УДК 539.4
EDN LNZAGU (https://elibrary.ru/lnzagu)
DOI 10.33113/mkmk.ras.2023.29.03.04

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В РАМКАХ ОБЪЕДИНЕННОЙ МОДЕЛИ ФАЗОВО-СТРУКТУРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С ИЗОТРОПНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ*

Мовчан А.А.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Вариант объединенной модели фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы (СПФ), учитывающий для структурного механизма деформирования только изотропное упрочнение с интегральным параметром, распространен на случай учета влияния вида напряженного состояния не только на процессы деформирования, как по фазовому, так и по структурному механизму, но и на сам процесс фазового перехода. Для учета этого влияния используется параметр вида девиатора напряжений, пропорциональный отношению третьего инварианта девиатора напряжений к кубу интенсивности напряжений. При моделировании фазового механизма деформирования для процесса прямого термоупругого превращения учитываются как процесс образования зародышей мартенсита, так и процесс их развития. При моделировании обратного термоупругого фазового превращения учитывается только процесс деградации мартенситных мезоэлементов до нулевого значения их объема. Сформулированы в явном виде выражения для приращений фазово-структурных деформаций, в том числе и для процессов, происходящих с изменением вида напряженного состояния. Установлено положение об активных процессах пропорционального нагружения. Найдены условия, при выполнении которых определяющие уравнения объединенной модели в приращениях могут быть проинтегрированы до решения краевой задачи, что приводит к конечным соотношениям между напряжениями и фазово-структурными деформациями, и существенно упрощает решения краевых задач. Представлена дифференциальная форма определяющего соотношения для параметра фазового состава – объемной доли мартенситной фазы, пригодная для описаний прямых и обратных термоупругих фазовых переходов, как в полных, так и в неполных циклах и учитывающая влияние на этот процесс изменений вида напряженного состояния.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; объединенная модель; изотропное упрочнение; интегральный параметр; влияние вида напряженного состояния

TAKING INTO ACCOUNT THE INFLUENCE OF THE STRESS STATE TYPE WITHIN THE FRAMEWORK OF THE SHAPE MEMORY ALLOYS COMBINED MODEL OF PHASE – STRUCTURAL DEFORMATION WITH ISOTROPIC HARDENING

Movchan A.A.

Institute of Applied Mechanics Russian Academy of Science, Moscow, Russia

* *Работа выполнена в рамках гос. задания ИПРИМ РАН, номер гос.регистрации 121112200126-5*

ABSTRACT

A variant of the shape-memory alloys phase-structural deformation combined model which takes into account only isotropic hardening with an integral parameter for the structural deformation mechanism, is extended to the case of taking into account the influence of the stress state type not only on the deformation processes both by phase mechanism and by the structural mechanisms, but also on the phase transition process itself. To account for this effect, a parameter of the type of stress deviator is used, proportional to the ratio of the third invariant of the stress deviator to the cube of stress intensity. When modeling the phase mechanism of deformation for the process of direct thermoelastic transformation, both the process of formation of martensite nuclei and the process of their development are taken into account. When modeling the reverse thermoelastic phase transformation, only the process of degradation of martensitic mesoelements to zero value of their volume is taken into account. Expressions are formulated explicitly for increments of phase–structural deformations, including for processes occurring with a change in the type of stress state. The proposition on active proportional loading processes is established. Conditions are found under which the constitutive equations of the incremental combined model can be integrated before the solving of the boundary value problem, which leads to finite relations between stresses and phase-structural deformations, and significantly simplifies the solution of boundary value problems. A differential form of the constitutive relation for the phase composition parameter, the volume fraction of the martensitic phase, is presented, suitable for describing direct and reverse thermoelastic phase transitions, both in total and incomplete cycles, and taking into account the influence of changes in the type of stress state on this process.

Keywords: shape memory alloys; combined model; isotropic hardening; integral parameter; influence of the type of stress state

ВВЕДЕНИЕ

Известные экспериментальные данные достаточно убедительно свидетельствуют о том, что для процессов неупругого (как фазового, так и структурного) деформирования СПФ наблюдается весьма существенное влияние вида напряженного состояния. Структурный механизм деформирования в чистом виде проявляется в опытах по изотермическому нагружению СПФ в полностью мартенситном фазовом состоянии (режим мартенситной неупругости). В [1] приведены диаграммы нагружения в режиме мартенситной неупругости образцов из равноатомного никелида титана при одноосном растяжении и сжатии. Диаграммы оказались существенно различными. Одной и той же деформации порядка 10% на диаграмме растяжения соответствует напряжение 350 МПа, а на диаграмме сжатия – 1050 МПа. Хотя «площадок текучести» нет ни на диаграмме растяжения, ни на диаграмме сжатия, упрочнение на диаграмме сжатия существенно больше, чем на диаграмме растяжения. В то же время, начальные участки нагружения (до напряжения порядка 200 МПа) для растяжения и сжатия совпадают. Модули разгрузки для растяжения и сжатия также близки.

В [2-4] приведены диаграммы растяжения и сжатия в режиме мартенситной неупругости образцов из поликристаллического сплава TiNi равноатомного в [4] и заникеленного в [3]. Установлены качественные и количественные различия этих диаграмм. Диаграммы растяжения имеют аналоги площадки текучести при полном отсутствии упрочнения [4] или с чрезвычайно малым упрочнением [3], тогда как диаграммы сжатия такой площадки не содержат и демонстрируют на всем своем протяжении весьма существенное упрочнение. Площадка текучести вырождается здесь в точку перегиба. Для не слишком малых значений деформации напряжения на диаграмме сжатия существенно (порядка двух раз) выше, чем на диаграмме растяжения. Аналогичные данные по сравнению диаграмм мартенситной неупругости при одноосном растяжении и сжатии приведены в [5].

Влияние вида напряженного состояния на фазовый механизм деформирования СПФ проще всего проследить по результатам опытов на накопление деформаций при прямом термоупругом фазовом превращении под действием постоянного напряжения и по форме диаграмм прямого превращения, т.е. графиков зависимости интенсивности деформации полного прямого превращения под действием постоянного напряжения от интенсивности этого напряжения. В [6] приведены, данные по прямому и последующему обратному превращению в образцах из поликристаллического СПФ CuAlZnMn под действием постоянного по модулю напряжения для случая одноосного растяжения и одноосного сжатия. В случае, когда модуль напряжения равен 100 МПа модуль деформации полного прямого превращения равен 0.03 и одинаков для растяжения и сжатия. В случае, когда модуль напряжения равен 300 МПа, для растяжения деформации полного прямого превращения равна 0.06, а для сжатия модуль деформации равен 0.05, т.е. наблюдается разносопротивляемость.

Диаграммы прямого превращения никелида титана при растяжении и сжатии приведены в [5]. Установлено существенное количественное различие между этими диаграммами, состоящее в том, что для значений модуля приложенного напряжения $|\sigma| > 100$ диаграмма сжатия идет существенно выше вдоль оси модуля напряжений, чем диаграмма растяжения. При $|\sigma| < 100$ диаграмма сжатия идет ниже диаграммы растяжения.

