



## УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН\*

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

### АННОТАЦИЯ

В рамках уточненной теории изгиба сформулирована связная задача неизоотермического вязкоупругопластического динамического деформирования армированных пластин. Простейшим вариантом этой теории является традиционная неклассическая теория Амбарцумяна. Геометрическая нелинейность моделируется в приближении Кармана. Температура и тангенциальные перемещения точек гибких пластин в поперечном направлении аппроксимируются полиномами высоких порядков. Численное решение поставленной двумерной начально-краевой задачи получено с использованием явной схемы шагов по времени. Исследовано неизоотермическое вязкоупругопластическое поведение стеклопластиковой пластины с ортогональной 2D-структурой армирования; конструкция динамически изгибается под действием избыточного давления, вызванного воздушной взрывной волной. Продемонстрировано, что для адекватного вычисления теплового отклика в такой конструкции температуру по ее толщине необходимо аппроксимировать полиномом 7-го порядка, а не полиномом 2-го порядка, как это традиционно принято делать для тонкостенных элементов конструкций. Показано, что для адекватного определения остаточной формы пластины после прекращения ее неупругих осцилляций и для адекватного расчета остаточного деформированного состояния ее компонентов композиции следует использовать уточненную теорию изгиба, а не теорию Амбарцумяна. При отсутствии внешних интенсивных источников тепла немеханического происхождения динамику стеклопластиковых пластин можно рассчитывать без учета теплового отклика в них. При наличии же предварительно наведенного и существенно неоднородного по толщине пластин температурного поля величина остаточного прогиба зависит от того, к какой лицевой поверхности конструкции прикладывается внешняя динамическая нагрузка.

**Ключевые слова:** гибкие пластины; многонаправленное армирование; вязкоупругопластичность; неизоотермическое динамическое поведение; уточненная теория изгиба; теория Амбарцумяна; связанная термомеханическая задача; явная численная схема

## REFINED MODEL OF NON-ISOTHERMAL VISCOELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF FLEXIBLE REINFORCED PLATES

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch  
of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

---

\* Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

## ABSTRACT

Within the framework of the refined theory of bending, a coupled problem of non-isothermal viscoelastic-plastic dynamic deformation of reinforced plates is formulated. The simplest version of this theory is the traditional non-classical Ambartsumian theory. Geometric nonlinearity is modeled in the Karman approximation. The temperature and tangential displacements of points of flexible plates in the transverse direction are approximated by high-order polynomials. The numerical solution of the posed two-dimensional initial-boundary value problem was obtained using an explicit scheme of time steps. The non-isothermal viscoelastic-plastic behavior of a fiberglass plate with an orthogonal 2D-reinforcement structure has been studied; the structure dynamically flexes under the action of excess pressure caused by the air blast wave. It is shown that in order to adequately calculate the thermal response in such a structure, the temperature over its thickness must be approximated by a 7th order polynomial, and not by a 2nd order polynomial, as is traditionally done for thin-walled structural elements. It is shown that for an adequate determination of the residual shape of the plate after the termination of its inelastic oscillations and for an adequate calculation of the residual deformed state of its composition components, the refined theory of bending, rather than the theory of Ambartsumian, should be used. In the absence of external intense heat sources of non-mechanical origin, the dynamics of fiberglass plates can be calculated without taking into account the thermal response in them. In the presence of a temperature field previously induced and substantially inhomogeneous over the thickness of the plates, the magnitude of the residual deflection depends on which facial surface of the structure the external dynamic load is applied to.

**Keywords:** flexible plates; multidirectional reinforcement; viscoelastic-plasticity; non-isothermal dynamic behavior; refined bending theory; Ambartsumian theory; coupled thermomechanical problem; explicit numerical scheme

## ВВЕДЕНИЕ

Современные изделия из композиционных материалов (КМ) могут подвергаться высокоинтенсивному силовому и тепловому нагружению [1-11], при котором компоненты их композиции деформируются неупруго [4,6,9,12-16]. Следовательно, актуальной является проблема математического моделирования термоупругопластического поведения тонкостенных КМ-конструкций, находящаяся в настоящее время на стадии становления [14,16-22]. В работе [20] была разработана структурная модель неизотермического вязкоупругопластического деформирования перекрестно-армированной среды, на основе которой исследовалось термомеханическое поведение изгибаемых КМ-пластин при их динамическом нагружении. При этом температурное поле в [20] по толщине пластины аппроксимировалось традиционно – полиномом второго порядка. Однако позже в [21] было показано, что при динамическом неупругом изгибном деформировании тонкостенных элементов КМ-конструкций для адекватного моделирования теплового отклика в них температуру по толщине необходимо аппроксимировать полиномами 6-7-го порядков, а не второго, как в [20].

Для моделирования волновых процессов в тонкостенных КМ-конструкциях и для учета их плохого сопротивления поперечным сдвигам используют неклассические теории Тимошенко – Рейсснера [2,4,8,9,23], Амбарцумяна [1,20,21] или Редди [5,7]; более точные теории, основанные, как правило, на гипотезе ломаной линии, применяются гораздо реже [3,4,8,22]. В работе [22] было показано, что расчет термоупругопластического динамического деформирования гибких армированных пластин необходимо проводить

с использованием уточненной теории изгиба, а не в рамках традиционных теорий Рейсснера, Амбарцумяна или Редди. Однако использованная в [22] структурная модель термомеханического поведения КМ не позволяет определять остаточное состояние КМ-конструкции после приложения к ней высокоинтенсивной кратковременной нагрузки взрывного типа.

Для численного интегрирования нелинейных задач динамики пластин и оболочек используют как явные [4,20-22], так и неявные [6,24] методы.

Согласно вышеизложенному, в настоящей работе моделируется неізотермическое вязкоупругопластическое динамическое поведение армированных пластин при использовании уточненной теории изгиба [22] и аппроксимации температуры по толщине таких КМ-конструкций полиномами высоких порядков. Решение нелинейной связанной термомеханической задачи строится на базе явной численной схемы [4,20-22].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим пластину толщиной  $2h$  (рис.1), с которой свяжем декартову прямоугольную систему координат  $x_i$  так, что плоскость  $Ox_1x_2$  ( $x_3 = 0$ ) является срединной ( $|x_3| \leq h$ ). Конструкция перекрестно армирована  $K$  семействами волокон (возможно, и пространственно) с плотностями армирования  $\omega_k$  ( $1 \leq k \leq K$ ). В направлении  $x_3$  структура армирования однородна.

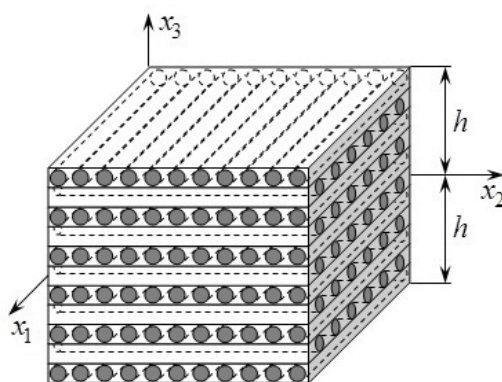


Рис.1. Элемент пластины с ортогональной структурой армирования.

С каждым  $k$ -м семейством арматуры свяжем локальную ортогональную систему координат  $x_i^{(k)}$ , причем ось  $x_1^{(k)}$  ориентируем вдоль траектории волокна и ее направление зададим двумя углами сферической системы координат  $\theta_k, \varphi_k$  (рис.2). Тогда направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  между локальными  $x_i^{(k)}$  и глобальными  $x_j$  ( $i, j = \overline{1,3}, 1 \leq k \leq K$ ) осями координат вычисляются по формулам (44) в [20].

