

УДК 534.1:534.16  
EDN APLDYI (<https://elibrary.ru/apldyi>)  
DOI 10.33113/mkmk.ras.2023.29.03.01



## УТОЧНЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ ПРИ ТОРЦЕВОМ НАГРУЖЕНИИ УЧАСТКА ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ НА ОДНОЙ ИЗ ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ\*

Паймушин В.Н.<sup>1,2</sup>, Шишкин В.М.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», г. Казань, Россия

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», г. Казань, Россия

<sup>3</sup>ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров, Россия

### АННОТАЦИЯ

Решается задача о вынужденных изгибных колебаниях стержня-полосы, имеющего не закрепленную консольную часть и участок закрепления конечной длины на одной из лицевых поверхностей. Предполагается, что на торце закрепленного участка приложена изменяющаяся по гармоническому закону осевая сила. Для описания процесса деформирования незакрепленной части стержня используется классическая модель Кирхгофа-Лява при учете геометрической нелинейности при определении осевых деформаций. Деформирование закрепленной части стержня описывается уточненной сдвиговой моделью С.П. Тимошенко с учетом деформаций поперечного обжатия, трансформированная в другую модель за счет учета наличия неподвижного участка закрепления. Сформулированы условия кинематического сопряжения незакрепленной и закрепленной частей стержня, при учете которых, исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, получены уравнения движения, соответствующие им граничные условия, а также силовые условия сопряжения введенных в рассмотрение участков стержня. Построены точные аналитические решения полученных уравнений движения закрепленной и незакрепленной частей стержня при действии гармонической силы на торце с определением постоянных интегрирования из системы нелинейных уравнений, решаемых итерационным методом Ньютона. Проведены численные эксперименты по исследованию прохождения вибраций через участок закрепления при резонансных колебаниях по двум нижшим собственным формам стержней, выполненных из дюралюминия марки Д16АТ и однонаправленного волокнистого композита на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118. Выявлен эффект заметного возрастания амплитуд колебаний концов консольных частей отмеченных стержней за счет поперечного обжатия закрепленного участка по сравнению с результатами, полученными без учета его поперечного обжатия.

**Ключевые слова:** вынужденные колебания; участок закрепления конечной длины; уравнения движения; поперечное обжатие; геометрическая нелинейность

### A REFINED STUDY OF FORCED BENDING VIBRATIONS OF A SEMI-FINITE BEAM UNDER END LOADING OF A FINITE LENGTH FIXING SECTION ON ONE OF THE FACE SURFACES

\* Работа выполнена в рамках гранта Российского научного фонда (проект №23-19-00021).

Paimushin V.N.<sup>1,2</sup>, Shishkin V.M.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Kazan National Research Technical University, Kazan, Russia*

<sup>2</sup>*Kazan Federal (Privolzhsky) University, Kazan, Russia*

<sup>3</sup>*Vyatka State University, Kirov, Russia*

## ABSTRACT

The problem of forced bending vibrations of a semi-finite beam with an unfixed cantilever part and a fixed length section on one of the front surfaces is solved. It is assumed that an axial force that varies according to the harmonic law is applied at the end face of the fixed section. To describe the process of deformation of the free part of the beam, the classical Kirchhoff-Love model is used, taking into account geometric nonlinearity when determining axial strain. The deformation of the fixed part of the beam is described by the refined shear model of S.P. Timoshenko, taking into account the strain of the transverse compression, transformed into another model by taking into account the presence of a fixed section of the fastening. The conditions for kinematic conjugation of the free and fixed parts of the beam are formulated, taking into account which, based on the variational principle of Hamilton-Ostrogradsky, the equations of motion, the corresponding boundary conditions, as well as the force conditions for conjugation of the sections of the beam introduced into consideration are obtained. Exact analytical solutions of the obtained equations of motion of the fixed and free parts of the beam under the harmonic force at the end are constructed with the determination of the integration constants from the system of nonlinear equations solved by Newton's iterative method. Numerical experiments have been carried out to study the passage of vibrations through the fastening section at resonant vibrations along two lower natural forms of beam made of D16AT grade duralumin and a unidirectional fibrous composite based on ELUR-P carbon fiber and KhT-118 binder. The effect of a noticeable increase in the amplitudes of oscillations of the ends of the cantilever parts of the beams due to the transverse compression of the fixed section in comparison with the results obtained without taking into account its transverse compression is revealed.

**Keywords:** forced vibrations; the fixing area of finite length; equations of motion; transverse compression; geometric nonlinearity

## ВВЕДЕНИЕ

При постановке и решении задач механики деформирования тонкостенных элементов конструкций реальные условия их закрепления на опорных элементах конечных размеров обычно заменяют условиями шарнирного опирания или жесткого защемления, что, безусловно, вносит погрешность в решениях данных задач. Так, например, теоретическое исследование наблюдаемого в экспериментах явления прохождения вибраций через участки закрепления конечных размеров в многоопорных неразрезных балках [1] требует обязательного учета деформативности данных участков. При этом предполагается, что прохождение изгибных колебаний через участок закрепления конечной длины осуществляется за счет трансформации изгибного напряженно-деформированного состояния динамически нагруженного участка стержня в продольно-поперечно-сдвиговые формы колебаний участка закрепления с последующей их ретрансформацией в изгибные колебания соседнего участка.

Вопросам вибрационного нагружения тонкостенных каркасированных конструкций уделяется значительное внимание в научной литературе [2-6 и др.]. Однако необходимо отметить, что при этом практически не уделяется должного

внимания проблемам формулировки граничных условий при тех или иных вариантах соединении стержневых элементов каркаса с тонкостенными элементами конструкций или их закрепления на жестких опорных элементах. Так, например, при постановке и решении задач механики деформирования стержней (особенно выполненных из волокнистых композитных материалов) реальные условия закрепления их концевых участков, имеющих конечную длину, обычно, заменяют или условиями шарнирного опирания, или защемления, что, может качественно менять напряженно-деформированное состояние конструкции в случае вибрационного нагружения.

Следует отметить, что соединение тонкостенных элементов каркаса с другими элементами конструкции, обычно, осуществляется внахлест, т.е. по одной из лицевых поверхностей. Особенно это характерно для тонкостенных элементов, выполненных из композитных материалов. Имеющиеся теоретические исследования динамического деформирования тонкостенных элементов конструкций с учетом податливости участков закрепления конечной длины на одной из лицевых поверхностей ограничиваются лишь авторскими работами [7-9], в которых для описания процессов деформирования таких элементов (плоских стержней) используется сдвиговая модель С.П. Тимошенко, основанная на линейной аппроксимации тангенциальных перемещений по поперечной координате, когда прогиб считается независимым от этой координаты. Однако, как было установлено проведенными численными экспериментами, явление прохождения вибраций через участок закрепления конечной длины при использовании модели [7-9] теоретическим путем удастся выявить лишь в стержнях, выполненных из однонаправленно армированных волокнистых композитных материалов, характеризующихся низкой жесткостью на сдвиг, а в стержнях из металлических конструкционных материалов отмеченное явление удастся выявить лишь в случае весьма малой длины закрепленного участка.

В настоящей статье проведено исследование задачи о прохождении колебаний в незакрепленную консольную часть стержня-полосы от участка его закрепления, имеющего конечную длину на одной из лицевых поверхностей, при действии гармонической возмущающей силы на торце закрепленного участка. Предполагается, что возбуждение изгибных колебаний консольной части стержня осуществляется за счет трансформации возбуждаемых на участке закрепления стержня-полосы продольных, продольно-поперечно-сдвиговых и изгибных колебаний. В отличие от упомянутых работ [7-9], для описания процесса деформирования закрепленной части предлагается использовать уточненную модель С.П. Тимошенко с учетом поперечного обжатия, трансформирующуюся в другую модель за счет учета наличия в ней неподвижного участка закрепления, а для описания процесса деформирования консольной части – модели Кирхгофа-Лява с учетом геометрической нелинейности при определении осевых деформаций.

## 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим стержень-полосу 1, закрепленный на абсолютно жестком опорном элементе 2 по поверхности  $z = -t/2$  и нагруженный торцевой осевой силой  $P = P(\tau)$ , зависящей от времени  $\tau$  (рис.1). Материал стержня считается ортотропным с модулями упругости  $E_1, E_3, G_{13}$  при деформировании его

соответственно в направлениях осей  $0x$ ,  $0z$  и при сдвиге в плоскости  $0xz$ .

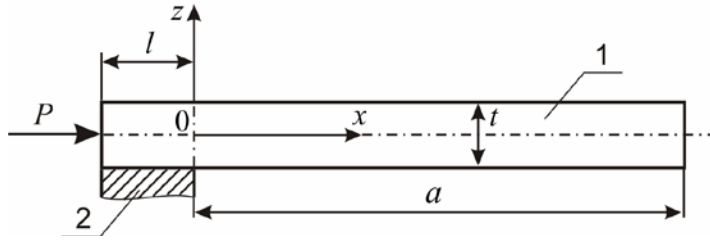


Рис.1. Схема закрепления стержня-полосы и его внешнего нагружения.