Наиболее подробно исследовано влияние вида напряженного состояния на диаграммы нагружения СПФ в режиме сверхупругости, т.е. изотермического нагружения при температуре начально аустенитного состояния. В таких процессах задействованы механизмы, как фазового, так и, особенно при сжатии, структурного перехода. В [7-9] приведены петли сверхупругого гистерезиса для никелида титана при растяжении и сжатии, полученные для одного и того же значения температуры. Продемонстрированы, как качественные, так и количественные различия этих петель. Переход от участка упругого нагружения к участку интенсивного накопления неупругих деформаций при растяжении происходит для напряжения 400 МПа, а для сжатия – при напряжении 650 МПа. Линия интенсивного возврата деформации при разгрузке для растяжения соответствует напряжению в 200 МПа, а для сжатия – напряжению в 400 МПа. Деформация точки окончания процесса интенсивного неупругого деформирования при растяжении чуть больше 6%, а при сжатии – чуть больше 3%. На диаграммах нагружения растягивающим напряжением ярко выражена «площадка текучести, на которой деформация растет при постоянном или почти постоянном напряжении. На диаграмме сжатия такой площадки нет, наблюдается заметное упрочнение. То же самое касается диаграмм разгрузки. Ширина петли сверхупругого гистерезиса вдоль оси напряжений существенно больше при сжатии, а вдоль оси деформаций – при растяжении. При разгрузке после достижения напряжением значения 1500 МПа в опыте на сжатие накопленная деформация порядка 4% полностью снимается. В то же время, при разгрузке после достижения растягивающим напряжением значения порядка

1200 МПа эффект снятия неупругих деформаций вообще отсутствует. Полностью снимается при растяжении деформация лишь в случае нагружения до 500 МПа, правда, эта деформация равна 6%. В [10-12] экспериментально установлено различие эффектов сверхупругости при одноосном растяжении и кручении в никелиде титана. В [13] сравниваются между собой диаграммы сверхупругого деформирования при растяжении, сжатии и сдвиге. Обнаружено, что различие между диаграмм сверхупругости для растяжения и сжатия существенно больше, чем разница между диаграммами растяжения и сдвига.

В ряде работ [14-16] определялись в пространстве напряжений условия начала вызванного напряжениями прямого превращения. Описаны результаты экспериментов по пропорциональному изотермическому нагружению трубчатых образцов внутренним давлением и осевой силой; осевой силой и крутящим моментом, а также испытания образцов, имеющих форму куба на двухосное сжатие. Тем самым исчерпан весь спектр двухосных напряженных состояний. Установлено в опытах на нагружение трубчатых образцов осевой силой и крутящим моментом [16], что интенсивность напряжений, соответствующая началу вызванного напряжениями прямого превращения при растяжении равна 400 МПа, для кручения та же величина равна 450 МПа, а для сжатия – больше 500 МПа. Определены направления в пространстве главных напряжений векторов неупругих деформаций. Установлено, что эти направления ортогональны поверхности начала фазового перехода, т.е. справедлив ассоциированный с этой поверхностью закон деформирования.

Анализ известных экспериментальных данных по влиянию вида напряженного состояния на поведение изотропных (поликристаллических без текстуры) СПФ позволяет сделать следующие выводы. Вид напряженного состояния влияет как на фазовый, так и на структурный механизм деформирования СПФ, причем влияние на структурный механизм более существенно, чем на фазовый. Различаются эти два воздействия и в качественном плане. Так, при переходе от сжатия к растяжению принципиально меняется формы диаграммы мартенситной неупругости (появляется площадка текучести) в то время как форма диаграммы прямого фазового превращения таких кардинальных качественных изменений не претерпевает. Наблюдается также существенное влияние вида напряженного состояния на характерные температуры фазовых переходов.

Шаровая часть тензора напряжений практически не влияет на поведение СПФ при фазовых и структурных превращениях. Следовательно, изотропное поведение СПФ определяется значениями двух инвариантов девиатора напряжений, точнее, единственным независимым параметром вида девиатора напряжений (т.е. инвариантом девиатора напряжений, являющимся однородной функцией нулевой степени от его компонент).

Феноменологический подход к описанию разносопротивляемости СПФ осуществлялся в работах [17-24]. В конечном счете, рассмотрение в этих работах сводится к введению потенциала неупругого деформирования Ф, который зависит от инвариантов тензора напряжений. Скорость неупругой деформации считается пропорциональной производной от этого потенциала по компонентам тензора напряжений. В случае, если потенциал Ф зависит только от второго инварианта девиатора напряжений J2 (интенсивности напряжений), получается обычная Мизесовская модель, не учитывающая разносопротивляемость СПФ. В работах [18,20,23] считается, что потенциал Ф зависит, кроме интенсивности напряжений, еще и от первого инварианта тензора напряжений I1: Ф=Ф(J2,I1), т.е. произведена попытка в рамках единой зависимости описать как формоизменение, так и объемное деформирование СПФ. В частности, в [20,23] потенциал Ф считается линейной функцией, как интенсивности напряжений, так и I1. В результате оказывается, что скорость неупругой деформации складывается из девиаторной составляющей и объемной части. Объемная часть скорости деформации в рамках такой модели не зависит от действующих напряжений вообще, что соответствует экспериментальным данным. В то же время девиатор скорости деформации соосен девиатору приложенных напряжений и является однородной функцией нулевой степени от компонент девиатора напряжений, т.е. не зависит от интенсивности напряжений. Последнее обстоятельство противоречит экспериментальным данным по накоплению деформации прямого превращения и является серьезным недостатком моделей такого типа.

В [19,21] рассматривается вариант модели, где потенциал Ф зависит от второго и третьего инвариантов девиатора напряжения Ф=Ф(J2,J3). В работе [22] предложена модель деформирования СПФ, в рамках которой учитываются все три инварианта: Ф=Ф(I1,J2,J3). В работах [16,24] предлагается учитывать влияние параметра вида деформированного состояния на процессы, происходящие в СПФ.

Необходимо отметить, что в рамках упомянутых выше моделей не учитывается принципиальное различие фазовых и структурных механизмов неупругого деформирования СПФ [25-28]. В частности, не учитываются качественные и количественные различия влияния вида напряженного состояния на процессы фазового и структурного деформирования СПФ.

Целью данной работы является моделирование влияния вида напряженного состояния на процессы фазового и структурного деформирования СПФ в рамках модели [27], учитывающей принципиальное различие соответствующих механизмов такого деформирования и их взаимного влияния. Построена также модель влияния вида нагряженного состояния на процессы прямых и обратных фазовых превращений.

1. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

В рамках модели механического поведения СПФ, описывающей только изотропное упрочнение для структурного механизма деформирования этих материалов, использование ненаследственного параметра упрочнения в виде максимального значения интенсивности осредненной [25] или собственной [26] фазово-структурной деформации даже для описания эффектов мартенситной неупругости невозможно [29], поэтому речь в данном случае может идти только о модели с наследственным (интегральным) параметром упрочнения [27,30,31]. Рассматривается следующая модификация этой модели, учитывающая влияние вида напряженного состояния

$$d\varepsilon_{ij}^{ph}{}' = \left[\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_u}\rho_{D1}(\mu_\sigma)\varphi_1(\sigma_u,\mu_\sigma)\big(1-qf(q)\big)+f(q)\,\varepsilon_{ij}^{phst}{}'\right]dq, \qquad (1.1)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph}{}' = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst}{}'}{q}dq, \qquad (1.2)$$

$$\rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)q\varphi_2\left(\sigma_u^*,\mu_\sigma\right)=\int d\chi,\quad d\chi=\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_u}d\varepsilon_{ij}^{phst}{}',\tag{1.3}$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st}=d\lambda\sigma_{ij}'.\tag{1.4}$$

Здесь соотношение (1.1) определяет приращение девиатора фазово-структурных деформаций $\varepsilon_{ij}^{phst}{}'$ за счет прямого фазового перехода $d\varepsilon_{ij}^{ph}{}'$, т.е. в случае $dq>0$, где q – объемная доля мартенситной фазы, σ_{ij}', σ_u – интенсивность напряжений; (1.2) – то же за счет обратного фазового перехода, т.е. в случае $dq<0$. Объемный эффект реакции термоупругого фазового перехода описывается соотношением $d\varepsilon_{kk}^{phst}=3\varepsilon_0 dq$, где ε_0 – линейная деформация объемного эффекта фазового превращения (параметр материала, от вида напряженного состояния не зависящий).