Традиционно считаем, что касательными внешними силами на лицевых поверхностях пластины можно пренебречь, а в случае пространственной структуры армирования выполняется требование, изложенное в замечании в [21].

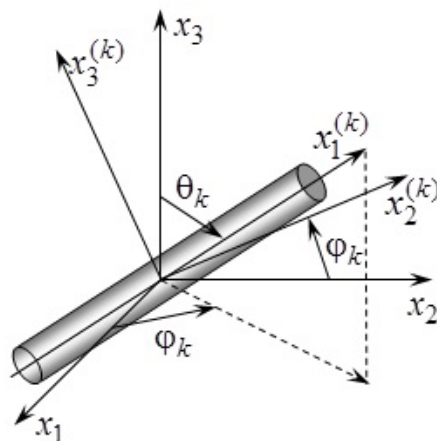


Рис.2. Локальная система координат, связанная с арматурой  $k$ -го семейства.

При этом перемещения точек рассматриваемой гибкой КМ-конструкции  $U_i$  и осредненные деформации ее композиции  $\varepsilon_{ij}$  в рамках уточненной теории изгиба можно аппроксимировать так [22] (геометрическая нелинейность задачи моделируется в приближении Кармана)

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \tag{1}$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3);$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = & \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \\ & + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \bar{\varepsilon}_{j3}^{(m)} + \partial_j \bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = (h^2 - x_3^2) \sum_{m=0}^M \frac{x_3^m}{h^2} \bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}),$$

$$i, j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где  $u_i$  – тангенциальные перемещения точек срединной плоскости в направлениях  $x_i$ ;  $w$  – прогиб;  $t_0$  – начальный момент времени  $t$ ;  $\partial_i$  – оператор частного дифференцирования по переменной  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $\Omega$  – область, занимаемая пластиной в плане. В случае  $M = 0$  равенства (1) и (2) редуцируются в кинематические соотношения теорий Амбарцумяна [1,20,21] и Редди [5,7]. В выражениях (1), (2) неизвестны двумерные функции  $w, u_i$  и  $\bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$ ).

Предполагаем, что материалы компонентов композиции пластины являются однородными и изотропными. Их вязкоупругое поведение описывается соотношениями модели тела Максвелла – Больцмана, а пластическое деформирование – соотношениями теории течения с изотропным упрочнением, причем функции нагружения зависят от параметров упрочнения фазовых материалов и температуры конструкции. При этом определяющие уравнения для композиции, связывающие скорости осредненных деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ , скорости

осредненных напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}$  и температуру  $\Theta$  в текущий момент времени  $t$  целесообразно записать в матричной форме [20]

$$\dot{\sigma} = \mathbf{B}\dot{\epsilon} + \mathbf{p}, \quad (3)$$

где

$$\dot{\sigma} \equiv (\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{23}, \dot{\sigma}_{31}, \dot{\sigma}_{12})^T, \quad \dot{\epsilon} \equiv (\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{33}, 2\dot{\epsilon}_{23}, 2\dot{\epsilon}_{31}, 2\dot{\epsilon}_{12})^T; \quad (4)$$

шестикомпонентный вектор-столбец  $\mathbf{p} = (p_i)$  и  $6 \times 6$ -матрица  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  определяются матричными равенствами (41) в [20], их элементы  $p_i$  и  $b_{ij}$  ( $i, j = \overline{1,6}$ ) зависят от структуры армирования (плотностей  $\omega_k$  и углов  $\theta_k, \varphi_k$ ), физико-механических характеристик материалов композиции и их термомеханического состояния; индекс T – операция транспонирования; точка – производная по времени.

В настоящей работе исследуется поведение армированной пластины как гибкой тонкостенной механической системы, следовательно, нормальное напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  с приемлемой точностью можно линейно аппроксимировать по переменной  $x_3$  [2]

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad (5)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где  $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  – известные из силовых граничных условий напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях.

Согласно соотношениям (4), из третьего равенства системы (3) выразим скорость линейной трансверсальной деформации

$$\dot{\epsilon}_{33} = b_{33}^{-1} (\dot{\sigma}_{33} - p_3 - b_{31}\dot{\epsilon}_{11} - b_{32}\dot{\epsilon}_{22} - 2b_{34}\dot{\epsilon}_{23} - 2b_{35}\dot{\epsilon}_{31} - 2b_{36}\dot{\epsilon}_{12}), \quad (6)$$

где скорость  $\dot{\epsilon}_{33}$  вычисляется за счет дифференцирования по  $t$  соотношения (5), а скорости  $\dot{\epsilon}_{ij}$  в правой части – за счет дифференцирования по времени соотношений (2), т.е. выражаются через искомые функции  $w, \dot{w}, \dot{u}_i$  и  $\dot{\bar{\epsilon}}_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$ ).

К равенствам (1)-(6) необходимо добавить двумерные уравнения динамического равновесия гибкой пластины [22] (их конечно-разностные аналоги приведены ниже).

Как и в работах [21,22], температуру в конструкции по координате  $x_3$  аппроксимируем полиномом порядка  $L$

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (7)$$

где  $\Theta_l$  ( $0 \leq l \leq L$ ) – подлежащие определению двумерные функции;  $\Theta^0 = \text{const}$  – температура естественного состояния КМ-пластины.

Для замыкания системы разрешающих уравнений неізотермического вязкоупругопластического деформирования армированной пластины к равенствам (1)-(7) необходимо присоединить двумерные приведенные уравнения

теплопроводности (см. (4.13) в [21]), а также соответствующие механические [22] и тепловые (см. (4.11) и (4.20) в [21]) граничные и начальные условия при  $t = t_0$ .

Как и в [20-22], для численного интегрирования рассматриваемой связанной нелинейной термомеханической задачи используем явную схему, т.е. искомые функции определяем в дискретные моменты времени  $t_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). При этом считаем, что при  $t_{n-1}$  и  $t_n$  заданы или уже определены значения следующих функций [20-22]

$$\begin{aligned} w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_l^{(p)}(\mathbf{x}) \equiv u_l^{(p)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}^m(t_m, \mathbf{r}), \\ \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad U^{(r)}(\mathbf{x}) \equiv U^{(r)}(t_n, \mathbf{x}), \quad q_i^n(\mathbf{r}) \equiv q_i^n(t_n, \mathbf{r}), \\ \Theta_s^m(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_s(t_m, \mathbf{x}), \quad \dot{\Theta}_s^{n-1}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\Theta}_s(t_{n-1}, \mathbf{x}), \quad q_\infty^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad e_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv e_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \\ \chi^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \chi^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad l = 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = n-1, n, \quad 0 \leq p \leq M+1, \\ &0 \leq r \leq L-2, \quad 0 \leq s \leq L, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} u_l^{(p)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_l(t, \mathbf{r}) x_3^p dx_3, \quad U^{(r)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^r dx_3, \\ \sigma_{ij}^m(t, \mathbf{r}) &= \sum_{k=0}^K \omega_k(\mathbf{x}) \sigma_{ij}^{(k)}(t, \mathbf{r}), \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k, \end{aligned} \quad (9)$$

$$l = 1, 2, \quad 0 \leq p \leq M+1, \quad 0 \leq r \leq L-2;$$

$U$  – удельная внутренняя энергия композиции пластины;  $\sigma_{ij}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ,  $e_{ij}^{(k)}$  – напряжения, полные и упругие деформации в  $k$ -м материале композиции ( $k = 0$  – связующая матрица,  $k \geq 1$  – арматура  $k$ -го семейства);  $\chi^{(k)}$  – параметр упрочнения в том же материале;  $q_i$  – компоненты осредненного теплового потока в композиции;  $q_\infty^{(\pm)}$  – известные тепловые потоки через нижнюю (–) и верхнюю (+) лицевые поверхности. Искомые двумерные функции  $w$ ,  $u_i$  и  $\bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $0 \leq m \leq M$ ) в соотношениях (1), (2) однозначно определяются через новые кинематические переменные  $u_i^{(p)}$  (см. (9)) [22].