Процесс деформирования консольной части стержня длиной  $a$  будем описывать классической моделью Кирхгофа-Лява, в соответствии с которой для перемещений  $U$  и  $W$  произвольной точки поперечного сечения примем представления

$$U = u - zw_{,x}, \quad W = w, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (1)$$

где  $u$ ,  $w$  – соответственно осевое перемещение и прогиб осевой линии  $0x$  (нижний индекс  $x$  после запятой в (1) и далее означает дифференцирование по координате  $x$ ). При среднем изгибе стержня представлениям (1) соответствуют в геометрически нелинейном квадратичном приближении осевые деформации

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 - zw_{,xx}, \quad 0 \leq x \leq a$$

и вариация потенциальной энергии деформации

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_0^a \left[ T_x (\delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) - M_x \delta w_{,xx} \right] dx = \\ &= \left[ T_x \delta u - M_x \delta w_{,x} + (Q_z + T_x w_{,x}) \delta w \right] \Big|_{x=0}^{x=a} - \\ &- \int_0^a \left[ T_{x,x} \delta u + (Q_z + T_x w_{,x})_{,x} \delta w \right] dx, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$T_x = B \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right), \quad M_x = -D w_{,xx}, \quad (3)$$

$$Q_z = M_{x,x} = -D w_{,xxx}, \quad B = E_1 t, \quad D = E_1 t^3 / 12 E_1.$$

Процесс деформирования стержня на закрепленном участке  $-l \leq x \leq 0$  описать моделью (1) невозможно. Поэтому, в отличие от (1), для перемещений  $U_0$  и  $W_0$  точек закрепленного участка примем аппроксимации, построенные на основе модели С.П. Тимошенко с учетом поперечного обжатия данного участка

$$U_0 = u_0 + z\gamma_0; \quad W_0 = w_0 + z\varphi_0; \quad -l \leq x \leq 0; \quad -t/2 \leq z \leq t/2. \quad (4)$$

Здесь  $u_0$ ,  $w_0$  – соответственно осевые перемещения и прогибы линии  $0x$ ,  $\gamma_0$  – угол поворота поперечного сечения и  $\varphi_0$  – функция, учитывающая поперечное обжатие закрепленного участка.

Если на участке закрепления  $-l \leq x \leq 0$  в точках граничной плоскости  $z = -t/2$  на перемещения  $U_0$  и  $W_0$  наложить ограничения  $U_0(x, z = -t/2) = 0$ ,  $W_0(x, z = -t/2) = 0$ , то из (4) следуют зависимости

$$\gamma_0 = \frac{2}{t} u_0, \quad \varphi_0 = \frac{2}{t} w_0,$$

в силу которых приходим к представлениям

$$U_0 = \left(1 + \frac{2z}{t}\right) u_0, \quad W_0 = \left(1 + \frac{2z}{t}\right) w_0. \quad (5)$$

Им в геометрически линейном приближении отвечают деформации

$$\varepsilon_x^0 = \left(1 + \frac{2z}{t}\right) u_{0,x}, \quad \varepsilon_z^0 = \frac{2}{t} w_0, \quad \gamma_{xz}^0 = U_{0,z} + W_{0,x} = \frac{2}{t} u_0 + \left(1 + \frac{2z}{t}\right) w_{0,x}, \quad (6)$$

которым соответствуют нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_x^0 = \bar{E}_1 (\varepsilon_x^0 + \nu_{31} \varepsilon_z^0), \quad \sigma_z^0 = \bar{E}_3 (\varepsilon_z^0 + \nu_{13} \varepsilon_x^0), \quad \sigma_{xz}^0 = G_{13} \gamma_{xz}^0. \quad (7)$$

Здесь приняты обозначения

$$\bar{E}_1 = E_1 / (1 - \nu_{13} \nu_{31}), \quad \bar{E}_3 = E_3 / (1 - \nu_{13} \nu_{31}), \quad E_1 \nu_{31} = E_3 \nu_{13},$$

содержащие коэффициенты Пуассона  $\nu_{13}, \nu_{31}$ . С учетом (6) выражения (7) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= \bar{E}_1 \left[ \left(1 + \frac{2z}{t}\right) u_{0,x} + \frac{2\nu_{31}}{t} w_0 \right], \quad \sigma_z^0 = \bar{E}_3 \left[ \frac{2}{t} w_0 + \nu_{13} \left(1 + \frac{2z}{t}\right) u_{0,x} \right], \\ \sigma_{xz}^0 &= G_{13} \left[ \left(1 + \frac{2z}{t}\right) w_{0,x} + \frac{2}{t} u_0 \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

На участке закрепления вариация потенциальной энергии деформации будет определяться выражением

$$\begin{aligned} \delta\Pi_0 &= \int_{-l}^0 \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^0 \delta\varepsilon_x^0 + \sigma_z^0 \delta\varepsilon_z^0 + \sigma_{xz}^0 \delta\gamma_{xz}^0) dx dz = \\ &= \int_{-l}^0 (T_x^0 \delta u_{0,x} + T_z^0 \delta w_0 + N_{xz}^0 \delta w_{0,x} + T_{xz}^0 \delta u_0) dx = \\ &= (T_x^0 \delta u_0 + N_{xz}^0 \delta w_0) \Big|_{x=-l}^{x=0} - \int_{-l}^0 [(T_{x,x}^0 - T_{xz}^0) \delta u_0 + (N_{xz,x}^0 - T_z^0) \delta w_0] dx, \end{aligned} \quad (9)$$

откуда при использовании (7) и (8) приходим к соотношениям упругости

$$\begin{aligned} T_x^0 &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x^0 \left(1 + \frac{2z}{t}\right) dz = \bar{E}_1 \left( \frac{4t}{3} u_{0,x} + 2\nu_{31} w_0 \right), \\ T_z^0 &= \int_{-t/2}^{t/2} \frac{2}{t} \sigma_z^0 dz = \bar{E}_3 \left( \frac{4}{t} w_0 + 2\nu_{13} u_{0,x} \right), \\ N_{xz}^0 &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^0 \left(1 + \frac{2z}{t}\right) dz = G_{13} \left( \frac{4t}{3} w_{0,x} + 2u_0 \right), \\ T_{xz}^0 &= \int_{-t/2}^{t/2} \frac{2}{t} \sigma_{xz}^0 dz = 2G_{13} \left( w_{0,x} + \frac{2}{t} u_0 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Подчинив представления (1) и (5) условиям непрерывности перемещений стержня в сечении  $x=0$ , записываемого в виде  $U_0|_{x=0} = U|_{x=0}$ ,  $W_0|_{x=0} = W|_{x=0}$ , путем приравнивания соответствующих коэффициентов при одинаковых степенях  $z$  получим кинематические условия сопряжения участков

$$u|_{x=0} = u_0|_{x=0}, \quad w_{,x}|_{x=0} = -\frac{2}{t}u_0\Big|_{x=0}, \quad w|_{x=0} = w_0|_{x=0}. \quad (11)$$

## 2. ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СТЕРЖНЯ

При рассматриваемом виде нагружения вариация работы внешней силы  $P$ , приложенной в сечении  $x = -l$  закрепленной части стержня, определяется равенством

$$\delta A = P\delta u_0|_{x=-l}, \quad (12)$$

а для вариации работы инерционных сил соответствующие выражения запишем в приближении

$$\delta K_0 = -\int_{-l}^0 \frac{4\rho t}{3} \ddot{u}_0 \delta u_0 dx - \int_{-l}^0 \frac{4\rho t}{3} \ddot{w}_0 \delta w_0 dx, \quad \delta K = -\int_0^a \rho t (\ddot{u} \delta u + \ddot{w} \delta w) dx. \quad (13)$$

Внося теперь составленные соотношения (2), (9), (12) и (13) в вариационное уравнение Гамильтона-Остроградского

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} (\delta \Pi + \delta \Pi_0 - \delta K - \delta K_0 - \delta A) d\tau = 0,$$

при использовании условий сопряжения (11) получим

$$\begin{aligned} & (T_x \delta u - M_x \delta w_{,x})|_{x=a} + (Q_z + T_x w_{,x}) \delta w|_{x=a} + \left( T_x^0 - T_x - \frac{2}{t} M_x \right) \delta u_0|_{x=0} + \\ & + (N_{xz}^0 - Q_z - T_x w_{,x}) \delta w_0|_{x=0} - (P + T_x^0) \delta u_0|_{x=-l} - N_{xz}^0 \delta w_0|_{x=-l} - \\ & - \int_{-l}^0 \left( T_{x,x}^0 - T_{xz}^0 - \frac{4\rho t}{3} \ddot{u}_0 \right) \delta u_0 dx - \int_{-l}^0 \left( N_{xz}^0 - T_z^0 - \frac{4\rho t}{3} \ddot{w}_0 \right) \delta w_0 dx - \\ & - \int_0^a (T_{x,x} - \rho t \ddot{u}) \delta u dx + \int_0^a \left[ (Q_z + T_x w_{,x})_{,x} - \rho t \ddot{w} \right] \delta w dx = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) в силу произвольности вариаций  $\delta u_0$ ,  $\delta u$ ,  $\delta w$ ,  $\delta w_0$  и  $\delta w_{,x}$  следуют:

– уравнения движения закрепленного участка

$$T_{x,x}^0 - T_{xz}^0 - \frac{4\rho t}{3} \ddot{u}_0 = 0, \quad N_{xz,x}^0 - T_z^0 - \frac{4\rho t}{3} \ddot{w}_0 = 0 \quad (15)$$

и граничные условия на конце  $x = -l$

$$T_x^0|_{x=-l} = -P, \quad N_{xz}^0|_{x=-l} = 0; \quad (16)$$

– уравнения движения консольной части стержня

$$T_{x,x} - \rho t \ddot{u} = 0, \quad (Q_z + T_x w_{,x})_{,x} - \rho t \ddot{w} = 0, \quad (17)$$

соответствующие им граничные условия на свободном крае  $x = a$

$$T_x = 0, \quad M_x = 0, \quad Q_z + T_x w_{,x} = 0, \quad (18)$$

а также силовые условия сопряжения участков в сечении  $x = 0$

$$\left( T_x^0 - T_x - \frac{2}{t} M_x \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (N_{xz}^0 - Q_z - T_x w_{,x}) \Big|_{x=0} = 0. \quad (19)$$

### 3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

При изгибных колебаниях стержня-полосы по первым низшим частотам в системе уравнений (17) и в соответствующих им граничных условиях (18) с большой степенью точности допустимо пренебречь подчеркнутыми слагаемыми (даже при  $w \gg t$ ), что позволяет при использовании (3) второе уравнение в (17) и последние два условия в (18) записать в упрощенном виде

$$w_{,xxxx} + \frac{\rho t}{D} \ddot{w} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (20)$$

$$w_{,xx}|_{x=0} = 0, \quad w_{,xxx}|_{x=a} = 0, \quad (21)$$

а первое уравнение системы (17), линеаризованное в окрестности решения уравнения (20), запишем в виде

$$u_{,xx} - \frac{\rho t}{B} \ddot{u} = -w_{,x} w_{,xx}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (22)$$