Соотношение (1.3) определяет поверхность нагружения с центром в начале координат пространства девиатора напряжений и радиусом σ_u^*, зависящим от параметра деформационного изотропного упрочнения χ и параметра вида девиатора напряжений μ_σ. Параметр χ отличается от часто используемого в теории пластичности параметра в виде работы напряжений на приращении неупругих деформаций тем, что в данном случае речь идет о работе безразмерных напряжений, отнесенных к σ_u. Соотношение (1.4) – ассоциированный с поверхностью нагружения закон течения для приращения фазово-структурной деформации за счет структурного перехода $d\varepsilon_{ij}^{st}$. Величина $d\varepsilon_{ij}^{st}\neq 0$ в случае, если точка, изображающая напряженное состояние лежит на поверхности нагружения, т.е. текущее значение интенсивности напряжений σ_u удовлетворяет уравнению (1.3), и $d\lambda>0$. Материальная функция $f\left(q\right)$ определяет соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов при прямом превращении. Ее значение удовлетворяет неравенству $0\le f\left(q\right)<1/q$, причем значение $f\left(q\right)=0$ соответствует случаю, когда процесс развития мартенситных элементов не учитывается (модель не учитывает эффекта ориентированного превращения). В случае $f\left(q\right)=1/q$ уравнение (1.1), описывающее процесс прямого превращения, переходит в уравнение (1.2), описывающее процесс обратного превращения.

Влияние вида напряженного состояния на процесс деформирования СПФ учитывается за счет зависимости материальных параметров ρ_{D1}, ρ_{D2} и материальный функций φ_1, φ_2 от параметра вида девиатора напряжений μ_σ, определяемого по формуле

$$\mu_\sigma=\frac{27}{2}\frac{I\left(\sigma_{ij}'\right)}{\left(\sigma_u\right)^3},\tag{1.5}$$

где $I_3\left(\sigma_{ij}'\right)=\frac{1}{6}\mathrm{E}_{ijk}\sigma_{im}'\sigma_{jq}'\sigma_{ks}'\mathrm{E}_{mqs}$ – инвариант девиатора напряжений σ_{ij}' (система координат здесь и ниже декартова), E_{ijk} – тензор Леви–Чивиты [32,33]. Параметр (1.5) для описания влияния вида напряженного состояния на процесс деформирования СПФ предложено использовать в [34,15,16]. Он может быть выражен по формуле

$$\mu_\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{E}_{ijk}\sigma_{im}'\sigma_{jq}'\sigma_{ks}'\mathrm{E}_{mqs}}{\left(\sigma_{rt}'\sigma_{rt}'\right)^{3/2}}. \qquad (1.6)$$

Учитывая, что в декартовой системе координат справедливо соотношение [32,33]

$$\mathrm{E}_{mnp}\mathrm{E}_{ijk} = \det\begin{bmatrix} \delta_{im} & \delta_{jm} & \delta_{km} \\ \delta_{in} & \delta_{jn} & \delta_{kn} \\ \delta_{ip} & \delta_{jp} & \delta_{kp} \end{bmatrix},$$

где δ_{ij} – дельта Кронекера, для любого симметричного тензора второго ранга s_{ij} можно получить

$$\mathrm{E}_{mnp}\mathrm{E}_{ijk}s_{mi}s_{nj}s_{pk} = \left(s_{rr}\right)^3 - 3s_{kk}s_{ij}s_{ij} + 2s_{ij}s_{jk}s_{ki},$$

$$\mathrm{E}_{mnp}\mathrm{E}_{ijk}ds_{mi}s_{nj}s_{pk} = s_{rr}\left(s_{rr}ds_{rr} - 2s_{ij}ds_{ij}\right) + 2s_{ik}s_{kj}ds_{ij} - s_{ij}s_{ij}ds_{rr},$$

$$\mathrm{E}_{ijk}E_{mnp}s_{jn}s_{kp} = s_{rr}\left(s_{rr}\delta_{im} - s_{im}\right) + s_{ip}s_{pm} - s_{jk}s_{jk}\delta_{im}.$$

Для девиатора напряжений первый инвариант равен нулю и поэтому

$$\mathrm{E}_{ijk}\mathrm{E}_{mqs}\sigma_{im}'\sigma_{jq}'\sigma_{ks}' = 2\sigma_{ij}'\sigma_{jk}'\sigma_{ki}', \qquad (1.7)$$

$$\mathrm{E}_{mnp}d\sigma_{mi}'\sigma_{nj}'\sigma_{pk}'\mathrm{E}_{ijk} = 2\sigma_{ik}'\sigma_{kj}'d\sigma_{ij}',$$

$$\mathrm{E}_{ijk}E_{mnp}\sigma_{jn}'\sigma_{kp}' = \sigma_{ip}'\sigma_{pm}' - \sigma_{jk}'\sigma_{jk}'\delta_{im}. \qquad (1.8)$$

В результате выражение (1.6) упрощается

$$\mu_\sigma = \sqrt{6}\frac{\sigma_{ij}'\sigma_{jk}'\sigma_{ki}'}{\left(\sigma_{rt}'\sigma_{rt}'\right)^{3/2}}. \qquad (1.9)$$

В дальнейшем понадобятся формулы для производных

$$\frac{\partial\sigma_u}{\partial\sigma_{im}'} = \frac{3}{2}\frac{\sigma_{im}'}{\sigma_u}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial\sigma_{im}'} = \frac{1}{2}\mathrm{E}_{ijk}\sigma_{jq}'\sigma_{ks}'\mathrm{E}_{mqs},$$

$$\frac{\partial\mu_\sigma}{\partial\sigma_{im}'} = \frac{27}{8}\frac{2\mathrm{E}_{ijk}\sigma_{jq}'\sigma_{ks}'\mathrm{E}_{mqs}\left(\sigma_u\right)^2 - 3\sigma_{im}'\mathrm{E}_{rjk}\sigma_{rt}'\sigma_{jq}'\sigma_{ks}'\mathrm{E}_{tqs}}{\left(\sigma_u\right)^5}.$$

Или, учитывая (1.7), (1.8), (1.9)

$$\frac{\partial\mu_\sigma}{\partial\sigma_{im}'} = \frac{27}{2}\frac{\sigma_{ip}\sigma_{pm} - \sigma_{jk}\sigma_{jk}\delta_{im}}{\left(\sigma_u\right)^3} + \frac{9}{2}\mu_\sigma\frac{\sigma_{im}'}{\left(\sigma_u\right)^2}. \qquad (1.10)$$

В результате для величины $d\mu_\sigma$ получается

$$d\mu_\sigma = \frac{\partial\mu_\sigma}{\partial\sigma_{im}'}d\sigma_{im}' = \frac{27}{2}\frac{\sigma_{ik}'\sigma_{kj}'d\sigma_{ij}'}{\left(\sigma_u\right)^3} + 3\mu_\sigma\frac{d\sigma_u}{\sigma_u}. \qquad (1.11)$$

В случае процесса, происходящего при монотонном пропорциональном изменении компонент девиатора напряжений выполняется $\mu_\sigma = const$, и результаты, даваемые этой моделью, не будут отличаться от результатов, даваемых аналогичной моделью, не учитывающей влияние вида напряженного состояния [27,30,31]. Поэтому уравнение диаграммы накопления деформации прямого превращения под действием постоянного напряжения с интенсивностью σ_u имеет вид $\varepsilon_u^{phst} = \rho_{D1}\left(\mu_\sigma\right)\varphi_1\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right)$. Уравнение диаграммы мартенситной неупругости при монотонном пропорциональном нагружении имеет вид $\varepsilon_u^{phst} = \rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)\varphi_2\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right)$.