В механической составляющей рассматриваемой задачи производные по  $t$  аппроксимируем конечно-разностными аналогами на трехточечном шаблоне по времени  $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ . Это позволяет получить явную численную схему. После замены вторых производных по времени от неизвестных кинематических переменных  $w$ ,  $u_i^{(p)}$  в уточненных уравнениях движения гибкой пластины их конечными разностями при учете соотношений (1), (5), (9) и обозначений типа (8) получим [22]

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\tau^2} \left( w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w^n \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\ \frac{\rho}{\tau^2} \left( u_i^{(l)} - 2u_i^{(l-1)} + u_i^{(l-2)} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w^n \right) - \\ &\quad - h^l \left[ \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w^n - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w^n, \end{aligned} \quad (10)$$

$\mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$

где

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \sum_{k=0}^K \rho_k \omega_k, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\ l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &\equiv l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \frac{h^l}{2} \left[ \left( \sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)} \right) \left( 1 - (-1)^l \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{l+1} \left( \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \left( 1 + (-1)^l \right) \right], \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq l \leq M + 1; \end{aligned} \quad (11)$$

$\rho_0, \rho_k$  – объемные плотности связующего материала и волокон  $k$ -го семейства;  $\tau = \text{const} > 0$  – шаг по времени. Объемными нагрузками в (10) пренебрегли. Осредненные напряжения в композиции  $\sigma_{ij}$  в выражениях (11) связаны с напряжениями в компонентах КМ  $\sigma_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = \overline{1, 3}, 0 \leq k \leq K$ ) соотношениями, приведенными в (9).

В текущий момент времени  $t_n$  на основании (11) и предположений (8) можно определить все внешние нагрузки  $\sigma_{33}^{(\pm)}$  и внутренние силовые факторы  $M_{ij}^{(l)}$ , которые входят в правые части уравнений (10). Поэтому, используя соответствующие начальные и граничные условия [22], из (10) по явной численной схеме можно получить значения искомых функций  $w, u_i^{(l)}$  в момент времени  $t_{n+1}$ .

Теплофизическую составляющую исследуемой связанной задачи также проинтегрируем с использованием явной численной схемы, но на двухточечном шаблоне  $\{t_n, t_{n+1}\}$ . Двумерные приведенные уравнения теплового баланса с учетом (7), (9) и обозначений, подобных (8), при этом можно записать так [21,22]

$$\frac{\rho}{\tau} \left( U^{(m+1)} - U^{(m)} \right) = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \overline{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}, \quad (12)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq L - 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$-\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} \left( l \lambda_{33}^{(-)} + h \alpha^{(-)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)} \left( \Theta_{\infty}^{(-)} - \Theta^0 \right) + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}),$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} \left( l \lambda_{33}^{(+)} + h \alpha^{(+)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)} \left( \Theta_{\infty}^{(+)} - \Theta^0 \right) - q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad (13)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0;$$

$$C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j + \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (14)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2,$$

где

$$H(s) \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} \left[ 1 - (-1)^{s+1} \right], \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 \quad (i = \overline{1,3}),$$

$$\overline{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = h^m \left[ q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)} \right] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}), \quad (15)$$

$$W^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} x_3^m dx_3, \quad C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^K c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0, 1, 2),$$

$$\lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33} \Big|_{\Theta = \Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)} \equiv q_3(t, \mathbf{x}, \pm h) = q_\infty^{(\pm)}(t, \mathbf{x});$$

$\lambda_{33}$  – эффективный коэффициент теплопроводности КМ в направлении  $x_3$ , который вычисляется по формулам (3.2) из [21];  $\alpha^{(\pm)}$  – коэффициент теплоотдачи со стороны нижней (–) и верхней (+) лицевых поверхностей;  $\Theta_\infty^{(\pm)}$  – температуры окружающей среды со стороны тех же плоскостей;  $c_l^{(k)}$  – коэффициенты квадратичной аппроксимации по экспериментальным данным удельной теплоемкости  $k$ -го материала композиции  $c_k$  в зависимости от температуры (случай термочувствительности)

$$c_k(\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)}(\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (16)$$

Соотношения (13) – это теплофизические граничные условия, заданные на лицевых поверхностях пластины и преобразованные с учетом представления температуры (7). Соотношение (14) связывает двумерные функции  $U^{(m)}$  (см. (9)) с коэффициентами в разложении (7) при учете выполнения равенства (16). Соотношения (13), (14) выполняются в произвольный момент времени  $t$ .

По формулам (15) с учетом предположений (8) в рассматриваемый момент времени  $t_n$  вычисляются правые части в уравнениях (12), после чего, используя необходимые граничные условия (заданные на контуре  $\Gamma$ , который ограничивает область  $\Omega$ ) и начальные условия для температуры [21], по явной схеме получаем

значения функций  $U^{(m)}$  при  $t = t_{n+1}$ . Затем, рассматривая в момент времени  $t_{n+1}$  уравнения (13) и (14), правые части в которых уже определены, при учете выражений (15) вычисляем коэффициенты  $\Theta_l^{(n+1)}(\mathbf{x})$  ( $0 \leq l \leq L$ ) в аппроксимации температуры (7). Если учитывается термочувствительность компонентов композиции, то система (13), (14) является нелинейной. Линеаризовать эту систему можно, например, методом переменных теплофизических параметров [21,22]. Далее разработанная численная схема, основанная на уравнениях (10), (12) при учете выражений (2), (6), (11), (15) и структурных соотношений, полученных в [20,21], реализуется так же, как описано в работах [20-22]. При



этом шаг по времени  $\tau$  в уравнениях (10), (12) следует задавать, учитывая необходимые условия устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви [4,20,21].

## 2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Как и в [20], исследуем неизотермическое вязкоупругопластическое динамическое деформирование изгибаемой КМ-пластины толщиной  $2h = 2$  см, занимающей в плане прямоугольную область  $\Omega: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, a = 3b; b = 50$  см ( $h/b = 1/50$ ). Кромки пластины жестко закреплены:  $w = 0, u_i^{(m)} = 0, \mathbf{x} \in \Gamma$  и  $t \geq t_0$  (см. формулы (9), (10)). До начального момента времени  $t_0 = 0$  конструкция покоится ( $w = 0, u_i^{(m)} = 0, \mathbf{x} \in \Omega, t \leq t_0, i = 1, 2$  и  $0 \leq m \leq M + 1$ ) в естественном состоянии при температуре  $\Theta = \Theta^0 = 20$  °С ( $\mathbf{x} \in \Omega, |x_3| \leq h$  и  $t \leq t_0$ ). При  $t = t_0$  пластина нагружается сверху или снизу давлением  $p(t)$ , вызванным приходом воздушной взрывной волны [24]

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\beta(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases}$$

$$\sigma_{33}^{(-)}(t) = \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad \sigma_{33}^{(+)}(t) = \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\beta = -\ln(0,01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (18)$$

$t_{\max}$  – время, при котором  $|p(t)|$  достигает максимального по модулю значения  $|p_{\max}|$ ;  $t_{\min}$  – время, при превышении которого  $|p(t)|$  становится пренебрежимо малым по сравнению с  $|p_{\max}|$  (в частности, соотношение (18) имеет место при  $p(t_{\min}) = 0,01 p_{\max}$ ). Из (17) получаем, что при  $p_{\max} > 0$  КМ-конструкция нагружается со стороны нижней, а при  $p_{\max} < 0$  – со стороны верхней лицевой плоскости. Используя экспериментальные данные [24], примем  $t_{\max} = 0,1$  мс,  $t_{\min} = 2$  мс и  $|p_{\max}| = 3$  МПа.