Предположим, что сила  $P(\tau)$  (рис.1) меняется по гармоническому закону

$$P = \tilde{P} e^{i\omega\tau}, \quad (23)$$

где  $i$  – мнимая единица,  $\omega$  – круговая частота. В соответствии с (23) решение уравнения (20) будем искать в виде

$$w(x, \tau) = \tilde{w}(x) e^{i\omega\tau}. \quad (24)$$

С учетом (24) уравнение (20) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно амплитуды  $\tilde{w}$

$$\tilde{w}_{,xxxx} - k_w^4 \tilde{w} = 0, \quad k_w^4 = \rho t \omega^2 / D,$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{w} = c_1 \sin(k_w x) + c_2 \cos(k_w x) + c_3 e^{k_w x} + c_4 e^{-k_w x}, \quad (25)$$

где  $c_1, \dots, c_4$  – постоянные интегрирования. Подчиняя решение (25) условиям (21), получаем уравнения

$$-c_1 \sin(k_w a) - c_2 \cos(k_w a) + c_3 e^{k_w a} + c_4 e^{-k_w a} = 0,$$

$$-c_1 \cos(k_w a) + c_2 \sin(k_w a) + c_3 e^{k_w a} - c_4 e^{-k_w a} = 0,$$

из которых следуют равенства

$$c_3 = c_1 q_1 + c_2 q_2, \quad c_4 = c_1 q_3 + c_2 q_4, \quad (26)$$

с обозначениями

$$q_1 = \frac{\sin(k_w a) + \cos(k_w a)}{2e^{k_w a}}, \quad q_2 = \frac{-\sin(k_w a) + \cos(k_w a)}{2e^{k_w a}},$$

$$q_3 = \frac{\sin(k_w a) - \cos(k_w a)}{2e^{-k_w a}}, \quad q_4 = \frac{\sin(k_w a) + \cos(k_w a)}{2e^{-k_w a}}.$$

Таким образом, из четырех постоянных интегрирования  $c_1, \dots, c_4$  остаются независимыми только постоянные  $c_1$  и  $c_2$ . Подстановка выражений (26) в (25) приводит к решению

$$\tilde{w} = F(x) c_1 + S(x) c_2, \quad (27)$$

где

$$F(x) = \sin(k_w x) + q_1 e^{k_w x} + q_3 e^{-k_w x}, \quad S(x) = \cos(k_w x) + q_2 e^{k_w x} + q_4 e^{-k_w x}.$$

Имея решение (27) и функции  $F(x)$ ,  $S(x)$ , найдем необходимые в дальнейшем производные  $\tilde{w}_{,x}$ ,  $\tilde{w}_{,xx}$  и  $\tilde{w}_{,xxx}$

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{,x} &= F_{,x}c_1 + S_{,x}c_2 = k_w [F_1(x)c_1 + S_1(x)c_2]; \\ \tilde{w}_{,xx} &= F_{,xx}c_1 + S_{,xx}c_2 = k_w^2 [F_2(x)c_1 + S_2(x)c_2]; \\ \tilde{w}_{,xxx} &= F_{,xxx}c_1 + S_{,xxx}c_2 = k_w^3 [F_3(x)c_1 + S_3(x)c_2].\end{aligned}\quad (28)$$

Здесь

$$\begin{aligned}F_1(x) &= F_{,x}/k_w = \cos(k_w x) + q_1 e^{k_w x} - q_3 e^{-k_w x}, \\ S_1(x) &= S_{,x}/k_w = -\sin(k_w x) + q_2 e^{k_w x} - q_4 e^{-k_w x}, \\ F_2(x) &= F_{,xx}/k_w^2 = -\sin(k_w x) + q_1 e^{k_w x} + q_3 e^{-k_w x}, \\ S_2(x) &= S_{,xx}/k_w^2 = -\cos(k_w x) + q_2 e^{k_w x} + q_4 e^{-k_w x}, \\ F_3(x) &= F_{,xxx}/k_w^3 = -\cos(k_w x) + q_1 e^{k_w x} - q_3 e^{-k_w x}, \\ S_3(x) &= S_{,xxx}/k_w^3 = \sin(k_w x) + q_2 e^{k_w x} - q_4 e^{-k_w x}.\end{aligned}$$

Изгибающие моменты в поперечных сечениях консольной части стержня определяются зависимостью  $M_x = -Dw_{,xx}$ , которая в соответствии с представлением (24) принимает вид

$$M_x = \tilde{M}_x e^{i\omega\tau} = -D\tilde{w}_{,xx} e^{i\omega\tau}. \quad (29)$$

Отсюда с учетом второго выражения в (28) следуют амплитуды изгибающих моментов

$$\tilde{M}_x = -Dk_w^2 [F_2(x)c_1 + S_2(x)c_2]. \quad (30)$$

Согласно представлению (24) уравнение (22) получается таким

$$u_{,xx} - \frac{\rho t \ddot{u}}{B} = -\tilde{w}_{,x} \tilde{w}_{,xx} e^{2i\omega\tau}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (31)$$

Решение уравнения (31) необходимо искать в виде

$$u(x, \tau) = \tilde{u}^{(1)} e^{i\omega\tau} + \tilde{u}^{(2)} e^{2i\omega\tau}, \quad (32)$$

который при подстановке в (31) приводит к уравнениям

$$\tilde{u}_{,xx}^{(1)} + k_{(1)}^2 \tilde{u}^{(1)} = 0, \quad \tilde{u}_{,xx}^{(2)} + k_{(2)}^2 \tilde{u}^{(2)} = -\tilde{w}_{,x} \tilde{w}_{,xx} \quad (33)$$

с коэффициентами

$$k_{(1)}^2 = \frac{\rho t \omega^2}{B}, \quad k_{(2)}^2 = \frac{4\rho t \omega^2}{B}.$$

С учетом (28) уравнения (33) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{,xx}^{(1)} + k_{(1)}^2 \tilde{u}^{(1)} &= 0, \\ \tilde{u}_{,xx}^{(2)} + k_{(2)}^2 \tilde{u}^{(2)} &= -k_w^3 [R_1(x)c_1^2 + R_2(x)c_1c_2 + R_3(x)c_2^2],\end{aligned}\quad (34)$$

где

$$R_1(x) = F_1(x)F_2(x), \quad R_2(x) = F_1(x)S_2(x) + F_2(x)S_1(x), \quad R_3(x) = S_1(x)S_2(x).$$

Уравнения (34) имеют решения



$$\begin{aligned}\tilde{u}^{(1)}(x) &= d_1^{(1)} \sin(k_{(1)}x) + d_2^{(1)} \cos(k_{(1)}x), \\ \tilde{u}^{(2)}(x) &= d_1^{(2)} \sin(k_{(2)}x) + d_2^{(2)} \cos(k_{(2)}x) - \\ &\quad - k_w^3 [f_1(x)c_1^2 + f_2(x)c_1c_2 + f_3(x)c_2^2].\end{aligned}\quad (35)$$

Здесь  $d_1^{(j)}$ ,  $d_2^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) – постоянные интегрирования,  $f_k(x)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – частные решения неоднородного дифференциального уравнения в (33) с соответствующими правыми частями  $R_k(x)$ , имеющие весьма громоздкий вид, для нахождения которых можно использовать режим символьных вычислений любого подходящего пакета компьютерной математики, например, MATLAB [10].

В соответствии с первым выражением в (3) и представлениями (24), (32) усилие  $T_x$  в консольной части стержня будет иметь вид

$$\begin{aligned}T_x &= B \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) = B \left[ \tilde{u}_{,x}^{(1)} e^{i\omega\tau} + \tilde{u}_{,x}^{(2)} e^{2i\omega\tau} + \frac{1}{2} \tilde{w}_{,x}^2 e^{2i\omega\tau} \right] = \\ &= \tilde{T}_x^{(1)} e^{i\omega\tau} + \tilde{T}_x^{(2)} e^{2i\omega\tau},\end{aligned}\quad (36)$$

где

$$\tilde{T}_x^{(1)} = B \tilde{u}_{,x}^{(1)}, \quad \tilde{T}_x^{(2)} = B \left( \tilde{u}_{,x}^{(2)} + \frac{1}{2} \tilde{w}_{,x}^2 \right).\quad (37)$$

С учетом полученных решений (35) и первого соотношения в (28) зависимости (37) принимают вид

$$\begin{aligned}\tilde{T}_x^{(1)} &= B k_{(1)} \left[ d_1^{(1)} \cos(k_{(1)}x) - d_2^{(1)} \sin(k_{(1)}x) \right], \\ \tilde{T}_x^{(2)} &= B k_{(2)} \left[ d_1^{(2)} \cos(k_{(2)}x) - d_2^{(2)} \sin(k_{(2)}x) \right] + \\ &\quad + B \left[ Q_1(x)c_1^2 + Q_2(x)c_1c_2 + Q_3(x)c_2^2 \right]\end{aligned}\quad (38)$$

с обозначениями

$$\begin{aligned}Q_1(x) &= -k_w^3 f_{1,x} + \frac{1}{2} k_w^2 F_1^2(x), \quad Q_2(x) = -k_w^3 f_{2,x} + k_w^2 F_1(x) S_1(x), \\ Q_3(x) &= -k_w^3 f_{3,x} + \frac{1}{2} k_w^2 S_1^2(x).\end{aligned}$$

В сечении  $x = a$  в силу первого соотношения в (18) и представления (36) должны быть выполнены условия

$$\tilde{T}_x^{(1)} \Big|_{x=a} = 0, \quad \tilde{T}_x^{(2)} \Big|_{x=a} = 0,$$

которые при подстановке в них зависимостей (38) дают два алгебраических уравнения

$$\begin{aligned}d_1^{(1)} \cos(k_{(1)}a) - d_2^{(1)} \sin(k_{(1)}a) &= 0; \\ k_{(2)} \left[ d_1^{(2)} \cos(k_{(2)}a) - d_2^{(2)} \sin(k_{(2)}a) \right] + \\ &\quad + Q_1(a)c_1^2 + Q_2(a)c_1c_2 + Q_3(a)c_2^2 = 0.\end{aligned}\quad (39)$$

