызвано влиянием ошибок округления при решении линейных систем прямым методом. Таким образом, в целом подтверждается теоретический вывод, что сходимость не зависит от коэффициента проницаемости k .

В таблице 3.2 также видно, что сходимость слабо зависит от шагов сетки по координатам.

Таблица 3.2.

$\kappa = 0.5$, $\tau = 0.5$, $\nu = 0.4$, $K = 1$					
КЭ сетки \ k	100	10	1	0.1	0.01
A1	9	9	9	11	нет сходимости
A2			9	10	
A3			13	14	
A4		9	16	16	

Таблица 3.3 демонстрирует, что скорость сходимости не зависит от шага по времени τ : число итераций, достаточное для достижения точности ε , почти одинаковое для различных значений τ .

Таблица 3.3.

КЭ сетка A1, $\kappa = 0.5$, $k = 0.1$, $\nu = 0.4$, $K = 1$			
τ	0.5	5	50
Число итераций	9	9	8

Таким образом, сходимость слабо зависит от шагов сетки по координатам и по времени. Правда, последнее верно, если шаг по времени τ больше некоторого предельного значения. Таблица 3.4 дополнительно подтверждает, что сходимость зависит от произведения $k\tau$, если оно слишком мало (при $\tau = 5$, $k = 0.01$ сходимость отсутствует).

Таблица 3.4.

КЭ сетка A1, $\kappa = 0.5$, $\nu = 0.3$, $K = 1$		
$\tau \backslash k$	0.1	0.01
50	6	16
5	16	>100

В таблице 3.5 показана зависимость скорости сходимости от объемного модуля K . Ясно видно, что с ростом объемного модуля K сходимость ухудшается.

Таблица 3.5.

КЭ сетка A1, $\kappa = 0.5$, $\tau = 0.5$, $k = 0.1$, $\nu = 0.4$			
K	1	10	100
Число итераций	11	45	>100

Таблица 3.6 показывает сильную зависимость скорости сходимости от коэффициента Пуассона ν . При значении параметров $k = 0.1$, $\kappa = 0.5$, $\tau = 0.5$ для $\nu = 0.32$ сходимость отсутствует. Однако оказывается, что сходимость улучшается с увеличением шага по времени τ .

Таблица 3.6.

КЭ сетка A1, $\kappa = 0.5$, $\tau = 0.5$, $k = 0.1$, $K = 1$			
ν	0.4	0.35	0.32
Число итераций	9	25	>100

Из таблицы 3.7 видно, что при увеличении шага τ в десять раз сходимость имеет место быть для $\nu = 0.3$ при итерационном параметре $\kappa = 0.5$. Однако при $\kappa = 0$ сходимости, конечно, нет.

Таблица 3.7.

КЭ сетка A1, $\tau = 5$, $k = 0.1$, $K = 1$, $\nu = 0.3$		
κ	0.5	0
Число итераций	16	>100

В результате проведенного анализа вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что улучшенный предобуславливатель $\mathbb{B} = \frac{\kappa}{\tau} \mathbb{E} + C$ действительно улучшает сходимость (по сравнению с $\mathbb{B} = C$). Также можно заметить,

что расчеты подтверждают теорию, но и добавляют различные аспекты относительно характера сходимости, не улавливаемые теоретическим рассмотрением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена физически и геометрически нелинейная связанная формулировка задачи консолидации в скоростях. Для численного решения нелинейной задачи консолидации использовалась линеаризованная вариационная постановка. Связывание уравнений деформирования скелета грунта и фильтрации жидкости осуществляется методом Узавы. Постановка численно реализована в виде собственной компьютерной программы.

Теоретически исследована зависимость скорость сходимости итерационного процесса от выбора предобуславливателя. Показано, что предобуславливатель улучшает сходимость. Вычислительные эксперименты решения линейной задачи подтвердили результаты теоретического исследования скорости сходимости. Показано, что сходимость слабо зависит от шагов сетки по координатам и по времени (если шаг по времени больше некоторого предельного значения). В целом подтверждается теоретический вывод, что сходимость не зависит от коэффициента проницаемости. Нарушение сходимости при малых значениях коэффициента проницаемости может быть вызвано влиянием ошибок округления при решении линейных систем прямым методом. Закономерно сходимость сильно зависит от объемного модуля и коэффициента Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. *General theory of three-dimensional consolidation* // J. Appl. Phys. – 1941. – Vol.12. – No.2. – Pp.155-164.
2. Biot M.A. *General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material* // J. Appl. Mech., Trans. ASME. – 1956. – Vol.23. – No.1. – Pp.91-96.
3. Gambolati G. *Numerical models in land subsidence control* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1975. – No.5. – Pp.227-237.
4. Ferronato M., Castelletto N., Gambolati G. *A fully coupled 3-D mixed finite element model of Biot consolidation* // Journal of Computational Physics. – 2010. – Vol.229. – Pp.4813-4830.
5. Carter J.P., Booker J.R., Davis E.H. *Finite deformation of an elasto-plastic soil* // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 1977. – Vol.1. – Pp.25-43.
6. Borja R.I., Alarcón E. *A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation. Part 1: Balance laws, variational formulation, and linearization* // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1995. – Vol.122. – Pp.145-171.
7. Borja R.I., Tamagnini C., Alarcón E. *Elastoplastic consolidation at finite strain. Part 2: Finite element implementation and numerical examples* // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1998. – Vol.159. – Pp.103-122.
8. Liu Z., Liu R. *A fully implicit and consistent finite element framework for modeling reservoir compaction with large deformation and nonlinear flow model. Part I: Theory and formulation* // Comput. Geosci. – 2018. – Vol.22. – Iss.3. – Pp.623-637.
9. Liu Z., Liu R. *A fully implicit and consistent finite element framework for modeling reservoir compaction with large deformation and nonlinear flow model. Part II:*