Теплообмен с окружающей средой через лицевые плоскости пластины ( $x_3 = \pm h$ ) реализуется в условиях естественной конвекции ( $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$  и  $\alpha^{(\pm)} = 30$  Вт / (м<sup>2</sup> · К) [25]), причем температура воздуха равна температуре естественного состояния КМ-пластины:  $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta^0$  (см. (13)). Кроме того, возможен предварительный нагрев конструкции за счет поступления в нее через верхнюю лицевую плоскость ( $x_3 = h$ ) стационарного теплового потока  $q_{\infty}^{(+)} = -3$  кВт/м<sup>2</sup>. На кромках пластины температура поддерживается также равной  $\Theta^0$  (граничные условия I рода [25]).

КМ-пластина изготовлена из эпоксисвязующего [13] и усилена стекловолокнами [12]. При постоянной температуре  $\Theta$  мгновенное активное

упругопластическое деформирование компонентов композиции описывается билинейной диаграммой

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где  $\sigma, \varepsilon$  – напряжение и деформация при растяжении-сжатии;  $E^{(k)} = E^{(k)}(\Theta)$ ,  $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta)$  – модули упругости и упрочнения  $k$ -го материала композиции;  $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta)$  – условный предел текучести того же компонента. Физико-механические характеристики материалов рассматриваемой композиции представлены в таблице, где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\eta$  – коэффициент линейной вязкости при сдвиге (объемная вязкость не учитывается),  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения,  $c$  – удельная теплоемкость. В расчетах зависимости характеристик от  $\Theta$  линейно аппроксимировались по данным, приведенным в таблице 1.

Таблица 1.

Физико-механические характеристики компонентов композиции [12,13].

Характеристика материала	Эпоксисвязующее		Стекланные волокна	
	$\Theta = 20^\circ\text{C}$	$\Theta = 100^\circ\text{C}$	$\Theta = 20^\circ\text{C}$	$\Theta = 100^\circ\text{C}$
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1210,0	1208,0	2520,0	2519,6
$E$ , ГПа	2,8	2,6	86,8	86,5
$\nu$	0,330	0,333	0,250	0,254
$\eta$ , МПа·с	340	300	1250	1200
$\sigma_s$ , МПа	20	15	4500	4400
$E_s$ , ГПа	1,114	0,763	6,230	6,079
$\lambda$ , Вт/(м·К)	0,243	0,236	0,89	0,86
$\alpha \cdot 10^6$ , К <sup>-1</sup>	68,1	73,2	2,5	2,6
$c$ , кДж / (кг·К)	1,54	1,71	0,80	0,84

Для дискретизации задачи по координатам  $x_1, x_2$  использовалась равномерная сетка с шагами  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50 = 1$  см; шаг же по времени  $\tau = 1$  мкс. При этом необходимые условия устойчивости численной схемы выполняются с запасом (см. (82) в [20]).

Пластина армирована двумя семействами волокон ( $K = 2$ ), ортогонально уложенных по направлениям  $Ox_1, Ox_2$  с плотностями  $\omega_1 = 0,1$  и  $\omega_2 = 0,3$  соответственно (см. рис.1). При этом углы армирования (см. рис.2) задаются значениями:  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ ,  $\varphi_1 = 0$  и  $\varphi_2 = \pi/2$ .

Как уже отмечалось, в данной работе исследуется влияние уточненной теории изгиба (см. (1), (2) и (10) при  $M = 7$  [22]) на расчетное динамическое поведение гибких армированных пластин при неизотермическом вязкоупругопластическом деформировании их материалов композиции.

Согласно этому, на рис.3 представлены осцилляции наибольших значений температуры  $\Theta_m(t; M, L) = \max_r \Theta(t, \mathbf{r}; M, L)$  в зависимости от времени  $t$  в случае отсутствия (рис.3а) и наличия (рис.3б) дополнительного теплового потока через верхнюю лицевую плоскость ( $q_\infty^{(+)} = -3 \text{ кВт} / \text{м}^2$ ). В последнем случае предполагается, что при  $t < t_0$  КМ-конструкция квазистатически деформируется и при  $t = t_0 = 0$  уже находится в неподвижном состоянии. Соответствующее этому предварительное напряженно-деформированное состояние пластины можно определить, например, методом установления. При таком тепловом нагружении к моменту времени  $t_0$  температура за пределами пограничных слоев, проникающих на глубину порядка толщины пластины, по координате  $x_3$  изменяется практически линейно. Наибольшее же значение стационарной температуры при этом достигается на верхней лицевой плоскости и равно  $\Theta^{(+)} \approx 93,3^\circ\text{C}$ , а на нижней лицевой плоскости  $\Theta^{(-)} \approx 46,7^\circ\text{C}$ , т.е. температурное поле по толщине конструкции существенно неоднородно.

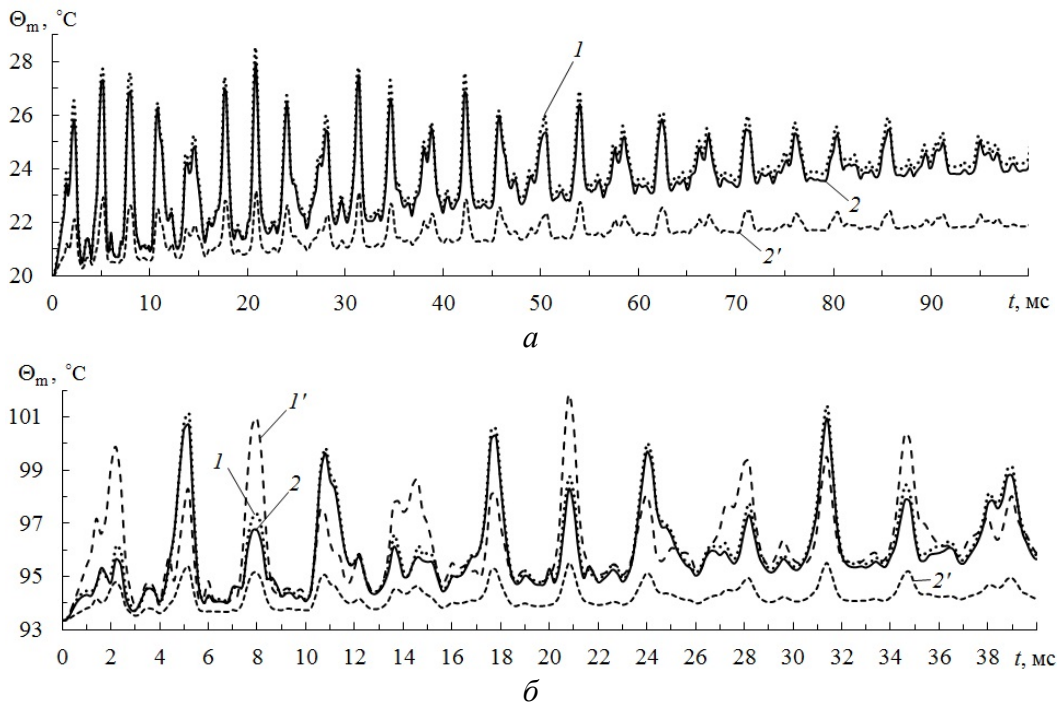


Рис.3. Зависимости от времени максимальных значений температуры в КМ-пластине, рассчитанные по разным теориям: а) случай  $q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$ ; б) случай  $q_\infty^{(+)} = -3 \text{ кВт} / \text{м}^2$ .