Для корректного выполнения условий кинематического сопряжения (11) перемещения  $u_0(x, \tau)$  и  $w_0(x, \tau)$  закрепленной части стержня необходимо записать в виде, аналогичном представлению (32)

$$u_0(x, \tau) = \tilde{u}_0^{(1)}(x) e^{i\omega\tau} + \tilde{u}_0^{(2)}(x) e^{2i\omega\tau}, \quad w_0(x, \tau) = \tilde{w}_0^{(1)} e^{i\omega\tau} + \tilde{w}_0^{(2)} e^{2i\omega\tau}. \quad (40)$$

В этом случае уравнения (15) для отмеченной части стержня при использовании соотношений упругости (10) можно привести к виду

$$\tilde{u}_{0,xx}^{(k)} - r_0^{(k)} \tilde{u}_0^{(k)} - r_1 \tilde{w}_{0,x}^{(k)} = 0, \quad \tilde{w}_{0,xx}^{(k)} - r_2^{(k)} \tilde{w}_0^{(k)} - r_3 \tilde{u}_{0,x}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (41)$$

где введены в рассмотрение коэффициенты

$$r_0^{(1)} = \frac{3G_{13}}{\bar{E}_1 t^2} - \frac{\rho\omega^2}{\bar{E}_1}, \quad r_0^{(2)} = \frac{3G_{13}}{\bar{E}_1 t^2} - \frac{4\rho\omega^2}{\bar{E}_1}, \quad r_1 = \frac{3}{2t} \left( \frac{G_{13}}{\bar{E}_1} - \nu_{31} \right),$$

$$r_2^{(1)} = \frac{3\bar{E}_3}{G_{13} t^2} - \frac{\rho\omega^2}{G_{13}}, \quad r_2^{(2)} = \frac{3\bar{E}_3}{G_{13} t^2} - \frac{4\rho\omega^2}{G_{13}}, \quad r_3 = \frac{3}{2t} \left( \frac{\bar{E}_3 \nu_{13}}{G_{13}} - 1 \right).$$

Первые уравнения системы (41) тождественно удовлетворяются при введении в рассмотрение разрешающих функций  $\Phi^{(k)}$  вида

$$\tilde{u}_0^{(k)} = \Phi_{,x}^{(k)}, \quad \tilde{w}_0^{(k)} = -\frac{r_0^{(k)}}{r_1} \Phi^{(k)} + \frac{1}{r_1} \Phi_{,xx}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \quad (42)$$

а при подстановке зависимостей (42) во вторые уравнения системы (41) приходим к уравнениям

$$\Phi_{,xxxx}^{(k)} - n_2^{(k)} \Phi_{,xx}^{(k)} + n_0^{(k)} \Phi^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (43)$$

где приняты обозначения

$$n_0^{(k)} = r_0^{(k)} r_2^{(k)}, \quad n_2^{(k)} = r_2^{(k)} + r_0^{(k)} + r_3 r_1.$$

Уравнения (43) имеют решения

$$\Phi^{(k)} = \sum_{j=1}^4 g_j^{(k)} e^{\lambda_j^{(k)} x}, \quad (44)$$

где  $g_j^{(k)}$  ( $j = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2$ ) – постоянные интегрирования, а

$$\lambda_1^{(k)} = \left( \frac{n_2^{(k)}}{2} + \sqrt{\frac{n_2^{(k)2}}{4} - n_0^{(k)}} \right)^{1/2}, \quad \lambda_2^{(k)} = - \left( \frac{n_2^{(k)}}{2} + \sqrt{\frac{n_2^{(k)2}}{4} - n_0^{(k)}} \right)^{1/2},$$

$$\lambda_3^{(k)} = \left( \frac{n_2^{(k)}}{2} - \sqrt{\frac{n_2^{(k)2}}{4} - n_0^{(k)}} \right)^{1/2}, \quad \lambda_4^{(k)} = - \left( \frac{n_2^{(k)}}{2} - \sqrt{\frac{n_2^{(k)2}}{4} - n_0^{(k)}} \right)^{1/2}$$

– корни характеристических уравнений, составленных для (43). В соответствии с (42) и (44) находим функции

$$\tilde{u}_0^{(k)} = \sum_{j=1}^4 \lambda_j^{(k)} g_j^{(k)} e^{\lambda_j^{(k)} x}, \quad \tilde{w}_0^{(k)} = \sum_{j=1}^4 \beta_j^{(k)} g_j^{(k)} e^{\lambda_j^{(k)} x}, \quad k = 1, 2, \quad (45)$$

где введено обозначение  $\beta_j^{(k)} = (-r_0^{(k)} + \lambda_j^{(k)2}) / r_1$ . Представляя затем усилие

$T_x^0(x, \tau)$  на участке на участке закрепления  $-l \leq x \leq 0$  в виде

$$T_x^0(x, \tau) = \tilde{T}_x^{0(1)} e^{i\omega\tau} + \tilde{T}_x^{0(2)} e^{2i\omega\tau} \quad (46)$$

и используя первое соотношение в (10), с учетом (45) получаем

$$\tilde{T}_x^{0(k)} = \bar{E}_1 \left( \frac{4t}{3} \tilde{u}_{0,x}^{(k)} + 2\nu_{31} \tilde{w}_0^{(k)} \right) = \bar{E}_1 \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \lambda_j^{(k)2} + 2\nu_{31} \beta_j^{(k)} \right) g_j^{(k)} e^{\lambda_j^{(k)} x}, \quad (47)$$

$$k = 1, 2.$$

В сечении  $x = -l$  закрепленной части стержня должны выполняться граничные условия (16), которые с учетом (10), а также представлений (23), (40) и зависимостей (47) в дополнение к системе (39) доставляют еще четыре уравнения

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \lambda_j^{(1)2} + 2\nu_{31} \beta_j^{(1)} \right) g_j^{(1)} e^{-\lambda_j^{(1)} l} + \tilde{P} &= 0; \\ \bar{E}_1 \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \lambda_j^{(2)2} + 2\nu_{31} \beta_j^{(2)} \right) g_j^{(2)} e^{-\lambda_j^{(2)} l} &= 0; \\ \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \beta_j^{(1)} + 2 \right) \lambda_j^{(1)} g_j^{(1)} e^{-\lambda_j^{(1)} l} = 0; \quad \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \beta_j^{(2)} + 2 \right) \lambda_j^{(2)} g_j^{(2)} e^{-\lambda_j^{(2)} l} &= 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Заметим, что в соответствии с представлениями (29), (36) и (46) для удовлетворения силовым условиям сопряжения (19) (с пренебрежением в них подчеркнутым слагаемым) требуется выполнение равенств

$$\begin{aligned} \left( \tilde{T}_x^{0(1)} - \tilde{T}_x^{(1)} - \frac{2}{t} \tilde{M}_x \right) \Big|_{x=0} &= 0, \quad \left( \tilde{T}_x^{0(2)} - \tilde{T}_x^{(2)} \right) \Big|_{x=0} = 0, \\ \left( \tilde{N}_{xz}^{0(1)} - \tilde{Q}_z \right) \Big|_{x=0} &= 0, \quad \tilde{N}_{xz}^{0(2)} \Big|_{x=0} = 0, \end{aligned}$$

которые с учетом (3), (10), (30) и (47) дают еще четыре уравнения

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \lambda_j^{(1)2} + 2\nu_{31} \beta_j^{(1)} \right) g_j^{(1)} - Bk_{(1)} d_1^{(1)} + \frac{2}{t} Dk_w^2 [F_2(0)c_1 + S_2(0)c_2] &= 0; \\ \bar{E}_1 \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \lambda_j^{(2)2} + 2\nu_{31} \beta_j^{(2)} \right) g_j^{(2)} - Bk_{(2)} d_1^{(2)} - \\ - B [Q_1(0)c_1^2 + Q_2(0)c_1c_2 + Q_3(0)c_2^2] &= 0; \\ G_{13} \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \beta_j^{(1)} + 2 \right) \lambda_j^{(1)} g_j^{(1)} + Dk_w^3 [F_3(0)c_1 + S_3(0)c_2] &= 0; \\ \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \beta_j^{(2)} + 2 \right) \lambda_j^{(2)} g_j^{(2)} &= 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Остается удовлетворить кинематическим условиям сопряжения (11), которые при использовании представлений (24), (32) и (40) принимают вид

$$\tilde{u}^{(1)} \Big|_{x=0} = \tilde{u}_0^{(1)} \Big|_{x=0}, \quad \tilde{u}^{(2)} \Big|_{x=0} = \tilde{u}_0^{(2)} \Big|_{x=0}, \quad \tilde{w}_{,x} \Big|_{x=0} = -\frac{2}{t} \tilde{u}_0^{(1)} \Big|_{x=0}, \quad \tilde{w} \Big|_{x=0} = \tilde{w}_0^{(1)} \Big|_{x=0},$$

что с учетом (28), (35) и (45) доставляет в дополнение к (39), (48) и (49) следующие уравнения

$$\begin{aligned} d_2^{(1)} - \sum_{j=1}^4 \lambda_j^{(1)} g_j^{(1)} &= 0; \\ d_2^{(2)} - k_w^3 [f_1(0)c_1^2 + f_2(0)c_1c_2 + f_3(0)c_2^2] - \sum_{j=1}^4 \lambda_j^{(2)} g_j^{(2)} &= 0; \\ k_w [F_1(0)c_1 + S_1(0)c_2] + \frac{2}{t} \sum_{j=1}^4 \lambda_j^{(1)} g_j^{(1)} &= 0; \\ F(0)c_1 + S(0)c_2 - \sum_{j=1}^4 \beta_j^{(1)} g_j^{(1)} &= 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Таким образом, для определения четырнадцати постоянных интегрирования