Здесь ε_u^{phst} – интенсивность фазово-структурной деформации, функции $\varphi_k\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right)$, $k=1,2$ определены, непрерывны, неотрицательны, монотонно возрастают по первому аргументу и обладают свойством $\lim\limits_{\sigma\to+\infty}\varphi_k\left(\sigma,\mu_\sigma\right)=1$. Поэтому величина $\rho_{D1}\left(\mu_\sigma\right)$ представляет собой точную верхнюю грань интенсивности фазово-структурной деформации, которая может быть достигнута при прямом превращении под действием постоянного напряжения с достаточно большой интенсивностью и фиксированным значением μ_σ. Аналогично $\rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)$ представляет собой точную верхнюю грань значения интенсивности фазово-структурной деформации, которая сможет быть достигнута при монотонном пропорциональном нагружении (при фиксированном значении μ_σ) в режиме мартенситной неупругости. Наличие аргумента μ_σ у функций ρ_{D1} и ρ_{D2} необходимо для описания зависимости этих предельных значений интенсивности деформации от вида напряженного состояния. Наличие аргументов μ_σ у функций φ_k $k=1,2$ необходимо, поскольку от вида напряженного состояния зависят не только предельные значения интенсивности деформаций, но и форма соответствующих диаграмм.

В общем случае непропорционального нагружения возникает проблема определения множителя $d\lambda$ в законе течения (1.4). Пусть точка, изображающая напряженной состояние находится на поверхности нагружения и двигается вместе с этой поверхностью т.е. соотношение (1.4) выполняется для $\sigma_u^*=\sigma_u$. Дифференцируя в этих условиях соотношение (1.4), получаем

$$d\left[\rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)q\varphi_2\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right)\right]=d\chi=\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_u}d\varepsilon_{ij}^{phst}{}'. \tag{1.12}$$

Согласно (1.12) параметр упрочнения растет в том случае, если приращение девиатора фазово-структурной деформации направлено вне поверхности нагружения и убывает в противоположном случае. В случае процессов с $\sigma_{ij}'=\text{const}$ величина $d\chi$ пропорциональна с положительным коэффициентом величине dq, т.е. χ возрастает при прямом превращении и убывает при обратном. При $q=\text{const}$, $\mu_\sigma=\text{const}$ величина χ монотонно возрастает с ростом σ_u.

Подставляя в правую часть (1.12) выражение

$$d\varepsilon_{ij}^{phst}{}'=d\varepsilon_{ij}^{ph}{}'+d\varepsilon_{ij}^{st} \tag{1.13}$$

с учетом (1.4) для случая фазового превращения, происходящего одновременно со структурным переходом можно получить

$$d\left[\rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)q\varphi_2\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right)\right]=\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_u}d\varepsilon_{ij}^{ph}{}'+\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_u}d\lambda\sigma_{ij}'=\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_u}d\varepsilon_{ij}^{ph}{}'+\frac{2}{3}\sigma_u d\lambda. \tag{1.14}$$

Из (1.14) получается явное выражение для $d\lambda$

$$d\lambda=\frac{3}{2}\frac{d\left[\rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)q\varphi_2\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right)\right]-\sigma_{mn}'d\varepsilon_{mn}^{ph}{}'/\sigma_u}{\sigma_u}. \tag{1.15}$$

Дифференциальное условие активного нагружения $d\lambda>0$ имеет вид

$$d\left[\rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)q\varphi_2\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right)\right]=d\chi>\frac{\sigma_{mn}'d\varepsilon_{mn}^{ph}{}'}{\sigma_u}. \tag{1.16}$$

С использованием формул (1.4) и (1.15) находим

$$d\varepsilon_{ij}^{st}=\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_u}d\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)q\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)\right]-\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'\sigma_{mn}{}'}{(\sigma_u)^2}d\varepsilon_{mn}^{ph}{}'.$$

Используя еще раз формулу (1.13) получаем

$$d\varepsilon_{ij}^{phst}{}'=\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_u}d\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)q\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)\right]-\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'\sigma_{mn}{}'}{(\sigma_u)^2}\right)d\varepsilon_{mn}^{ph}{}'. \quad (1.17)$$

Подставляя в (1.17) выражение для $d\varepsilon_{mn}^{ph}{}'$ (1.1) получаем формулировку закона течения

$$d\varepsilon_{ij}^{phst}{}'=\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_u}d\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)q\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)\right]+f(q)\left[\delta_{im}\delta_{jn}-\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'\sigma_{mn}{}'}{(\sigma_u)^2}\right]\varepsilon_{mn}^{phst}{}'dq. \quad (1.18)$$

При выводе (1.18) использовано легко проверяемое равенство

$$\frac{\sigma_{mn}{}'}{\sigma_u}\left[\delta_{im}\delta_{jn}-\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'\sigma_{mn}{}'}{(\sigma_u)^2}\right]=0. \quad (1.19)$$

Сравнение (1.16) и (1.12) свидетельствует о том, что дифференциальное условие активного нагружения (1.16) и условие роста параметра упрочнения $d\chi>0$ не эквивалентны. Если выполнено дифференциальное условие активного нагружения и при этом $\sigma_{mn}{}'d\varepsilon_{mn}^{ph}{}'\geq 0$, т.е. приращение девиатора фазовой деформации направлено вне поверхности нагружения, то параметр упрочнения обязательно будет возрастать. Если же $\sigma_{mn}{}'d\varepsilon_{mn}^{ph}{}'<0$, т.е. приращение деформаций за счет фазового механизма направлено внутрь поверхности нагружения, но при этом $0>d\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)q\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)\right]>\frac{\sigma_{mn}{}'d\varepsilon_{mn}^{ph}{}'}{\sigma_u}$, то параметр упрочнения в активном процессе будет убывать, и, вместе с ним, в процессах с $\mu_\sigma=\mathrm{const},\ q=\mathrm{const}$ будет убывать радиус поверхности нагружения.

При выполнении условия $\sigma_u=\sigma_u^*$ рост параметра упрочнения, или, что то же при $q=\mathrm{const},\ \mu_\sigma=\mathrm{const}$, рост радиуса поверхности нагружения в случае $\sigma_{mn}{}'d\varepsilon_{mn}^{ph}{}'<0$ (приращение девиатора деформации за счет фазового механизма направлено внутрь поверхности нагружения) обязательно приводит к активному процессу структурного перехода. Если же приращение девиатора деформации за счет фазового перехода направлено вне поверхности нагружения, радиус поверхности нагружения при $\mu_\sigma=\mathrm{const}$ растет $(d\chi>0)$, но $\sigma_{mn}{}'d\varepsilon_{nm}^{ph}{}'>d\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)q\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)\right]>0$, активный процесс не происходит (поверхность нагружения расширяется за счет фазового перехода быстрее, чем растет интенсивность напряжений). Изложенные выше особенности отличают рассматриваемую здесь модель структурного деформирования СПФ от классических моделей теории пластического течения [35-37].