Кривые 1 и 2 на рис.3а рассчитаны по уточненной теории изгиба при  $M = 7$  (см. (1) и (2)) и по теории Амбарцумяна ( $M = 0$ ). При этом, согласно результатам работы [21], в разложении для температуры (7) принято  $L = 7$ . Кривая 2' приведена для сравнения и получена по теории Амбарцумяна при традиционном задании в (7) значения  $L = 2$ . (Кривая 2' полностью совпадает с кривой 1 на рис.3 в [20].) Кривые на рис.3а определены при  $p_{\max} = 3 \text{ МПа}$  (см. (17)). В случае же

$p_{\max} = -3$  МПа соответствующие зависимости  $\Theta_m(t)$  не отличаются от кривых, изображенных на рис.3а, так как при этом отсутствует дополнительный тепловой поток через верхнюю лицевую поверхность (условия теплообмена на обеих лицевых поверхностях одинаковы). Поведение кривых на рис.3а показывает, что к моменту времени  $t = 100$  мс осцилляции температуры значительно затухают, а при  $t \approx 200$  мс они практически прекращаются (см. рис.3 в [20]).

Сравнение кривой 2' с кривыми 1 и 2 на рис.3а свидетельствует о том, что при традиционной аппроксимации температуры  $\Theta$  полиномом второго порядка ( $L = 2$ ) по толщине пластины (кривая 2') в случае ее динамического вязкоупругопластического деформирования расчетный температурный отклик в КМ-конструкции определяется весьма грубо. Так, в момент времени  $t = 500$  мс, когда температурное поле в стеклопластиковой конструкции практически полностью стабилизируется, ординаты точек на кривых 1, 2 и 2' имеют соответственно значения  $24,7^\circ\text{C}$ ,  $24,4^\circ\text{C}$  и  $22,1^\circ\text{C}$ . Следовательно, при  $t = 500$  мс приращение температуры  $\Theta_m - \Theta^0$ , рассчитанное по теории из [20] (кривая 2'), вдвое меньше, аналогичных величин, рассчитанных с использованием разложения (7) при  $L = 7$  (кривые 1 и 2). Сопоставление кривых 1 и 2 на рис.3а демонстрирует, что использование уточненной теории изгиба КМ-пластины (кривая 1) приводит к незначительному уточнению максимальных значений температуры в конструкции по сравнению с расчетом по теории Амбарцумяна (кривая 2). В частности, согласно приведенным выше данным, при  $t = 500$  мс значения  $\Theta_m - \Theta^0$ , полученные по этим теориям, различаются всего на 6,4 %. При этом стеклопластиковая пластина после затухания осцилляций нагревается незначительно – примерно на  $4,5^\circ\text{C}$ .

Кривые 1, 2 и 2' на рис.3б получены при тех же условиях, что и аналогичные кривые на рис.3а, но при наличии дополнительного теплового потока, поступающего через верхнюю лицевую плоскость ( $q_\infty^{(+)} = -3$  кВт / м<sup>2</sup>), причем кривая 2' полностью совпадает с кривой 2 на рис.3 в [20]. Кривая 1' на рис.3б приведена для сравнения и рассчитана при тех же условиях, что и кривая 1, но при нагружении КМ-пластины сверху, т.е. при  $p_{\max} = -3$  МПа (см. (17)). Так как в этом случае температурное поле к начальному моменту времени  $t = t_0$  по толщине конструкции является существенно неоднородным (см. выше), то и зависимости  $\Theta_m(t)$  получаются существенно разными при приложении внешней нагрузки  $p(t)$  к верхней или нижней лицевой плоскости пластины, о чем свидетельствует поведение кривых 1 и 1' на рис.3б.

Сравнение поведения кривых 1, 2 и 2' на рис.3б приводит к результатам, качественно аналогичным тем, что получены выше для таких же кривых на рис.3а (при замене разности  $\Theta_m - \Theta^0$  на  $\Theta_m - \Theta^{(+)}$ ), поэтому не будем останавливаться на обсуждении этих кривых более подробно. Сопоставление же кривых 1 и 1' на рис.3б свидетельствует о том, что при предварительном неравномерном распределении температуры по толщине пластины ее температурный отклик в процессе вязкоупругопластических осцилляций существенно зависит от того, к какой лицевой поверхности прикладывается внешняя интенсивная кратковременная нагрузка взрывного типа (см. (17)). Сравнение глобальных

максимумов на кривых 1 и 2 (при  $t \approx 20,1$  мс на рис.3а и при  $t \approx 31,4$  мс на рис.3б) показывает, что наибольшее значение температуры в рассматриваемой конструкции, рассчитанное по теории Амбарцумяна (кривые 2) и по уточненной теории изгиба (кривые 1), различаются менее чем на  $0,6^\circ\text{C}$  при использовании уточненной аппроксимации температуры в (7) (при  $L = 7$ ).

Однако несмотря на то, что уточненная теория изгиба КМ-пластин приводит к незначительной поправке расчетного температурного отклика по сравнению со случаем применения теории Амбарцумяна, остаточные деформированные состояния компонентов композиции, определенные по этим теориям, могут все-таки существенно различаться.

На рис.4 представлены зависимости остаточных прогибов  $w(x_2)$  в центральном поперечном сечении пластины ( $x_1 = 0$ ), рассчитанные в момент времени  $t = 500$  мс при отсутствии (рис.4а) и наличии (рис.4б) дополнительного теплового потока через верхнюю лицевую поверхность ( $q_\infty^{(+)} = -3$  кВт / м<sup>2</sup>). К указанному моменту времени поперечные осцилляции КМ-конструкции практически полностью затухают.

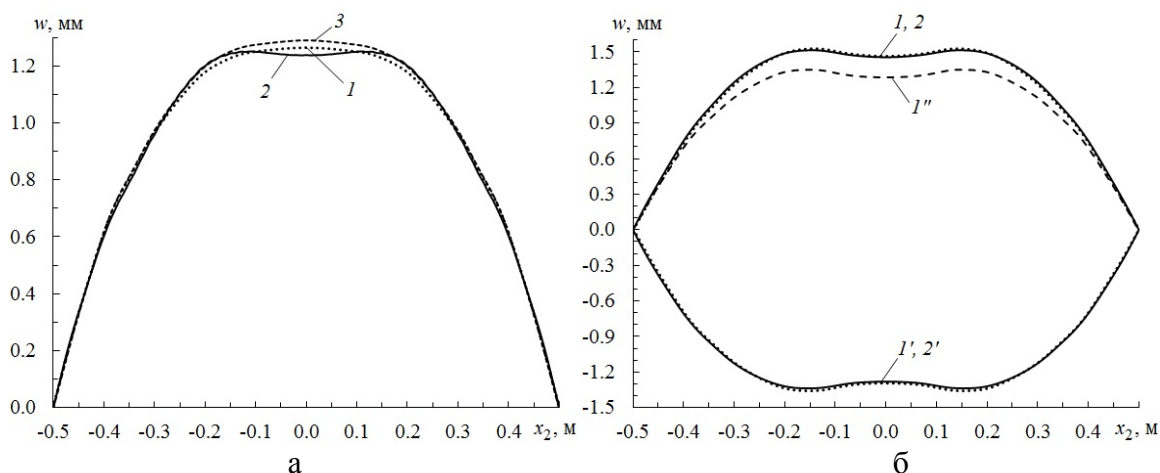


Рис.4. Остаточные прогибы КМ-пластины в сечении  $x_1 = 0$ , рассчитанные по разным теориям: а) случай  $q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$ ; б) случай  $q_\infty^{(+)} = -3$  кВт / м<sup>2</sup>.