$d_1^{(k)}, d_2^{(k)}$  ( $k=1,2$ ),  $g_j^{(k)}$  ( $j=1,2,3,4; k=1,2$ ) и  $c_1, c_2$  имеем систему четырнадцати уравнений (39), (48), (49), (50), которая является нелинейной относительно  $c_1, c_2$ . Для ее решения используем итерационный метод Ньютона [11]. С этой целью введем обозначения

$$\begin{aligned} x_1 = d_1^{(1)}, x_2 = d_2^{(1)}, x_3 = d_1^{(2)}, x_4 = d_2^{(2)}, x_5 = g_1^{(1)}, x_6 = g_2^{(1)}, x_7 = g_3^{(1)}, \\ x_8 = g_4^{(1)}, x_9 = g_1^{(2)}, x_{10} = g_2^{(2)}, x_{11} = g_3^{(2)}, x_{12} = g_4^{(2)}, x_{13} = c_1, x_{14} = c_2. \end{aligned}$$

Алгоритм метода Ньютона имеет вид

$$\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n-1)} - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{L}^{(n-1)}. \quad (51)$$

Здесь  $\mathbf{X}^{(n)}$  –  $n$ -е приближение вектора  $\mathbf{X}$ , элементами которого являются значения  $x_k$  ( $k = \overline{1, 14}$ ),  $\mathbf{L}^{(n-1)}$  – вектор, содержащий левые части системы уравнений (39), (48), (49), (50) на итерации  $n-1$ ,  $\mathbf{G}$  – матрица Якоби, состоящая из элементов

$$G_{ik} = \partial L_i / \partial x_k, \quad i = \overline{1, 14}, \quad k = \overline{1, 14},$$

вычисляемых на итерации  $n-1$ . Алгоритм (51) удобно записать в виде, не требующим обращения матрицы  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} \Delta \mathbf{X}^{(n)} = -\mathbf{L}^{(n-1)}. \quad (52)$$

Здесь  $\Delta \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{X}^{(n-1)}$  – приращение вектора  $\mathbf{X}$  на текущей итерации  $n$ . Для решения системы (52) относительно вектора  $\Delta \mathbf{X}^{(n)}$  можно использовать стандартный метод исключения Гаусса. Процедура (52) стартует со значения  $n=1$ . В качестве начального вектора  $\Delta \mathbf{X}^{(0)}$  можно взять решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{R}, \quad (53)$$

содержащих в левой части постоянные интегрирования  $d_1^{(k)}, d_2^{(k)}$  ( $k=1,2$ ),  $g_j^{(k)}$  ( $j=1,2,3,4; k=1,2$ ) и первые степени постоянных  $c_1, c_2$ . Нелинейные слагаемые, содержащие величины  $c_1^2, c_1 c_2, c_2^2$  и свободные члены системы уравнений (53), записываются в векторе  $\mathbf{R}$ . В качестве начальных  $c_1, c_2$  можно взять значения  $c_1 = c_2 = 1$ . Итерации завершаются при выполнении условия

$$\left\| \Delta \mathbf{X}^{(n)} \right\|_2^2 / \left\| \mathbf{X}^{(n)} \right\|_2^2 \leq \psi, \quad (54)$$

где  $\left\| \Delta \mathbf{X}^{(n)} \right\|_2^2, \left\| \mathbf{X}^{(n)} \right\|_2^2$  – квадраты вторых норм соответствующих векторов,  $\psi$  – заданная точность.

Следует заметить, что разработанная методика решения задачи о вынужденных колебаниях стержня с учетом поперечного обжатия закрепленного участка не учитывает демпфирующие свойства материала, и поэтому может давать корректное решение только при частотах, находящихся вдали от резонансной зоны, в то время как заметное прохождение колебаний через закрепленный участок в консольную часть стержня, обычно, наблюдается в резонансных режимах нагружения, при которых демпфирующие свойства материала необходимо обязательно учитывать [12]. При гармоническом законе деформирования стержня это можно сделать с использованием известной

гипотезы комплексного внутреннего трения [13-15 и др.], заменяя модули упругости  $E_1$ ,  $E_3$  и  $G_{13}$  материала их комплексными аналогами

$$E_1^* = E_1 + i \frac{E_1 \delta_1}{\pi}, \quad E_3^* = E_3 + i \frac{E_3 \delta_3}{\pi}, \quad G_{13}^* = G_{13} + i \frac{G_{13} \delta_{13}}{\pi},$$

где  $\delta_1$ ,  $\delta_3$ ,  $\delta_{13}$  – логарифмические декременты колебаний материала при растяжении-сжатии в направлениях осей  $Ox$ ,  $Oz$  и при сдвиге в плоскости  $Oxz$ .

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исследовалось прохождение колебаний в консольную часть стержня-полосы через участок закрепления конечной длины  $l$  на поверхности  $z = -t/2$  при действии осевой гармонической силы  $P = \tilde{P}e^{i\omega t}$  на торце (рис.1). Геометрические параметры стержня:  $t = 2.9$  мм;  $l = 50$  мм;  $a = 200$  мм;  $b = 20$  мм (ширина стержня).

Рассматривались два материала: дюралюминий марки Д16АТ и однонаправленный волокнистый композит на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118. В таблице 1 приведены механические характеристики данных материалов. В качестве модулей  $E_1$ ,  $E_3$  дюралюминия в табл.1 указаны динамические модули упругости, взятые по данным работы [16], а  $G_{13} = E_1 / [2(1 + \nu_{13})]$ .

Таблица 1.

Механические характеристики материалов.

Материал	$E_1$	$E_3$	$G_{13}$	$\nu_{13}$	$\delta_1$	$\delta_3$	$\delta_{13}$	$\rho$
	ГПа	ГПа	ГПа	-	-	-	-	кг/м <sup>3</sup>
Д16АТ	55.4	55.4	20.7	0.34	0.005	0.005	0.002	2800
Композит	100.0	5.7	1.0	0.34	0.05	0.05	0.10	1500

Рассматривались резонансные колебания стержня на первых двух низших собственных частотах  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  при амплитуде вынуждающей силы  $\tilde{P} = 158$  кН/м (для дюралюминиевого стержня) и  $\tilde{P} = 340$  кН/м (для композитного стержня). Значения  $\tilde{P}$  даются на единицу ширины стержня. Система уравнений (39), (48), (49), (50) относительно постоянных интегрирования  $d_1^{(k)}$ ,  $d_2^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ),  $g_j^{(k)}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ;  $k = 1, 2$ ) и  $c_1$ ,  $c_2$  решалась итерационным методом Ньютона до выполнения условия (54) при точности  $\psi = 1 \cdot 10^{-9}$ . Проведенные численные эксперименты с дюралюминиевым стержнем показали, что колебания через участок закрепления в консольную часть стержня при заданном значении  $\tilde{P} = 158$  Н/м (и даже при намного больших значениях) при резонансных колебаниях на частотах  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  не проходят. Это обусловлено, по-видимому, тем, что для стержней из металлических конструкционных материалов модель (5) с модулями упругости  $E_1$  и  $G_{13}$ , связанными зависимостью  $G_{13} = E_1 / [2(1 + \nu_{13})]$ , при больших значениях безразмерного параметра  $k^2 = 3G_{13}l^2 / (E_1 t^2)$  [7,9] является чрезмерно

«жесткой» (для рассматриваемого дюралюминиевого стержня  $k^2 = 333.2$ ). Она не позволяет описать с приемлемой степенью точности трансформацию продольных колебаний в зоне нагружения в продольно-поперечно-сдвиговые колебания стержня-полосы в зоне закрепления с последующей их трансформацией в преимущественно изгибные колебания консольной части стержня. Для «смягчения» данной модели предлагается уменьшить параметр  $k^2 = 3G_{13}l^2 / (E_1 t^2)$  путем искусственного снижения модуля поперечного сдвига  $G_{13}$ , что дает возможность интегрально учесть различные факторы, снижающие жесткость закрепленного участка стержня (податливость заклепочного шва или клеевого слоя, скрепляющих стержень с опорным элементом, малые деформации опорного элемента и прочее).

В таблице 2 приведены собственные циклические частоты колебаний  $f_1 = \omega_1 / (2\pi)$  дюралюминиевого стержня и соответствующие им амплитуды колебаний  $\tilde{w}(a)$  конца консоли при различных значениях  $G_{13}/E_1$  (отношение  $G_{13}/E_1 = 0.374$  соответствует исходному значению  $G_{13} = 20.7$  ГПа), полученные с учетом поперечного обжатия закрепленного участка. Для сравнения приведены аналогичные величины  $f_1^* = \omega_1^* / (2\pi)$  и  $\tilde{w}^*(a)$ , найденные по модели без учета поперечного обжатия отмеченного участка, которая получается из соотношений разделов 1 и 2 при  $w_0 = 0$  и  $v_{13} = 0$ . Частоты  $f_1^*$  определялись в результате модального анализа конечно-элементной модели стержня методом итераций в подпространстве [17,18 и др.] при моделировании стержня одномерными конечными элементами [8], работающими в рамках модели С.П. Тимошенко.

Таблица 2.

Собственные циклические частоты колебаний  $f_1, f_1^*$  дюралюминиевого стержня и соответствующие им амплитуды колебаний  $\tilde{w}(a), \tilde{w}^*(a)$  конца консоли при различных значениях  $G_{13}/E_1$ , полученные с учетом и без учета поперечного обжатия закрепленного участка.