Для дальнейшего в правой части (1.18) полезно выделить слагаемые $d\varepsilon_{ij}^{phst}{}'$, пропорциональные dq и приращению компонент девиатора напряжений

$$d\varepsilon_{ij}^{phst}{}' = \left\{\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_u}\rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)\varphi_2\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right) + f\left(q\right)\left[\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'\sigma_{mn}}{\left(\sigma_u\right)^2}\right]\varepsilon_{mn}^{phst}{}'\right\}dq +$$

$$+\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_u}qd\left[\rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)\varphi_2\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right)\right].$$

Введем обозначение

$$d\left[\rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)\varphi_2\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right)\right] = \Sigma_{mn}^{(2)}d\sigma_{mn}{}', \tag{1.20}$$

где

$$\Sigma_{mn}^{(2)} = \left\{\left[\varphi_2\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right)\rho_{D2}{}'\left(\mu_\sigma\right) + \rho_{D1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mu_\sigma}\right]\frac{\partial\mu_\sigma}{\partial\sigma_{mn}{}'} + \frac{3}{2}\rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\sigma_u}\frac{\sigma_{mn}{}'}{\sigma_u}\right\}. \tag{1.21}$$

С учетом (1.6), (1.11) выражение (1.21) принимает вид

$$\Sigma_{mn}^{(2)} = \frac{9}{2}\left\{\left(\varphi_2\frac{d\rho_{D2}}{d\mu_\sigma} + \rho_{D2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mu_\sigma}\right)\left(\frac{3}{2}\frac{\mathrm{E}_{njk}\sigma_{jq}{}'\sigma_{ks}{}'\mathrm{E}_{mqs}}{\left(\sigma_u\right)^3} + \mu_\sigma\frac{\sigma_{mn}{}'}{\left(\sigma_u\right)^2}\right) + \rho_{D2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\sigma_u}\frac{\sigma_{mn}{}'}{\sigma_u}\right\}.$$

Или, после использования (1.8) получается

$$\Sigma_{mn}^{(2)} = \frac{9}{2}\left\{\left(\varphi_2\frac{d\rho_{D2}}{d\mu_\sigma} + \rho_{D2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mu_\sigma}\right)\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ns}{}'\sigma_{sm}{}' - \sigma_{jk}{}'\sigma_{jk}{}'\delta_{mn}}{\left(\sigma_u\right)^3} + \mu_\sigma\frac{\sigma_{mn}{}'}{\left(\sigma_u\right)^2}\right) + \rho_{D2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\sigma_u}\frac{\sigma_{mn}{}'}{\sigma_u}\right\}.$$

Тогда для свертки $\Sigma_{mn}^{(2)}d\sigma_{mn}{}'$ находим

$$\Sigma_{mn}^{(2)}d\sigma_{mn}{}' = \frac{9}{2}\left\{\left(\varphi_2\frac{d\rho_{D2}}{d\mu_\sigma} + \rho_{D2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mu_\sigma}\right)\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ns}{}'\sigma_{sm}{}'}{\left(\sigma_u\right)^3} + \mu_\sigma\frac{\sigma_{mn}{}'}{\left(\sigma_u\right)^2}\right) + \rho_{D2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\sigma_u}\frac{\sigma_{mn}{}'}{\sigma_u}\right\}d\sigma_{mn}{}',$$

т.к. слагаемое $\sigma_{jk}{}'\sigma_{jk}{}'\delta_{mn}$ в выражении для $\Sigma_{mn}^{(2)}$ пропадает, поскольку дает ноль при сворачивании с девиатором $d\sigma_{mn}{}'$. Вводя обозначения

$$\Lambda_{ij}^{+} = \left\{\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_u}\rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)\varphi_2\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right) + f\left(q\right)\left[\delta_{im}\delta_{jk} - \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'\sigma_{mn}}{\left(\sigma_u\right)^2}\right]\varepsilon_{mn}^{phst}{}'\right\},$$

$$\Theta_{ijmn} = \frac{3}{2}q\frac{\sigma_{ij}{}'\Sigma_{mn}^2}{\sigma_u}$$

закон деформирования (1.18) для случая одновременно происходящих прямого фазового превращения и структурного перехода можно представить в следующей явной форме

$$d\varepsilon_{ij}^{phst}{}' = \Lambda_{ij}^{+}dq + \Theta_{ijmn}d\sigma_{mn}{}'. \tag{1.22}$$

Если рассматривается упрощенная модель прямого превращения, не учитывающая развитие мартенситных элементов, то $f\left(q\right) = 0$, соотношение (1.18) упрощается

$$d\varepsilon_{ij}^{phst}{}' = \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_u}d\left[\rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)q\varphi_2\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right)\right] \tag{1.23}$$

и будет справедливо соотношение (1.22), с тем же значением Σ_{mn}^2, но более простым выражением для $\Lambda_{ij}^{+} = \Lambda_{ij}^{+0} = \left\{\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_u}\rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)\varphi_2\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right)\right\}$.

Поскольку уравнение для приращения фазово-структурных деформаций за счет прямого фазового превращения (1.1) переходят в аналогичные уравнения для обратного превращения (1.2), если в первом уравнении положить $f(q)=1/q$, то получить явный закон течения для случая одновременно происходящих обратного фазового и структурного перехода можно, положив в (1.18) $f(q)=1/q$

$$d\varepsilon_{ij}^{phst}{}' = \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_u} d\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma) q\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)\right] + \frac{1}{q}\left[\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}'\sigma_{mn}'}{(\sigma_u)^2}\right]\varepsilon_{mn}^{phst}{}' dq. \tag{1.24}$$

Таким образом, для обратного превращения будет справедливо то же самое выражение (1.22), с теми же выражениями для Θ_{ijmn} и Σ_{mn}, но другой формулой для $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}^{-}$, где

$$\Lambda_{ij}^{-} = \left\{\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_u}\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma) + \frac{1}{q}\left[\delta_{im}\delta_{jk} - \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}'\sigma_{mn}}{(\sigma_u)^2}\right]\varepsilon_{mn}^{phst}{}'\right\}.$$

С использованием формулы (1.22) можно получить $\sigma_{ij}'\Lambda_{ij}^{\pm} = \sigma_i\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)$, $\sigma_{ij}'\Theta_{ijmn}^{2} = q\sigma_u\Sigma_{mn}^{2}$ и, согласно (1.22)

$$\sigma_{ij}' d\varepsilon_{ij}^{phst}{}' = \sigma_u\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)dq + q\Sigma_{mn}^{2} d\sigma_{mn}'\right]. \tag{1.25}$$

Причем эта формула справедлива, как для прямого, так и для обратного фазовых превращений, сопровождаемых структурным переходом.

Для случая, когда фазовые переходы отсутствуют, но происходит структурное превращение, в формулах (1.18) или (1.24) следует положить $dq=0$. Кроме того, из-под знака дифференциала в первом слагаемом правой части постоянную в данном случае величину q можно вынести за знак дифференциала. В результате получается

$$d\varepsilon_{ij}^{phst}{}' = \frac{3}{2} q \frac{\sigma_{ij}'\Sigma_{mn}^{2}}{\sigma_u} d\sigma_{mn}'. \tag{1.26}$$

Если происходят фазовые переходы без структурного, то $\Theta_{ijmn} = \Sigma_{mn}^{(2)} = 0$ и

$$d\varepsilon_{ij}^{phst}{}' = \Lambda_{ij}^{\pm 0} dq,\quad \Lambda_{ij}^{+0} = \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_u}\varphi_1(\sigma_i,\mu_\sigma)\left(1 - qf(q)\right) + f(q)\varepsilon_{ij}^{phst}{}',$$
$$\Lambda_{ij}^{-0} = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst}{}'}{q}. \tag{1.27}$$

Согласно (1.27), величины $\Lambda_{ij}^{\pm}$ являются множителями правых частей уравнений (1.1) и (1.2) для приращений неупругих деформаций СПФ за счет прямого и обратного фазовых переходов соответственно.

Формулы (1.18) и (1.24) отличаются от выведенных в [30] для модели, не учитывающей влияние вида напряженного состояния лишь тем, что величина ρ_{D2} подведена под знак дифференциала в первом слагаемом правой части (1.18) и (1.24), что существенно, поскольку в рамках развиваемой модели ρ_{D2} зависит от, вообще говоря, меняющегося параметра μ_σ. Кроме того, при выводе формулы для $d\lambda$ учитывается зависимость функции φ_2 не только от σ_u, но и от μ_σ.