Кривые 1 и 2 на рис. 4, а получены при тех же условиях, что и аналогичные кривые на рис.3а. Кривая 3 на рис.4а приведена для сравнения и определена по уточненной теории изгиба ( $M = 7$ ), но без учета теплового отклика в пластине (вязкоупругопластический расчет). Сравнение кривых 1 и 2 показывает, что при отсутствии дополнительных источников тепла немеханического происхождения ( $q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$ ) использование простейшей неклассической теории Амбарцумяна (кривая 2) приводит к качественно неверному представлению об остаточной форме КМ-пластины после ее нагружения взрывной волной. Действительно, кривая 2 на рис.4а имеет М-образную форму, а кривая 1 (уточненная теория изгиба) – традиционную П-образную форму. Это означает, что согласно теории Амбарцумяна рассматриваемая КМ-конструкция после прекращения осцилляций приобретает гофрированную форму со складками, вытянутыми в продольном направлении  $Ox_1$ . Согласно же расчету по уточненной теории изгиба, складчатая

остаточная форма пластины при этом не образуется. Сопоставление же кривых  $1$  и  $3$  на рис.4а показывает, что расчет динамики исследуемой конструкции по уточненной теории изгиба без учета теплового отклика в ней (кривая  $3$ ) приводит к завышению максимального значения остаточного прогиба в ней всего на 1,8% по сравнению со случаем неизотермического расчета (кривая  $1$ ), причем в обоих этих случаях формы остаточных прогибов качественно совпадают (являются  $\cap$ -образными).

Пунктирная  $1$  и сплошная  $2$  кривые на рис.4б получены при тех же условиях, что и аналогичные кривые на рис.4а, т.е. при нагружении пластины снизу ( $p_{\max} = 3$  МПа), но при наличии дополнительного теплового потока через верхнюю лицевую поверхность ( $q_{\infty}^{(+)} = -3$  кВт / м<sup>2</sup>). Пунктирная же  $1'$  и сплошная  $2'$  кривые на рис.4б определены при нагружении КМ-конструкции сверху ( $p_{\max} = -3$  МПа). Кривая  $1''$  изображена для удобства сравнения: она является отражением кривой  $1'$  относительно горизонтальной оси  $w = 0$ .

Так как кривые  $1$ ,  $2$  и  $1'$ ,  $2'$  визуально почти не различаются, то при наличии рассматриваемого дополнительного теплового потока через верхнюю лицевую плоскость использование уточненной теории изгиба (кривые  $1$  и  $1'$ ) практически не сказывается на поведении и величине остаточного прогиба по сравнению с расчетами, выполненными по теории Амбарцумяна (кривые  $2$  и  $2'$ ). Сравнение же кривых  $1$  на рис.4а,б демонстрирует, что наличие дополнительного теплового потока  $q_{\infty}^{(+)} = -3$  кВт / м<sup>2</sup> приводит как к качественному, так и количественному изменению формы и величины остаточного прогиба конструкции. Действительно, кривая  $1$  на рис.4б имеет М-образную форму, т.е. при  $q_{\infty}^{(+)} \neq 0$  после затухания осцилляций пластина приобретает гофрированную остаточную форму. Кривая же  $1$  на рис.4а имеет  $\cap$ -образную форму, т.е. при  $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$  после затухания поперечных колебаний стеклопластиковая конструкция, как уже отмечалось выше, не образует продольных складок. Кроме того, наибольшие ординаты точек на кривой  $1$  на рис.4б на 17,1% превышают значение аналогичной величины на кривой  $1$  на рис.4а.

Сравнение же кривых  $1$  и  $1''$  на рис.4б показывает, что при наличии неравномерного начального температурного поля по толщине пластины величина остаточного прогиба по модулю существенно зависит от того, к какой лицевой поверхности прикладывается внешняя нагрузка взрывного типа. Чем больше разность температур на лицевых плоскостях конструкции, тем ярче проявляется это различие. В частности, максимальные ординаты точек на кривой  $1$  на 11,9% больше, чем на кривой  $1''$ .

Еще большее различие в расчетах наблюдается при сравнении деформированного состояния компонентов композиции рассматриваемой конструкции. Так, на рис.5 изображены осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций эпоксисвязующего  $\varepsilon_*^{(0)} \left( \varepsilon_m^{(0)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r}) \right)$  в окрестности  $t = t_0 = 0$  (рис.5а) и при  $t \approx 500$  мс (рис.5б), рассчитанные в случае отсутствия дополнительного теплового потока через верхнюю лицевую плоскость ( $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$ ). Кривые на рис.5 получены при тех же условиях, что и аналогичные кривые на рис.4а. Кривые  $1$  и  $3$  на рис.5а визуально неразличимы (ординаты

точек глобальных максимумов на них различаются всего на 0,9%). Сравнение же кривых 1 и 2 показывает, что максимальные значения  $\varepsilon_{\max}^{(0)} = \max_{t \geq 0} \varepsilon_m^{(0)}(t)$ , достигаемые при  $t \approx 2,2$  мс, т.е. к моменту завершения действия внешней нагрузки (см.  $t_{\min}$  в (18)), различаются на 3,4%.

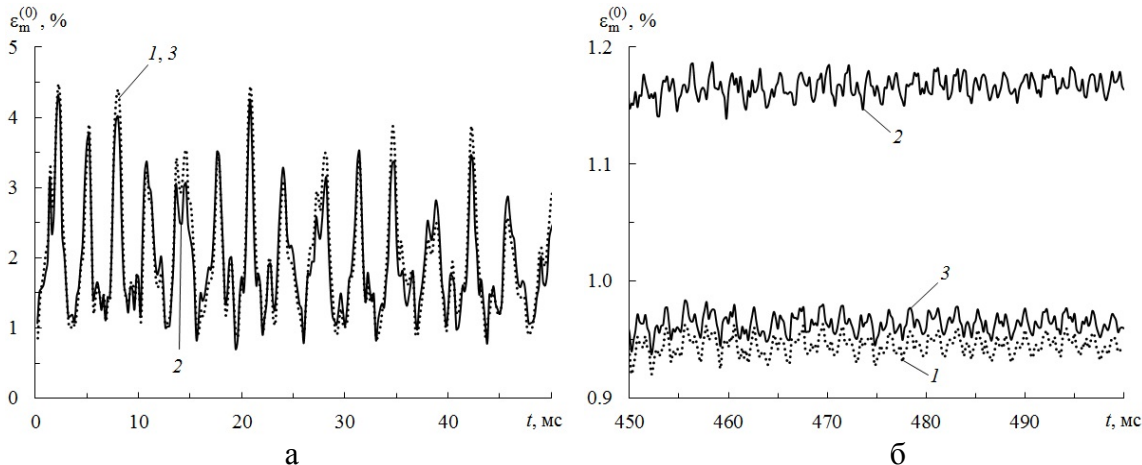


Рис.5. Зависимости от времени максимальных значений интенсивности деформаций эпокисвязующего, рассчитанные по разным теориям при  $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$  в окрестности начального момента времени (а) и при  $t \approx 500$  мс (б).