- verification and numerical example // Comput. Geosci. – 2018. – Vol.22. – Iss.3. – Pp.639-656.*
10. Какушев Э.Р. *Численное решение связанных трехмерных краевых задач упругой пористой среды / Дисс. соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. – Москва, 2013. – 111 с.*
 11. Шешенин С.В., Киселев Ф.Б. *О численной реализации модели Био // Вестник ПГТУ. Математическое моделирование систем и процессов. – 1995. – №3. – С.101-106.*
 12. Киселев Ф.Б., Шешенин С.В. *Разностная схема для задачи нестационарной фильтрации в слоистых грунтах // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – №4. – С.129-135.*
 13. Jeannin L., Mainguy M., Masson R., Vidal-Gilbert S. *Accelerating the convergence of coupled geomechanical-reservoir simulations // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 2006. – Vol.31. – Iss.10. – Pp.1163-1181.*
 14. Dean R.H., Gai X., Stone C.M., Minkoff S.E. *A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics // SPE J. – 2006. – Vol.11. – Pp.132-140.*
 15. Wheeler M.F., Gai X. *Iteratively coupled mixed and Galerkin finite element methods for poro-elasticity // Numer. Meth. Partial Differ. Eqs. – 2007. – Vol.23. – Iss.4. – Pp.785-797.*
 16. Kim J., Tchelepı H.A., Juanes R. *Stability, accuracy, and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics // SPE J. – 2011. – Vol.16. – Pp.249-262.*
 17. Reed M.B. *An investigation of numerical errors in the analysis of consolidation by finite elements // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 1984. – Vol.8. – Pp.243-257.*
 18. Быченков Ю.В., Чижонков Е.В. *Итерационные методы решения седловых задач. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 349 с.*
 19. Артамонова Н.Б., Шешенин С.В. *Связанная задача консолидации в нелинейной постановке. Теория и метод решения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.122-138.*
 20. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б. *Моделирование нелинейной связанной задачи консолидации // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №3. – С.341-361.*
 21. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б. *Моделирование нелинейной консолидации пористых сред // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – №1. – С.167-176.*
 22. Artamonova N.B., Sheshenin S.V. *Finite element implementation of a geometrically and physically non-linear consolidation model // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2022. – Pp.1-18.*
 23. Artamonova N.B., Sheshenin S.V. *A coupled nonlinear model of Biot consolidation // AIP Conference Proceedings. – 2023. – Vol.2627. – Iss.1. – Pp.050001-1-050001-5.*
 24. Donea J., Huerta A. *Finite element methods for flow problems. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2003. – 358 p.*
 25. Brezzi F., Fortin M. *Mixed and hybrid finite element methods. – New York: Springer-Verlag, 1991. – 223 p.*
 26. D'yakonov E.G. *Optimization in solving elliptic problems. – Boca Raton: CRC-Press, 1996. – 562 p.*

27. Шешенин С.В., Киселев Ф.Б., Артамонова Н.Б. *Неявные численные схемы в задачах фильтрации в пористых средах* // Вестник МГСУ. – 2011. – №6. – С.312-317.