$G_{13}/E_1$	С учетом поперечного обжатия		Без учета поперечного обжатия		$\alpha = \tilde{w}(a)/\tilde{w}^*(a)$
	$f_1, \text{Гц}$	$\tilde{w}(a), \text{мм}$	$f_1^*, \text{Гц}$	$\tilde{w}^*(a), \text{мм}$	
0.374	51.644	$2.32 \cdot 10^{-5}$	51.732	$4.55 \cdot 10^{-6}$	5.099
0.20	51.538	0.002	51.605	$8.46 \cdot 10^{-4}$	2.364
0.08	51.290	0.273	51.331	0.182	1.500
0.06	51.187	0.894	51.218	0.623	1.435
0.04	51.008	3.814	51.028	3.067	1.244
0.03	50.855	9.322	50.870	7.898	1.180
0.02	50.602	28.355	50.607	25.064	1.131

Частоты  $f_1$  с учетом поперечного обжатия закрепленной части определялись подбором при незначительном уменьшении соответствующих частот  $f_1^*$  до достижения максимального по модулю значения  $\tilde{w}(a)$  (снижение  $f_1$  по сравнению с  $f_1^*$  обусловлено некоторым увеличением податливости

закрепленной части за счет учета ее поперечного обжатия). Эффект от поперечного обжатия оценивался отношением  $\alpha = \tilde{w}(a)/\tilde{w}^*(a)$ .

В таблице 3 приведены значения, аналогичные тем, что представлены в таблице 1, полученные при резонансных колебаниях стержня на частоте  $f_2$ .

Таблица 3.

Собственные циклические частоты колебаний  $f_2, f_2^*$  дюралюминиевого стержня и соответствующие им амплитуды колебаний  $\tilde{w}(a), \tilde{w}^*(a)$  конца консоли при различных значениях  $G_{13}/E_1$ , полученные с учетом и без учета поперечного обжатия закрепленного участка

$G_{13}/E_1$	С учетом поперечного обжатия		Без учета поперечного обжатия		$\alpha = \tilde{w}(a)/\tilde{w}^*(a)$
	$f_2, \text{Гц}$	$\tilde{w}(a), \text{мм}$	$f_2^*, \text{Гц}$	$\tilde{w}^*(a), \text{мм}$	
0.374	323.615	$3.68 \cdot 10^{-6}$	323.939	$4.40 \cdot 10^{-7}$	8.364
0.20	322.970	$3.53 \cdot 10^{-4}$	323.164	$8.19 \cdot 10^{-5}$	4.310
0.08	321.508	0.043	321.524	0.018	2.398
0.06	320.843	0.138	320.849	0.063	2.191
0.04	319.731	0.553	319.737	0.296	1.868
0.03	318.812	1.269	318.819	0.759	1.672
0.02	317.308	3.445	317.314	2.398	1.437

Из таблицы 3 (а также из таблицы 4, см. ниже) видно, что по мере уменьшения отношения  $G_{13}/E_1$  собственные частоты  $f_1, f_2$ , а также  $f_1^*, f_2^*$ , как и должно быть, несколько убывают, причем при всех значениях  $G_{13}/E_1$  частоты  $f_1, f_2$  получились незначительно ниже соответствующих частот  $f_1^*, f_2^*$ , что обусловлено некоторым уменьшением податливости закрепленной части, происходящим за счет учета ее поперечного обжатия. Наибольшее отношение  $\alpha = \tilde{w}(a)/\tilde{w}^*(a)$  при резонансных колебаниях на частотах  $f_1, f_2$  достигается при  $G_{13}/E_1 = 0.374$ , что соответствует исходному значению  $G_{13} = 20.7$  ГПа. Причем, при всех заданных значениях  $G_{13}/E_1$  отношения  $\alpha = \tilde{w}(a)/\tilde{w}^*(a)$ , соответствующие резонансным колебаниям на частоте  $f_2$ , получаются выше соответствующих отношений, наблюдаемых на частоте  $f_1$ . Однако в диапазоне  $0.274 \leq G_{13}/E_1 \leq 0.08$  амплитуды  $\tilde{w}(a)$  и  $\tilde{w}^*(a)$  имеют настолько малые значения, что они не могут быть надежно измерены с помощью соответствующих инструментально-аппаратных средств фиксации перемещений. Поэтому говорить о реальном прохождении колебаний в консольную часть дюралюминиевого стержня и эффекте  $\alpha = \tilde{w}(a)/\tilde{w}^*(a)$  можно только при  $G_{13}/E_1 \leq 0.06$ .

На рис.2 приведены амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_x$  на поверхности  $z = t/2$  дюралюминиевого стержня при резонансных колебаниях на частоте  $f_1$ , полученные при  $G_{13}/E_1 = 0.02$  с учетом и без учета поперечного обжатия закрепленного участка стержня. Необходимо заметить, что согласно представлениям (37) и (46) частоте  $f_1$  должны соответствовать амплитуды

напряжений  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$  с частотами  $f_1$  и  $2f_1$ . Однако проведенные численные эксперименты показали, что амплитуды напряжений  $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$  получаются примерно на два порядка ниже соответствующих амплитуд  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$ . Поэтому в качестве  $\tilde{\sigma}_x^0$ ,  $\tilde{\sigma}_x$  берутся, соответственно, амплитуды напряжений  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$  (то же далее будет относиться и к другим параметрам напряженного состояния стержня).

На рис.3 представлены амплитуды касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^0$  при  $z = 0$  и  $\tilde{\sigma}_{xz}$  (не зависят от  $z$ ) в дюралюминиевом стержне при резонансных колебаниях на частоте  $f_1$ , полученные при  $G_{13}/E_1 = 0.02$  с учетом и без учета поперечного обжатия закрепленного участка стержня.

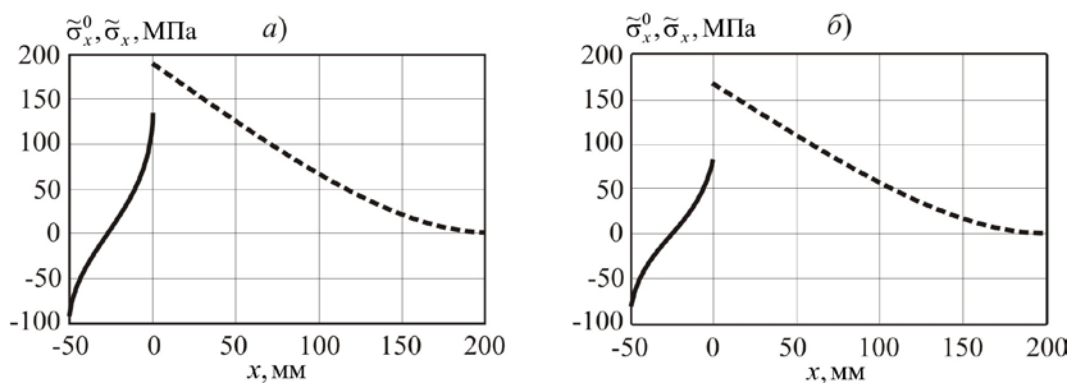


Рис.2. Амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^0$  (сплошные линии) и  $\tilde{\sigma}_x$  (пунктирные линии) на поверхности  $z = t/2$  при резонансных колебаниях дюралюминиевого стержня по первой собственной форме, полученные при  $G_{13}/E_1 = 0.02$  с учетом (а) и без учета (б) поперечного обжатия закрепленного участка.

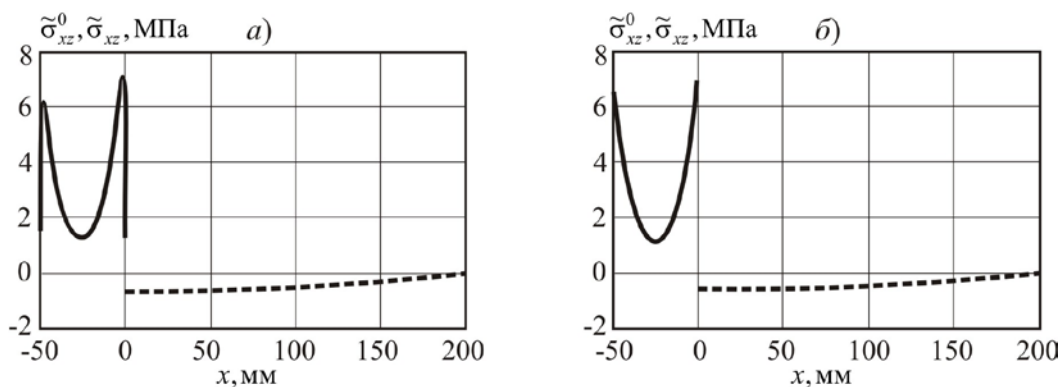


Рис.3. Амплитуды касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^0$  (сплошные линии) и  $\tilde{\sigma}_{xz}$  (пунктирные линии) при резонансных колебаниях дюралюминиевого стержня по первой собственной форме, полученные при  $G_{13}/E_1 = 0.02$  с учетом (а) и без учета (б) поперечного обжатия закрепленного участка.

Из рис.2 и 3 видно, что при переходе через границу от консольной части стержня к участку закрепления конечной длины  $l$  в обоих случаях, т.е. с учетом



и без учета поперечного обжатия закрепленного участка, наблюдается значительная трансформация нормальных и касательных напряжений. При этом амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_x$  с учетом поперечного обжатия закрепленного участка (рис.2а), получаются заметно выше соответствующих амплитуд, полученных без учета поперечного обжатия данного участка стержня (рис.2б). Амплитуды касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^0, \tilde{\sigma}_{xz}$  в том и другом случаях получаются достаточно близкими по величине, но пиковые значения  $\tilde{\sigma}_{xz}^0$  при учете поперечного обжатия закрепленного участка (рис.3а) получаются не в сечениях  $x = -l$  и  $x = 0$ , а незначительно смещенными относительно данных сечений внутрь отмеченного участка.

Выше отмечалось, что интенсивность прохождения колебаний через участок закрепления конечной длины  $l$  в консольную часть стержня существенно зависит от безразмерного параметра  $k^2 = 3G_{13}l^2 / (E_1t^2)$  и для дюралюминиевого стержня при заданных значениях  $G_{13}, E_1, l$  и  $t$  этот параметр имеет значение  $k^2 = 333.2$ . Для композитного стержня при тех же значениях  $l$  и  $t$  параметр  $k^2 = 8.92$ , что существенно меньше результата, полученного для дюралюминиевого стержня.