Согласно (1.18), (1.23) для активных процессов, включающих в себя структурный переход и прямое превращение, выражение для приращения фазово-структурных деформаций зависит только от материальных функций $\rho_{D2}(\mu_\sigma)$, $\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)$, определяющих диаграмму мартенситной неупругости (структурного превращения) и не зависят от материальных функций $\rho_{D1}(\mu_\sigma)$, $\varphi_1(\sigma_u,\mu_\sigma)$, определяющих диаграмму прямого превращения. В случае если используется модель, учитывающая развитие мартенситных элементов при прямом превращении, приращение фазово-структурных деформаций зависит еще и от функции $f(q)$. История прямого превращения входит в эти уравнения через девиатор фазово-структурной деформации $\varepsilon_{ij}^{phst}{}'$ для модели, учитывающей процесс развития мартенситных элементов [30] (1.18). Такое влияние отсутствует вообще, в рамках упрощенной модели [29], развития мартенситых элементов не учитывающей (1.23). Для обратного превращения, происходящего одновременно со структурным переходом, приращение фазово-структурных деформаций зависит только от материальных функций $\rho_{D2}(\mu_\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)$, определяющих диаграмму структурного перехода.

Дифференциальное условие активного нагружения (в смысле структурного перехода) $d\lambda>0$, для прямого превращения и структурного перехода, согласно (1.15) и (1.1) можно представить в виде

$$d\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)q\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)\right]-$$
$$-\left[\rho_{D1}(\mu_\sigma)\varphi_1(\sigma_u,\mu_\sigma)\left(1-qf(q)\right)+f(q)\frac{\sigma_{mn}{}'}{\sigma_u}\varepsilon_{mn}^{phst}{}'\right]dq>0$$

или, выделяя слагаемое, пропорциональное dq, получаем

$$d\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)\right]+$$
$$+\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)-\rho_{D1}(\mu_\sigma)\varphi_1(\sigma_u,\mu_\sigma)\left(1-qf(q)\right)-f(q)\frac{\sigma_{mn}{}'}{\sigma_u}\varepsilon_{mn}^{phst}{}'\right]\frac{dq}{q}>0. \qquad (1.28)$$

С учетом (1.20) можно получить

$$\Sigma_{mn}^{(2)}d\sigma_{mn}{}'+\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)-\rho_{D1}(\mu_\sigma)\varphi_1(\sigma_u,\mu_\sigma)\left(1-qf(q)\right)-f(q)\frac{\sigma_{mn}{}'}{\sigma_i}\varepsilon_{mn}^{phst}{}'\right]\frac{dq}{q}>0.$$

Для модели прямого превращения, не учитывающей развитие мартенситных мезоэлементов $f(q)=0$ и дифференциальное условие активного нагружения (1.28) упрощается:

$$d\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)\right]>\left[\rho_{D1}(\mu_\sigma)\varphi_1(\sigma_u,\mu_\sigma)-\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)\right]\frac{dq}{q}$$

или

$$\Sigma_{mn}^{(2)}d\sigma_{mn}{}'>\left[\rho_{D1}(\mu_\sigma)\varphi_1(\sigma_u,\mu_\sigma)-\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)\right]\frac{dq}{q}. \qquad (1.29)$$

Для случая, когда происходит структурный переход без фазового, дифференциальное условие активного нагружения находится из (1.28), если положить $dq=0$. В результате получается $d\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)\right]>0$ или

$$\Sigma_{mn}^{(2)}d\sigma_{mn}{}'>0. \qquad (1.30)$$

Согласно экспериментальным данным [38] интенсивность деформации полного прямого превращения под действием постоянного напряжения с девиатором $\sigma_{ij}{}'$ всегда превосходит интенсивность деформаций структурного перехода при монотонном пропорциональном нагружении из состояния полностью сдвойникованного ненагруженного мартенсита до напряжения с девиатором $\sigma_{ij}{}'$. Отсюда следует выполнение неравенства $\rho_{D1}(\mu_\sigma)\varphi_1(\sigma_u\mu_\sigma) > \rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)$. Поэтому правая часть (1.29) для прямого превращения $(dq > 0)$ всегда больше нуля. Поэтому дифференциальное условие активного нагружения при наличии прямого превращения (1.29) всегда является более жестким, чем такое же условие в отсутствии прямого превращения (1.30).

Для случая одновременно происходящих обратного превращения и структурного перехода дифференциальное условие активного процесса имеет вид

$$d\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma)\right] + \left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma) - \frac{1}{q}\frac{\sigma_{mn}{}'}{\sigma_i}\varepsilon_{mn}^{phst}{}'\right]\frac{dq}{q} > 0$$

или

$$\Sigma_{mn}^{(2)} d\sigma_{mn}{}' + \left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma) - \frac{1}{q}\frac{\sigma_{mn}{}'}{\sigma_u}\varepsilon_{mn}^{phst}{}'\right]\frac{dq}{q} > 0. \tag{1.31}$$

Условие (1.31) может быть получено из (1.28), если в этом неравенстве положить $f(q) = 1/q$.

2. ПОЛОЖЕНИЕ ОБ АКТИВНЫХ ПРОЦЕССАХ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Пусть происходит пропорциональное нагружения, под которым понимается пропорциональное изменение компонент девиатора напряжений

$$\sigma_{ij}{}' = \sigma\sigma_{ij}^0, \ \sigma_{ij}^0 = \text{const}, \quad 3\sigma_{ij}^0\sigma_{ij}^0/2 = 1, \qquad \sigma_u = |\sigma|, \tag{2.1}$$

при котором σ не меняет знак. Легко видеть, что в таком процессе величина $\mu_\sigma = \text{const}$. Если в таком процессе, или на некотором его этапе происходит только структурный переход без фазового, то, следуя (1.4) будет $d\varepsilon_{ij}^{phst}{}' = d\varepsilon_{ij}^{st} = d\lambda\sigma_u\sigma_{ij}^0$. Если в начальной точке этого этапа, когда $\sigma_u = \sigma_u^0$ выполнялось условие

$$\varepsilon_{ij}^{phst}{}' = \frac{3}{2}\varepsilon_0\sigma_{ij}^0, \tag{2.2}$$

где ε_0 – некоторый скаляр, то и в каждой точке этого этапа будет выполняться такое же соотношение (2.2) с некоторым, вообще говоря, меняющимся множителем ε. Коэффициент 3/2 добавлен в (2.2) для того, чтобы постоянный тензор $\varepsilon_{ij}^0 = 3\sigma_{ij}^0/2$ имел единичную интенсивность по формуле интенсивности деформаций $2\varepsilon_{ij}^0\varepsilon_{ij}^0/3 = 1$. Тогда, путем решения (1.26) можно получить, что в каждой точке последующего процесса будет выполняться

$$\varepsilon_{ij}^{phst}{}' = \sigma_{ij}^0\left[\frac{3}{2}\varepsilon^0 + q\rho_{D2}(\mu_\sigma)\left(\varphi_2(\sigma_u,\mu_\sigma) - \varphi_2(\sigma_u^0,\mu_\sigma)\right)\right]. \tag{2.3}$$

Таким образом, в случае отрезка пропорционального нагружения в режиме мартенситной неупругости, при условии, что фазово-структурная деформация в начальной точке фрагмента пропорциональна направляющему девиатору σ_{ij}^0, фазово-структурная деформация на всем протяжении фрагмента и, в том числе в его последней точки, будет пропорциональна σ_{ij}^0. Следует отметить, что, согласно (2.3) решение $\varepsilon_{ij}^{phst}{}'$ для текущего значения параметра нагружения σ зависит только от начальной и конечной точек, но не зависит от истории изменения σ между ними.