Сопоставление же кривых на рис.5б демонстрирует, что при  $t \approx 500$  мс, когда осцилляции почти полностью прекращаются, кривые 1 и 3 по-прежнему различаются мало (в частности, в момент времени  $t = 500$  мс ординаты точек на этих кривых различаются всего на 2%), различие же между кривыми 1 и 2 становится существенным (так, при  $t = 500$  мс ордината точки на кривой 2 превосходит аналогичную величину на кривой 1 на 23,3%).

Следовательно, при отсутствии дополнительных источников тепла немеханического происхождения ( $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$ ) динамический вязкоупругопластический расчет стеклопластиковой пластины можно проводить без учета температурного отклика в ней. Однако при этом необходимо использовать уточненную теорию изгиба, а не простейший ее вариант – традиционную неклассическую теорию Амбарцумяна, применение которой приводит к значительному завышению величины интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции и искажению остаточной формы КМ-конструкции.

На рис.6 представлены зависимости  $\varepsilon_m^{(0)}(t)$ , рассчитанные при наличии дополнительного теплового потока через верхнюю лицевую плоскость пластины ( $q_{\infty}^{(+)} = -3$  кВт/м<sup>2</sup>). Кривые на рис.6 определены при тех же условиях, что и одноименные кривые на рис.4б, причем на рис.6а,б изображены осцилляции  $\varepsilon_m^{(0)}(t)$  в окрестности начального момента времени, полученные при  $p_{\max} = 3$  МПа и  $p_{\max} = -3$  МПа соответственно, а на рис.6в – в окрестности

момента времени  $t = 500$  мс для обоих случаев нагружения пластины (снизу и сверху).

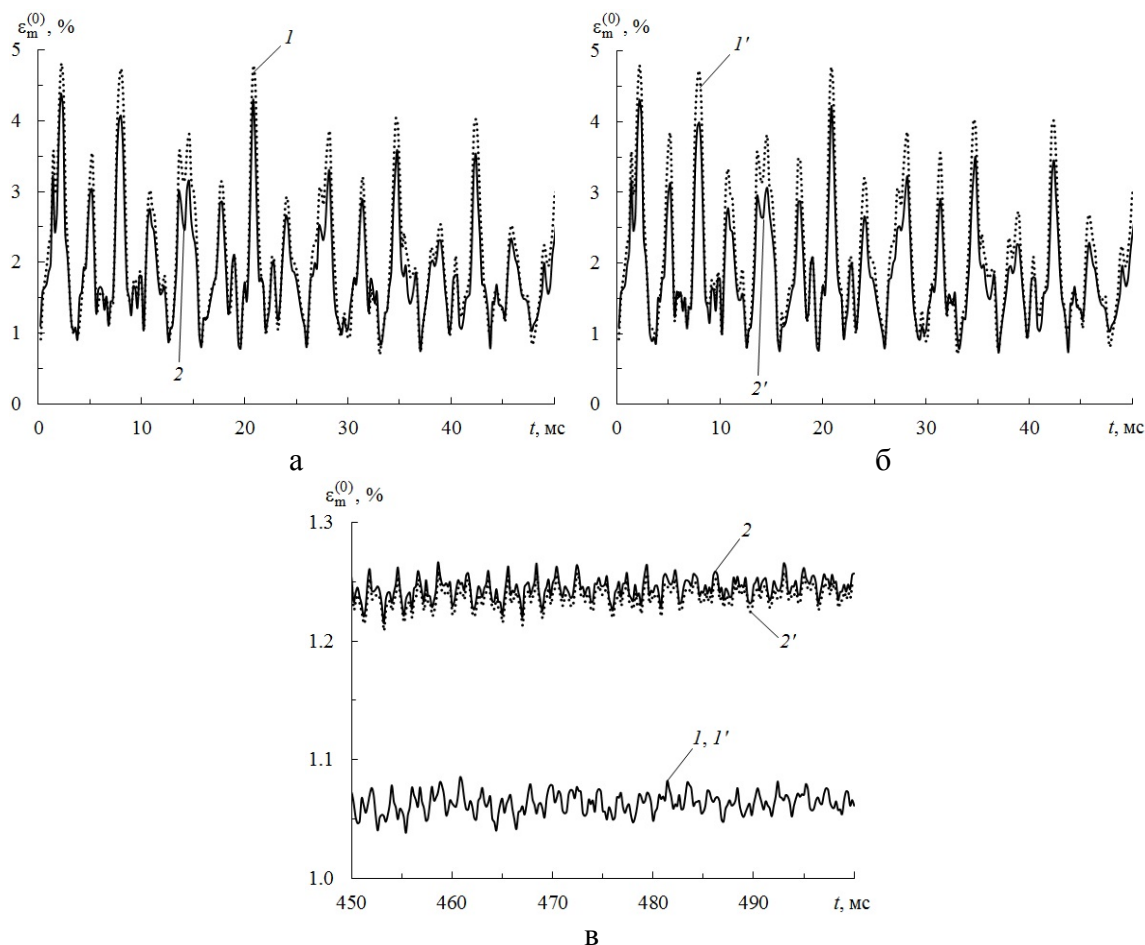


Рис.6. Зависимости от времени максимальных значений интенсивности деформаций эпоксисвязующего, рассчитанные по разным теориям в случае  $q_\infty^{(+)} = -3$  кВт/м<sup>2</sup>: а) при  $p_{\max} = 3$  МПа и  $t \approx 0$ ; б) при  $p_{\max} = -3$  МПа и  $t \approx 0$ ; в) при  $p_{\max} = \pm 3$  МПа и  $t \approx 500$  мс.

В отличие от рис.5а кривые 1, 2 на рис.6а и 1', 2' на рис.6б различаются существенно: в частности, значение  $\varepsilon_{\max}^{(0)}$  на кривой 2 (рис.6а), по-прежнему достигаемое при  $t \approx 2,2$  мс, меньше такой же величины на кривой 1 на 8,9%; аналогичные значения  $\varepsilon_{\max}^{(0)}$  на кривых 1' и 2' (рис.6б) различаются на 10,2%. Кривые 1, 1' и 2, 2' на рис.6в визуальнo почти не различаются. Следовательно, наличие дополнительного теплового потока через верхнюю лицевую поверхность КМ-пластины ( $q_\infty^{(+)} \neq 0$ ) практически не оказывает влияния на величину остаточных деформаций компонентов композиции в зависимости от того, к какой лицевой плоскости прикладывается внешняя нагрузка (но, согласно рис.4б, оказывает влияние на величину остаточного прогиба). При  $t = 500$  мс ординаты точек на кривых 1, 2 и 1', 2' (см. рис.6в) различаются на 18,9% и 17,9% соответственно, поэтому и при наличии внешнего теплового потока расчет



неупругой динамики стеклопластиковой пластины необходимо проводить по уточненной теории изгиба.

Ординаты точек на кривых *1* на рис.5б и 6в при  $t = 500$  мс различаются на 12,6%, а значит, наличие внешнего теплового потока через верхнюю лицевую плоскость (рис.6в) оказывает существенное влияние на величину интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции по сравнению со случаем отсутствия такого потока (рис.5б). И чем интенсивнее внешнее тепловое воздействие, тем существеннее это влияние.

## ВЫВОДЫ

Разработанная модель неизотермического вязкоупругопластического динамического деформирования гибких армированных пластин позволяет с разной степенью точности рассчитывать их термомеханическое поведение, а также остаточное состояние таких конструкций.