REFERENCES

1. Biot M.A. *General theory of three-dimensional consolidation*. J. Appl. Phys., 1941, Vol.12, No.2, Pp.155-164.
2. Biot M.A. *General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material*. J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1956, Vol.23, No.1, Pp.91-96.
3. Gambolati G. *Numerical models in land subsidence control*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1975, No.5, Pp.227-237.
4. Ferronato M., Castelletto N., Gambolati G. *A fully coupled 3-D mixed finite element model of Biot consolidation*. Journal of Computational Physics, 2010, Vol.229, Pp.4813-4830.
5. Carter J.P., Booker J.R., Davis E.H. *Finite deformation of an elasto-plastic soil*. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 1977, Vol.1, Pp.25-43.
6. Borja R.I., Alarcón E. *A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation. Part I: Balance laws, variational formulation, and linearization*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 1995, Vol.122, Pp.145-171.
7. Borja R.I., Tamagnini C., Alarcón E. *Elastoplastic consolidation at finite strain. Part 2: Finite element implementation and numerical examples*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 1998, Vol.159, Pp.103-122.
8. Liu Z., Liu R. *A fully implicit and consistent finite element framework for modeling reservoir compaction with large deformation and nonlinear flow model. Part I: theory and formulation*. Comput. Geosci., 2018, Vol.22, Iss.3, Pp.623-637.
9. Liu Z., Liu R. *A fully implicit and consistent finite element framework for modeling reservoir compaction with large deformation and nonlinear flow model. Part II: verification and numerical example*. Comput. Geosci., 2018, Vol.22, Iss.3, Pp.639-656.
10. Kakushev E.R. *Chislennoe reshenie svyazannykh trekhmernykh kraevykh zadach uprugoj poristoj sredy [Numerical solution of coupled three-dimensional boundary value problems of an elastic porous medium]*. Dissertatsiya soiskatelya uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk. Moskva, 2013, 111 p.
11. Sheshenin S.V., Kiselev F.B. *O chislennoy realizatsii modeli Biot [On the numerical implementation of the Biot model]*. Vestnik PGTU. Matematicheskoye modelirovaniye sistem i protsessov, 1995, No.3, Pp.101-106.
12. Kiselev F.B., Sheshenin S.V. *The difference scheme for the problem of nonstationary filtration in layered soils*. Mech. Solids, 1996, Vol.31, No.4.
13. Jeannin L., Mainguy M., Masson R., Vidal-Gilbert S. *Accelerating the convergence of coupled geomechanical-reservoir simulations*. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 2006, Vol.31, Iss.10, Pp.1163-1181.
14. Dean R.H., Gai X., Stone C.M., Minkoff S.E. *A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics*. SPE J., 2006, Vol.11, Pp.132-140.
15. Wheeler M.F., Gai X. *Iteratively coupled mixed and Galerkin finite element methods for poro-elasticity*. Numer. Meth. Partial Differ. Eqs., 2007, Vol.23, Iss.4, Pp.785-797.
16. Kim J., Tchelepi H.A., Juanes R. *Stability, accuracy, and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics*. SPE J., 2011, Vol.16, Pp.249-262.

17. Reed M.B. *An investigation of numerical errors in the analysis of consolidation by finite elements*. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 1984, Vol.8, Pp.243-257.
18. Bychenkov YU.V., Chizhonkov Ye.V. *Iteratsionnye metody resheniya sedlovykh zadach [Iterative methods for solving saddle problems]*. Moskva, BINOM, Laboratoriya znaniy, 2014, 349 p.
19. Artamonova N.B., Sheshenin S.V. *Svyazannaya zadacha konsolidatsii v nelineynoy postanovke. Teoriya i metod resheniya [A coupled consolidation problem in a nonlinear formulation. Theory and method of solution]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.1, Pp.122-138.
20. Sheshenin S.V., Artamonova N.B. *Modelirovaniye nelineynoy svyazannoy zadachi konsolidatsii [Modeling a nonlinear coupled consolidation problem]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.3, Pp.341-361.
21. Sheshenin S.V., Artamonova N.B. *The simulation of the nonlinear consolidation of porous media*. PNRPU Mechanics Bulletin, 2022, Vol.2022, No.1, Pp.167-176.
22. Artamonova N.B., Sheshenin S.V. *Finite element implementation of a geometrically and physically non-linear consolidation model*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2022, Pp.1-18.
23. Artamonova N.B., Sheshenin S.V. *A coupled nonlinear model of Biot consolidation*. AIP Conference Proceedings, 2023, Vol.2627, Iss.1, Pp.050001-1-050001-5.
24. Donea J., Huerta A. *Finite element methods for flow problems*. Chichester, John Wiley & Sons Ltd, 2003, 358 p.
25. Brezzi F., Fortin M. *Mixed and hybrid finite element methods*. New York, Springer-Verlag, 1991, 223 p.
26. D'yakonov E.G. *Optimization in solving elliptic problems*. Boca Raton, CRC-Press, 1996, 562 p.
27. Sheshenin S.V., Kiselev F.B., Artamonova N.B. *Neyavnye chislennye skhemy v zadachakh fil'tratsii v poristyykh sredakh [Implicit numerical schemes in filtration problems in porous media]*. Vestnik MGSU, 2011, No.6, Pp.312-317.

Поступила в редакцию 23 марта 2023 года.

Сведения об авторах:

Артамонова Нина Брониславовна – к.ф.-м.н., к.г.-м.н., с.н.с., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: artamonovanb@mail.ru

Шешенин Сергей Владимирович – д.ф.-м.н., проф., проф., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: sergey.sheshenin@mail.ru