В таблице 4 приведены собственные циклические частоты колебаний  $f_1 = \omega_1 / (2\pi)$  и соответствующие им амплитуды колебаний  $\tilde{w}(a)$  конца консоли композитного стержня, полученные с учетом поперечного обжатия закрепленного участка. Для сравнения приведены аналогичные величины  $f_1^* = \omega_1^* / (2\pi)$  и  $\tilde{w}^*(a)$ , найденные без учета поперечного обжатия отмеченного участка. Эффект от поперечного обжатия по-прежнему оценивался отношением  $\alpha = \tilde{w}(a) / \tilde{w}^*(a)$ .

В таблице 5 приведены величины, аналогичные тем, что представлены в таблице 3, полученные при резонансных колебаниях композитного стержня на частоте  $f_2$ .

Таблица 4.

Собственные циклические частоты колебаний  $f_1, f_1^*$  композитного стержня и соответствующие им амплитуды колебаний  $\tilde{w}(a), \tilde{w}^*(a)$  конца консоли, полученные с учетом и без учета поперечного обжатия закрепленного участка.

С учетом поперечного обжатия		Без учета поперечного обжатия		$\alpha = \tilde{w}(a) / \tilde{w}^*(a)$
$f_1, \text{Гц}$	$\tilde{w}(a), \text{мм}$	$f_1^*, \text{Гц}$	$\tilde{w}^*(a), \text{мм}$	
91.481	14.589	91.481	12.717	1.147

Таблица 5.

Собственные циклические частоты колебаний  $f_2, f_2^*$  композитного стержня и соответствующие им амплитуды колебаний  $\tilde{w}(a), \tilde{w}^*(a)$  конца консоли, полученные с учетом и без учета поперечного обжатия закрепленного участка.

С учетом поперечного обжатия		Без учета поперечного обжатия		$\alpha = \tilde{w}(a) / \tilde{w}^*(a)$
$f_2, \text{Гц}$	$\tilde{w}(a), \text{мм}$	$f_2^*, \text{Гц}$	$\tilde{w}^*(a), \text{мм}$	
562.490	0.773	562.490	0.656	1.178

Из таблиц 4 и 5 видно, что частоты  $f_1, f_2$  получились равными (с точностью до трех знаков после десятичной точки) соответствующим частотам  $f_1^*, f_2^*$ . Амплитуды резонансных колебаний  $\tilde{w}(a)$  и  $\tilde{w}^*(a)$  на частоте  $f_2$  получаются существенно ниже соответствующих амплитуд  $\tilde{w}(a)$  и  $\tilde{w}^*(a)$ , полученных при резонансных колебаниях на частоте  $f_1$ , а отношение  $\alpha = \tilde{w}(a)/\tilde{w}^*(a)$  получается незначительно выше того, что наблюдается на частоте  $f_1$ .

На рис.4,5 приведены, соответственно, амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_x$  на поверхности  $z = t/2$  и амплитуды касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^0$  при  $z = 0$  и  $\tilde{\sigma}_{xz}$  (не зависят от  $z$ ) в поперечных сечениях композитного стержня при резонансных колебаниях на частоте  $f_1$  с учетом и без учета поперечного обжатия закрепленного участка стержня.

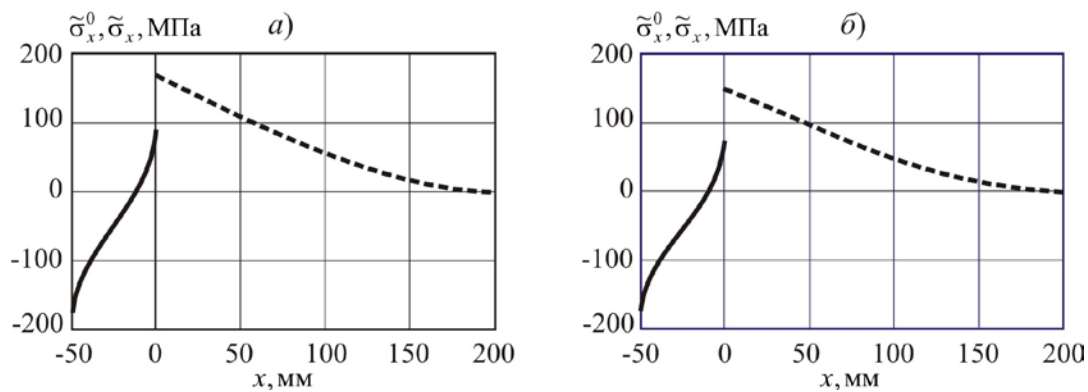


Рис.4. Амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^0$  (сплошные линии) и  $\tilde{\sigma}_x$  (пунктирные линии) на поверхности  $z = t/2$  при резонансных колебаниях композитного стержня по первой собственной форме с учетом (а) и без учета (б) поперечного обжатия закрепленного участка.

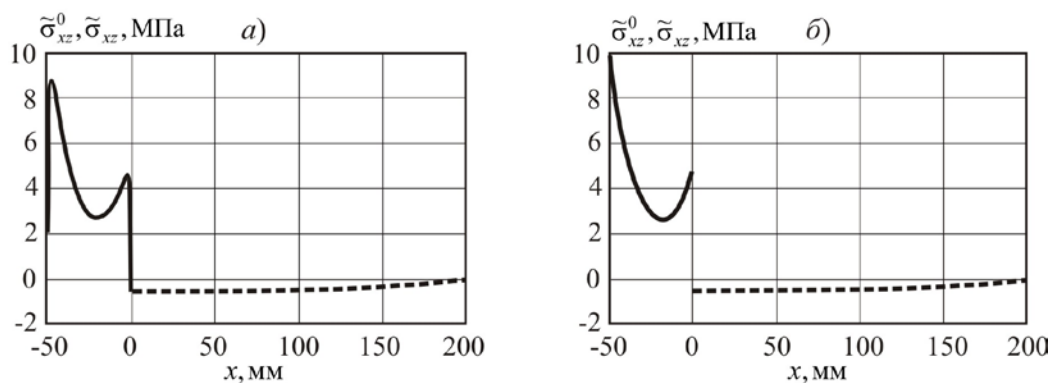


Рис.5. Амплитуды касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^0$  (сплошные линии) и  $\tilde{\sigma}_{xz}$  (пунктирные линии) при резонансных колебаниях композитного стержня по первой собственной форме с учетом (а) и без учета (б) поперечного обжатия закрепленного участка.

При переходе через границу от консольной части стержня к участку закрепления конечной длины  $l$  в обоих случаях наблюдается значительная трансформация нормальных и касательных напряжений. При этом амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_x$  с учетом поперечного обжатия закрепленного участка (рис.4а), получаются заметно выше соответствующих амплитуд, полученных без учета поперечного обжатия данного участка стержня (рис.4б), а пиковые значения касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^0$  в первом случае (рис.5а) получаются снова не в сечениях  $x = -l$  и  $x = 0$ , а несколько смещенными относительно данных сечений внутрь отмеченного участка.

На рис.6 представлены амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_z^0$  на оси  $Ox$  закрепленных участков дюралюминиевого (с отношением  $G_{13}/E_1 = 0.02$ ) и композитного стержней при их резонансных колебаниях по первой собственной форме, обусловленных учетом поперечного обжатия отмеченных участков. В обоих случаях наблюдается существенная локализация  $\tilde{\sigma}_z^0$  в областях, расположенных близи границ данных участков. При этом максимальные по модулю значения  $\tilde{\sigma}_z^0$  в композитном стержне (рис.6б) получаются значительно ниже соответствующих значений, получаемых для дюралюминиевого стержня (рис.6а), что обусловлено весьма низким модулем упругости  $E_3$  используемого композита (см. табл.1).

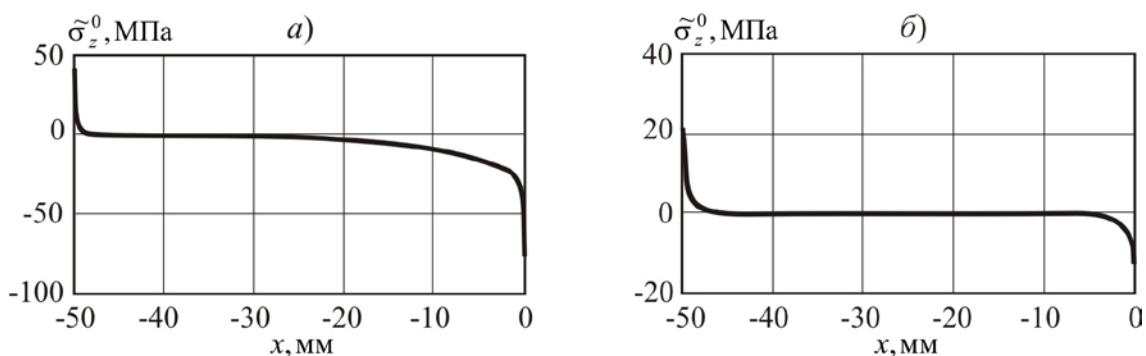


Рис.6. Амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_z^0$  на оси  $Ox$  закрепленных участков дюралюминиевого (а) и композитного (б) стержней.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены основные соотношения для описания процесса деформирования стержня-полосы, имеющего участок закрепления конечной длины по поверхности  $z = -t/2$ . Деформирование закрепленного участка описывается сдвиговой моделью С.П. Тимошенко с учетом его поперечного обжатия, которая трансформируется в другую модель за счет учета наличия неподвижного участка закрепления. Для описания процесса деформирования консольной части стержня используется классическая модель Кирхгофа-Лява с учетом геометрической нелинейности при определении осевой деформации. Сформулированы условия кинематического сопряжения закрепленной и консольной частей стержня. На основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского построены уравнения движения отмеченных участков стержня, сформулированы граничные

условия и силовые условия их сопряжения в сечении  $x = 0$ . Получены точные аналитические решения построенных уравнений движения при действии гармонической осевой силы на торце закрепленного участка стержня.