Пусть на некотором участке рассматриваемого процесса пропорционального нагружения с постоянным девиатором σ_{ij}^0 происходит только прямое фазовое превращение без структурного, причем в начальной точке процесса при $q = q_0$ выполняется начальное условие (2.2). Параметр нагружения $\sigma = \sigma(q)$ может при этом, как убывать, так и возрастать с ростом q. Единственное требование состоит в том, чтобы структурного превращения при этом не происходило. Тогда уравнение (1.1) имеет решение

$$\varepsilon_{ij}^{phst}{}' = \frac{3}{2}\varepsilon\sigma_{ij}^0, \tag{2.4}$$

где функция $\varepsilon(q)$ является решением дифференциального уравнения

$$d\varepsilon = \left[\rho_{D1}(\mu_\sigma)\varphi_1(|\sigma|,\mu_\sigma)(1 - qf(q)) + f(q)\varepsilon\right]dq \tag{2.5}$$

при начальном условии $\varepsilon(q_0) = \varepsilon_0$. Таким образом, и для фрагмента прямого превращения, происходящего под действием пропорционального нагружения (2.1), в случае, если в его начальной точке выполняется соотношение (2.2), в каждой точке процесса, включая последнюю, девиатор фазово-структурной деформации будет меняться пропорционально с тем же направляющим девиатором σ_{ij}^0. В данном случае (прямого превращения без структурного перехода), в случае, если $\sigma \neq \text{const}$, решение (2.5), (2.4) для $\varepsilon_{ij}^{phst}{}'$ зависит не только от начальной $q = q_0$, $\sigma = \sigma(q_0)$ и конечной $q = q_{\max}$, $\sigma = \sigma(q_{\max})$ точек процесса, но и от истории изменения параметра σ в промежуточных точках процесса.

Исключение представляет собой случай прямого превращения при постоянном значении девиатора напряжений, который можно трактовать как частный случай пропорционального нагружения, поскольку выполняется условие (2.1) при $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$. В этом случае коэффициент уравнения (2.5) $\rho_{D1}(\mu_{\sigma_0})\varphi_1(|\sigma_0|,\mu_{\sigma_0})$ сохраняет постоянное значение ρ_0, само уравнение представляется в виде

$$\frac{d(\varepsilon - \rho_0 q)}{\varepsilon - \rho_0 q} = f(q)dq$$

и имеет решение

$$\varepsilon = \rho_0 q + (\varepsilon(q_0) - \rho_0 q_0)\exp\left(\int_{q_0}^{q} f(\xi)d\xi\right),$$

зависящее только от начальной и конечной точек процесса, но не зависящее от того, что происходит между этими точками.

Точно такое же утверждение при том же начальном условии (2.2) справедливо для фрагмента процесса, сводящемуся к обратному фазовому превращению без структурного, поскольку, в отсутствии структурного превращения уравнение, описывающее этот процесс (1.2) сводится к следующему

$$d\varepsilon_{ij}^{phst}{}' = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst}{}'}{q} dq$$

и имеет при начальном условии

$$\varepsilon_{ij}^{phst}{}'(q_0) = \frac{3}{2}\varepsilon_0\sigma_{ij}^0.$$

Решение

$$\varepsilon_{ij}^{phst}{}'(q) = \frac{3}{2}\varepsilon_0 q\sigma_{ij}^0. \qquad (2.6)$$

Т.е. и в этом случае при пропорциональном нагружении и соответствующем начальном условии изменение фазово-структурной деформации в каждой точке процесса, включая его последнюю точку, будет пропорционально девиатору σ_{ij}^0. Следует отметить, что в данном случае решение (2.6) зависит только от начальной $q = q_0$ и от конечной $q = q_{\min}$ точки процесса, но не зависит от того, что происходит между этими точками.

Далее рассматривается случай фрагмента процесса пропорционального нагружения (2.1), на котором происходит одновременно, как структурный переход, так и фазовое (прямое или обратное) превращение. Пусть в начальной точке процесса для $\sigma = \sigma_0$, $q = q_0$ опять выполняется условие (2.2). Покажем с помощью подстановки, что в этом случае соответствующим уравнениям (1.18) или (1.24) удовлетворяют решения вида (2.4).

Действительно, легко видеть, что подстановка выражения $\varepsilon_{ij}^{phst}{}' = \frac{3}{2}\varepsilon\sigma_{ij}^0$ во второе слагаемое правых частей (1.18) или (1.24) при условии, что $\sigma_{ij}{}' = \sigma\sigma_{ij}^0$, аналогично с (1.19) обращает эти слагаемые в ноль

$$\left[\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}{}'\sigma_{mn}{}'}{(\sigma_u)^2}\right]\varepsilon_{mn}^{phst}{}' = \frac{3}{2}\varepsilon\sigma_{ij}^0 - \frac{3}{2}\frac{\sigma^2\sigma_{ij}^0\sigma_{mn}^0\frac{3}{2}\varepsilon\sigma_{mn}^0}{(\sigma_u)^2} = 0.$$

Учитывая этот факт, подстановка решения (2.4) в любое из уравнений (1.18) или (1.24) приводит к соотношению

$$d\varepsilon = d\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma) q\varphi_2(\sigma_u, \mu_\sigma)\right], \qquad (2.7)$$

а начальное условие (2.2) принимает вид

$$\varepsilon\left(q_0, \sigma_u^0\right) = \varepsilon_0. \qquad (2.8)$$

Решение задачи (2.7), (2.8) записывается в форме

$$\begin{gathered} \varepsilon(q,\sigma) = \varepsilon_0 + \rho_{D2}(\mu_\sigma)\left[q\varphi_2(|\sigma|, \mu_\sigma) - q_0\varphi_2(|\sigma_0|, \mu_\sigma)\right], \\ \varepsilon_{ij}^{phst}{}'(q,\sigma) = \frac{3}{2}\left\{\varepsilon_0 + \rho_{D2}(\mu_\sigma)\left[q\varphi_2(|\sigma|, \mu_\sigma) - q_0\varphi_2(|\sigma_0|, \mu_\sigma)\right]\right\}\sigma_{ij}^0. \end{gathered} \qquad (2.9)$$

Решение (2.9) зависит только от начальной и конечной точек процесса и не зависит от истории изменения параметров между этими точками.

Полученный здесь результат можно сформулировать следующим образом. Рассматривается процесс пропорционального термомеханического нагружения

СПФ (2.1) (частным случаем которого являются процессы, происходящие под действием постоянного напряжения). В начальной точке процесса выполняется условие (2.2), частным случаем которого является и нулевое начальное условие. Рассматриваемый фрагмент может состоять из частей, соответствующих прямому или обратному фазовым переходам, не сопровождающихся структурным превращением, структурному превращению без фазовых переходов или же фазовым (прямому или обратному) превращениям, происходящим одновременно со структурным превращением. В течение всего такого процесса девиатор фазово-структурной деформации будет меняться пропорционально (2.4) с тем же направляющим девиатором σ_{ij}^{0}.

Если каждая часть описанного в предыдущем абзаце процесса пропорционального нагружения включает в себя структурный переход (сопровождающийся или нет фазовым превращением), или сводится к обратному фазовому превращению без структурного перехода, или сводится к прямому фазовому превращению без структурного, происходящему при постоянном значении девиатора напряжений, то значение девиатора фазово-структурной деформации в каждой точке такого процесса зависит только от начальной и конечной точек и не зависит от истории изменения параметров на промежуточных участках процесса. Тогда определяющее соотношение в приращениях может быть проинтегрировано до решения краевой задачи. Таким образом, дифференциальное определяющее уравнение для девиатора фазово-структурных деформаций сводится к конечному соотношению, определяющему эту величину через начальные условия и значения параметров в начальной и конечной точке процесса. В результате процесс решения краевой задачи существенно упрощается.