Как и в [21,22], расчеты показали, что для адекватного определения температурных полей в динамически изгибаемых КМ-пластинах температуру в их поперечном направлении следует аппроксимировать полиномом 7-го, а не 2-го порядка, как это традиционно принято делать при изучении квазистатического изгиба тонкостенных конструкций.

При отсутствии внешних источников тепла немеханического происхождения неупругую динамику стеклопластиковых пластин можно вполне обоснованно рассчитывать без учета температурного отклика в них, так как дополнительный нагрев таких конструкций не превышает 9°C. Однако в случае традиционной плоско-перекрестной структуры армирования для расчета динамического поведения стеклопластиковых пластин необходимо использовать уточненную теорию изгиба, а не ее простейший вариант – неклассическую теорию Амбарцумяна. В частности, применение теории Амбарцумяна может привести к качественно неверному представлению об остаточной форме КМ-пластины после прекращения ее поперечных колебаний и к значительно искаженным полям остаточных деформаций компонентов композиции.

Наличие предварительного теплового воздействия немеханического происхождения оказывает значительное влияние на неизотермическое вязкоупругопластическое динамическое деформирование КМ-пластин. Так, при неравномерном по толщине пластины предварительном ее нагреве (охлаждении) величина остаточного прогиба зависит от того, к какой лицевой поверхности конструкции прикладывается внешняя динамическая нагрузка взрывного типа. Расчет термомеханического неупругого динамического поведения стеклопластиковых пластин и при наличии источников тепла немеханического происхождения необходимо проводить на базе уточненной теории изгиба.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания.* – М.: Наука, 1987. – 360 с.
2. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек.* – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.
3. Куликов Г.М. *Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // Изв. РАН. МТТ.* – 1994. – №2. – С.33-42.

4. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
5. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis* / 2<sup>nd</sup> ed. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.
6. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses* // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2011. – Vol.46. – Pp.807-817.
7. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа*. – Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.
8. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. – Amsterdam: Elsevier, 2013. – 412 p.
9. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.
10. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics* / 4<sup>th</sup> ed. – Taylor & Francis Group, LLC, 2015. – 815 p.
11. Димитриенко Ю.И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах*. – М.: Физматлит, 2019. – 448 с.
12. Карпинос Д.М. *Композиционные материалы: Справочник*. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
13. Любин Дж. *Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1*. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
14. Vena P., Gastaldi D., Contro R. *Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites* // International Journal of Plasticity. – 2008. – Vol.24. – Pp.483-508.
15. Leu S.-Y., Hsu H.-C. *Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol.52. – Pp.1579-1587.
16. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. *Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle* // International Journal of Plasticity. – 2012. – Vol.36. – Pp.86-112.
17. Qatu M.S, Sullivan R.W., Wang W. *Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009* // Composite Structures. – 2010. – Vol.93. – Pp.14-31.
18. Alderliesten R.C., Benedictus R. *Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review* // Int. J. Impact Eng. – 2014. – Vol.67. – Pp.27-38.
19. Ахундов В.М. *Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях* // Механика композитных материалов. – 2015. – Т.51. – №3. – С.539-558.
20. Янковский А.П. *Моделирование неизотермического вязкоупругопластического поведения гибких армированных пластин* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2020. – Т.13. – №3. – С.350-370.
21. Янковский А.П. *Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин* // ПММ. – 2022. – Т.86. – №1. – С.121-150.

22. Янковский А.П. Уточненная модель термоупругопластического деформирования гибких армированных пластин // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №3. – С.293-312.
23. Reissner E. *The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates* // Journal of Applied Mechanics. – 1945. – Vol.12. – No.2. – Pp.69-77.
24. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading* // Computers & Structures. – 1987. – Vol.26. – No.1/2. – Pp.1-15.
25. Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М., Нечаев С.Г., Иванов И.Е., Матюхин Л.М., Морозов К.А. *Теплотехника: Учеб. для вузов. 4-е изд., испр.* – М.: Высшая школа, 2003. – 671 с.

### REFERENCES

1. Ambarcumian S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost', ustojchivost' i kolebaniya [The theory of anisotropic plates. Strength, stability and fluctuations]*. Moskva, Nauka, 1987, 360 p.
2. Bogdanovich A.E. *Nelinejnye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]*. Riga, Zinatne, 1987, 295 p.
3. Kulikov G.M. *Termouprugost' gibkikh mnogoslojnykh anizotropnykh obolochek [Thermo-elasticity flexible multilayered anisotropic shells]*. Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela, 1994, No.2, Pp.33-42.
4. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksij [Nonlinear problems of dynamics composites designs]*. Nizhnij Novgorod, Izdatel'stvo Nizhegorodskogo gosudarstvennogo universiteta, 2002, 400 p.
5. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2<sup>nd</sup> ed.* Boca Raton, CRC Press, 2004, 831 p.
6. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2011, Vol.46, Pp.807-817.
7. Andreev A.N. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotorye aspekty chislennogo analiza [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]*. Saarbrucken (Deutschland), Palmarium Academic Publishing, 2013, 93 p.
8. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. Amsterdam, Elsever, 2013, 412 p.
9. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]*. Moskva, Fizmatlit, 2014, 408 p.
10. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics / 4<sup>th</sup> ed.* Taylor & Francis Group, LLC, 2015, 815 p.
11. Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika kompozitnykh konstruksij pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of composite structures at high temperatures]*. Moskva, Fizmatlit, 2019, 448 p.
12. Karpinos D.M. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite materials. Reference Book]*. Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.

13. Lubin G. *Handbook of composites*. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, 442 p.
14. Vena P., Gastaldi D., Contro R. *Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites*. International Journal of Plasticity, 2008, Vol.24, Pp.483-508.
15. Leu S.-Y., Hsu H.-C. *Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders*. International Journal of Mechanical Sciences, 2010, Vol.52, Pp.1579-1587.
16. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. *Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle*. International Journal of Plasticity, 2012, Vol.36, Pp.86-112.
17. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. *Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009*. Composite Structures, 2010, Vol.93, Pp.14-31.
18. Alderliesten R.C., Benedictus R. *Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review*. Int. J. Impact Eng., 2014, Vol.67, Pp.27-38.
19. Akhundov V.M. *Incremental carcass theory of fibrous media under larger elastic and plastic deformations*. Mechanics of composite materials, 2015, Vol.51, No.3, Pp.539-558.
20. Yankovskii A.P. *Modeling of Nonisothermic Viscoelastic-Plastic Behavior of Flexible Reinforced Plates*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2022, Vol.63, No.7. Pp.1243-1263.
21. Yankovskii A.P. *Modeling of thermoelastic-visco-plastic deformation of flexible reinforced plates*. Mechanics of Solids, 2022, Vol.57, No.7. Pp.1717-1739.
22. Yankovskii A.P. *Utochnennaya model' termouprugoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh plastin [Refined model of thermo-elastic-plastic deformation of flexible reinforced plates]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2022, Vol.28, No.3, Pp.293-312.
23. Reissner E. *The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates*. Journal of Applied Mechanics, 1945, Vol.12, No.2, Pp.69-77.
24. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading*. Computers & Structures, 1987, Vol.26, No.1/2, Pp.1-15.
25. Lukanin V.N., Shatrov M.G., Camfer G.M., Nechaev S.G., Ivanov I.E., Matyukhin L.M., Morozov K.A. *Teplotekhnika. Uchebnik dlya vuzov. 4-e izdanie, ispravlennoe [Heat engineering. Textbook for universities]*. Moskva, Vysshaya shkola, 2003, 671 p.

Поступила в редакцию 12 июля 2023 года.

---

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с. лаборатории «Физики быстропротекающих процессов», ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)