Проведены численные эксперименты по исследованию прохождения колебаний через участок закрепления конечной длины при резонансе по двум низшим собственным формам в стержнях, выполненных из дюралюминия марки Д16АТ и однонаправленного волокнистого композита на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118. Показано, что в стержне, выполненном из дюралюминия, заметное прохождение колебаний в его консольную часть наблюдается только при значительном уменьшении модуля сдвига  $G_{13}$  относительно его исходного значения. Выявлен эффект возрастания амплитуд колебаний  $\tilde{w}(a)$  концов незакрепленных участков рассматриваемых стержней, обусловленный учетом поперечного обжатия участка закрепления конечной длины  $l$ . В дюралюминиевом стержне степень возрастания  $\tilde{w}(a)$  по отношению к амплитудам  $\tilde{w}^*(a)$ , полученным без учета поперечного обжатия закрепленного участка, зависит от величины модуля сдвига  $G_{13}$  и номера тона резонансных колебаний (табл.2, табл.3). В композитном стержне величина  $\tilde{w}(a)/\tilde{w}^*(a)$  при резонансных колебаниях по первой и второй собственным формам получается почти одинаковой (табл.4, табл.5).

Полученные в статье результаты, связанные с исследованием процесса деформирования стержня-полосы, имеющего участок закрепления конечной длины и находящегося в условиях вибрационного нагружения, следует рассматривать как методологию постановки соответствующих задач механики с учетом податливости закрепленного участка стержня при наличии деформаций его поперечного обжатия. В рамках использования классической модели Кирхгофа-Лява на закрепленном участке возможна формулировка только общепринятых граничных условий в сечении перехода от незакрепленного участка к закрепленному, а при использовании известной уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко имеется возможность учета закрепления стержня с абсолютно жестким опорным элементом только на одной из лицевых поверхностей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R. K. *Vibration Transmission in Thin-Wall Framed Structures* // Russian Aeronautics. – 2022. – Vol.65. – No.3. – Pp.490-497.
2. Беляев А.К. *Широкополосная вибрация тонкостенных элементов сложных систем* / Труды ЛПИ «Механика и процессы управления». –1991. – Т.442. – С.128-137.
3. Jones R.T., Pretlove A.J. *Vibration Absorbers and Bridges* // Journal of the Institution of Highway Engineers. –1979. – Vol.25. – No.1. – Pp.2-9.
4. Nair P.S., Rao M.S. *On vibration of plates with varying stiffener length* // Journal of Sound and Vibration. – 1984. – Vol.95. – No.1. –Pp.19-29.
5. Davis Brad., Tomas M. Murray. *Slender Monumental Stair Vibration Serviceability* // Journal of Architectural Engineering. – 2009. – Vol.15. – No.4. – Pp.111-121.

6. Ellis B.R. *Serviceability Evaluation of Floor Vibration Induced by Walking Loads // The Structural Engineer.* – 2001. – Vol.79. – No.21. – Pp.30-36.
7. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М. *Математическое моделирование распространения вибраций в тонкостенных каркасированных конструкциях. 1. Основные соотношения и решение характерных задач // Проблемы прочности и пластичности.* – 2022. – Т.84. – №2. – С.207-224.
8. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М. *Математическое моделирование распространения вибраций в тонкостенных каркасированных конструкциях. 2. Конечно-элементные модели и численные эксперименты // Проблемы прочности и пластичности.* – 2022. – Т.84. – №3. – С.311-330.
9. Paimushin V.N., Shishkin V.M., Firsov V.A., Gazizullin R.K. *Transforming Deformation Model of Flat Beams with Finite Length Fastening Areas Located on One of the Front-Face Surfaces // Advanced Structured Materials* this link is disabled: *Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading.* – 2023. – Vol.186. – Pp.185-200.
10. Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. *MATLAB 7: программирование, численные методы.* – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
11. Шуп Т. *Решение инженерных задач на ЭВМ.* – М.: Мир, 1982. – 238 с.
12. Цейтлин А.И. *Об учете внутреннего трения в нормативных документах по динамическому расчету сооружений // Строительная механика и расчет сооружений.* – 1981. – №4. – С.33-38.
13. Сорокин Е.С. *К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем.* – М.: Госстройиздат, 1960. – 129 с.
14. Василенко Н.В. *Учет несовершенной упругости материала при механических колебаниях методом комплексных модулей / В сборнике «Рассеяние энергии при колебаниях механических систем».* – Киев: Наукова думка, 1974. – С.5-12.
15. Рикардс Р.Б., Барканов Е.Н. *Определение динамических характеристик вибропоглощающих покрытий методом конечных элементов // Механика композитных материалов.* – 1991. – №5. – С.823-830.
16. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I., Shishkin V.M. *Accounting for the Frequency-Dependent Dynamic Elastic Modulus of Duralumin in Deformation Problems // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* – 2017. – Vol.58. – No.3. – Pp.517-528.
17. Бате К., Вильсон Е. *Численные методы анализа и метод конечных элементов.* – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
18. Клаф Р., Пензен Дж. *Динамика сооружений.* – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.

## REFERENCES

1. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R. K. *Vibration Transmission in Thin-Wall Framed Structures.* Russian Aeronautics, 2022, Vol.65, No.3, Pp.490-497.
2. Belyaev A.K. *Shirokopolosnaya vibratsiya tonkostennykh ehlementov slozhnykh sistem [Broadband vibration of thin-walled elements of complex systems].* Trudy LPI “Mekhanika i protsessy upravleniya”, 1991, Vol.442, Pp.128-137.
3. Jones R.T., Pretlove A.J. *Vibration Absorbers and Bridges.* Journal of the Institution of Highway Engineers, 1979, Vol.25, No.1, Pp.2-9.
4. Nair P.S., Rao M.S. *On vibration of plates with varying stiffener length.* Journal of Sound and Vibration, 1984, Vol.95, No.1, Pp.19-29.

5. Davis Brad., Tomas M. Murray. *Slender Monumental Stair Vibration Serviceability*. Journal of Architectural Engineering, 2009, Vol.15, No.4, Pp.111-121.
6. Ellis B.R. *Serviceability Evaluation of Floor Vibration Induced by Walking Loads*. The Structural Engineer, 2001, Vol.79, No.21, Pp.30-36.
7. Pajmushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. *Matematicheskoe modelirovanie rasprostraneniya vibratsij v tonkostennykh karkasirovannykh konstruksiyakh. 1. Osnovnye sootnosheniya i reshenie kharakternykh zadach [Mathematical modeling of vibration propagation in thin-walled framed structures. 1. The main relations and the solution of characteristic problems]*. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2022, Vol.84, No.2, Pp.207-224.
8. Pajmushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. *Matematicheskoe modelirovanie rasprostraneniya vibratsij v tonkostennykh karkasirovannykh konstruksiyakh. 2. Konechno-ehlementnye modeli i chislennye ehksperimenty [Mathematical modeling of vibration propagation in thin-walled framed structures. 2. Finite element models and numerical experiments]*. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2022, Vol.84, No.3. Pp.311-330.
9. Paimushin V.N., Shishkin V.M., Firsov V.A., Gazizullin R.K. *Transforming Deformation Model of Flat Beams with Finite Length Fastening Areas Located on One of the Front-Face Surfaces*. Advanced Structured Materials this link is disabled: Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading, 2023, Vol.186, Pp.185-200.
10. Ketkov Yu.L., Ketkov A.Yu., Shul'ts M.M. *MATLAB 7: programmirovaniye, chislennyye metody [MATLAB 7: programming, numerical methods]*. SPb., BKHV-Peterburg, 2005, 752 p.
11. Shup T. *Reshenie inzhenernykh zadach na EHVM [Solving engineering problems on a computer]*. Moskva, Mir, 1982, 238 p.
12. Cejtlin A.I. *Ob uchete vnutrennego treniya v normativnykh dokumentakh po dinamicheskomu raschetu sooruzhenij [On accounting for internal friction in regulatory documents on the dynamic calculation of structures]*. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij, 1981, No.4, Pp.33-38.
13. Sorokin E.S. *K teorii vnutrennego treniya pri kolebaniyakh uprugikh sistem [On the theory of internal friction during vibrations of elastic systems]*. Moskva, Gosstrojizdat, 1960, 129 p.
14. Vasilenko N.V. *Uchet nesovershennoj uprugosti materiala pri mekhanicheskikh kolebaniyakh metodom kompleksnykh modulej [Taking into account the imperfect elasticity of the material during mechanical vibrations by the method of complex modules]*. V sbornike "Rasseyanie ehnergii pri kolebaniyakh mekhanicheskikh sistem". Kiev, Naukova dumka, 1974, Pp.5-12.
15. Rikards R.B., Barkanov E.N. *Opreделение dinamikheskikh kharakteristik vibropogloshhayushhikh pokrytij metodom konechnykh ehlementov [Determination of dynamic characteristics of vibration-absorbing coatings by the finite element method]*. Mekhanika kompozitnykh materialov, 1991, No.5, Pp.823-830.
16. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I., Shishkin V.M. *Accounting for the Frequency-Dependent Dynamic Elastic Modulus of Duralumin in Deformation Problems*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2017, Vol.58, No.3, Pp. 517-528.
17. Bate K., Vil'son E. *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh ehlementov [Numerical methods of analysis and the finite element method]*. Moskva, Strojizdat, 1982, 447 p.

18. Klaf R., Penzen Dzh. *Dinamika sooruzhenij [Dynamics of structures]*. Moskva, Strojizdat, 1979, 320 p.

*Поступила в редакцию 03 июля 2023 года.*

---

Сведения об авторах:

Паймушин Виталий Николаевич – д.ф.-м.н., проф., профессор Кафедры «Прочность конструкций», ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», г. Казань, Россия; e-mail: [vpajmushin@mail.ru](mailto:vpajmushin@mail.ru)

Шишкин Виктор Михайлович – д.т.н., проф., профессор Кафедры «Механика и инженерная графика», ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров, Россия; e-mail: [tism1@rambler.ru](mailto:tism1@rambler.ru)