Таким образом, для объединенной модели деформирования СПФ [27] справедлив аналог положения об активных процессах пропорционального нагружения, ранее установленный в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов при фазовых и структурных превращениях [39,40]).

Необходимо отметить, что для справедливости положения и соответствующих формул (2.9) обязательно выполнение дифференциального и интегрального условий активного нагружения в смысле структурного перехода. Для случаев одновременно происходящего прямого превращения и структурного перехода, дифференциальное условие активного нагружения, согласно (1.28), имеет вид

$$\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2'\left(|\sigma|,\mu_\sigma\right)+$$
$$+\left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2\left(|\sigma|,\mu_\sigma\right)-\rho_{D1}(\mu_\sigma)\varphi_1\left(|\sigma|,\mu_\sigma\right)\left(1-qf(q)\right)-f(q)\operatorname{sign}(\sigma)\varepsilon\right]\frac{dq}{q}>0$$

В рамках упрощенной модели прямого превращения, не учитывающей развитие мартенситных элементов дифференциальное условие активного нагружения имеет для этапа пропорционального нагружения вид, мало отличающийся от (1.29)

$$\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2'\left(|\sigma|,\mu_\sigma\right)d|\sigma|>\left[\rho_{D1}(\mu_\sigma)\varphi_1\left(|\sigma|,\mu_\sigma\right)-\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2\left(|\sigma|,\mu_\sigma\right)\right]\frac{dq}{q}.$$

Если происходит только структурное превращение без фазового перехода при пропорциональном нагружении, из (1.30), с учетом монотонного возрастания функции $\varphi_2(\sigma_i, \mu_\sigma)$ по первому аргументу следует простейшее условие активного нагружения $d|\sigma| > 0$.

Для случая одновременно происходящих обратного превращения и структурного перехода дифференциальное условие активного нагружения (1.31) имеет вид

$$\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2'(|\sigma|, \mu_\sigma)d|\sigma| + \left[\rho_{D2}(\mu_\sigma)\varphi_2(|\sigma|, \mu_\sigma) - \operatorname{sign}(\sigma)\frac{\varepsilon}{q}\right]\frac{dq}{q} > 0.$$

Необходимо отметить, что если в начальной точке некоторого процесса пропорционального нагружения выполнено недифференциальное условие активного нагружения

$$\rho_{D2}(\mu_\sigma)q\varphi_2(\sigma_u, \mu_\sigma) = \int \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_u} d\varepsilon_{ij}^{phst}{}', \tag{2.10}$$

а в каждой точке последующего процесса выполняются сформулированные выше дифференциальные условия, то во всех этих точках условие (2.10) также будет выполнено (его справедливость можно не проверять). Если требование о пропорциональном нагружении выполняется с самого начала процесса, то условию (2.10) можно придать вид

$$\rho_{D2}(\mu_\sigma)q\varphi_2(|\sigma|, \mu_\sigma) = \int \operatorname{sign}(\sigma)d\varepsilon.$$

Доказанное здесь положение существенно отличается от установленного в [39,40]. Дело в том, что ранее установленный вариант при наличии, как прямого фазового, так и структурного переходов справедлив лишь в случае выполнения равенств $\varphi_1 = \varphi_2$, $\rho_{D1} = \rho_{D2}$, которые для реальных СПФ, как правило, не выполняются [5]. Установленное здесь положение в рамках объединенной модели, для своей справедливости выполнения этих равенств не требует. Сами формулировки положения также существенно отличаются.

3. УЧЕТ ВЛИЯНИЕ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА ИЗМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРА ФАЗОВОГО СОСТАВА

Для случая прямого превращения в [40] исходя из термодинамических соображений получены следующие конечные соотношения для параметра фазового состава

$$q = \varphi(t), \quad \varphi(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\pi t^{\sigma+}\right)\right) \text{ при } 0 \le t^{\sigma+} \le 1 \tag{3.1}$$

$$\varphi(t) = 0 \text{ при } t \le 0, \quad \varphi(t) = 1 \text{ при } t \ge 1,$$

$$t^{\sigma+} = \left(M_s^\sigma - T\right) \big/ \left(M_s^0 - M_f^0\right), \quad t^+ = \left(M_s^0 - T\right) \big/ \left(M_s^0 - M_f^0\right),$$

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \omega_{ij}^+ \sigma'_{ij} \big/ \Delta S + Z\left(\sigma_{ij}\right) \big/ \Delta S + \sigma_{kk}\varepsilon_0 \big/ (\Delta S),$$

$$\omega_{ij}^+ = \frac{3}{2}\rho_{D1}\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_u}\left(1 - qf(q)\right)\varphi_1(\sigma_u, \mu_\sigma) + f(q)\varepsilon_{ij}^{phst}{}',$$

$$6Z\left(\sigma_{ij}\right) = \sigma_{kk}^2 \Delta K \big/ \left(K_A K_M\right) + \left(\sigma_u\right)^2 \Delta G \big/ \left(G_A G_M\right), \tag{3.2}$$

$$\Delta K = K_A - K_M, \quad \Delta G = G_A - G_M.$$

Здесь T – температура представительного объема СПФ, M_s^0, M_f^0 – температуры начала и окончания прямого фазового превращения в отсутствии напряжений, M_s^σ – соответствует наличию напряжений, ΔS – скачек энтропии при переходе от мартенситного состояния к аустенитному, G_A, G_M – модули сдвига СПФ в аустенитном и мартенситном состояниях, K_A, K_M – значения утроенных объемных модулей СПФ в аустенитном и мартенситном состояниях.

По сути, приведенные выше определяющие соотношения правильно описывают изменение q лишь в полных циклах фазовых превращений, причем они являются не явными выражениями для q, а лишь трансцендентными уравнениями для этой величины. Эти соотношения удобно использовать для описания процессов, для которых справедливо положение об активных процессах пропорционального нагружения, поскольку определяющие соотношения для таких процессов также сводятся к конечным (а не дифференциальным) соотношениям.

В общем случае следует обратиться к дифференциальным определяющим соотношениям для q, типа полученных в [41] для модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. В данном разделе будет изложен вариант такой дифференциальной модели, справедливый для объединенной модели поведения СПФ с изотропным упрочнением, который, в отличие от оригинала [41], учитывает влияние вида напряженного состояния на процесс фазового перехода.

Исходное дифференциальное уравнение для q имеет вид [41]

$$\frac{d(1-q)}{d(1-Q)} = \frac{1-q}{1-Q}. \tag{3.3}$$

В (3.3) Q – значение параметра фазового состава, определяемое по формуле (3.1) для тех же значений температуры и напряжений, но в полных циклах фазовых превращений, т.е. [42]

$$Q = \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\pi\, t^{\sigma+}\right)\right). \tag{3.4}$$

Дифференцируя (3.4) получаем

$$dQ = \frac{\pi\left(dM_s^\sigma - dT\right)}{2\left(M_s^0 - M_f^0\right)}\sin\left(\pi\, t^{\sigma+}\right). \tag{3.5}$$

Уравнение (3.3) представляем в виде

$$dq = \frac{1-q}{1-Q}dQ. \tag{3.6}$$

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.6) получаем

$$dq = \frac{\pi(1-q)\sin\left(\pi\, t^{\sigma+}\right)}{\left(M_s^0 - M_f^0\right)\left(1+\cos\left(\pi\, t^{\sigma+}\right)\right)}\left(dM_s^\sigma - dT\right). \tag{3.7}$$

Переходя к половинному аргументу в тригонометрических функциях (3.7) получаем

$$dq = F^+\left(dM_s^\sigma - dT\right),\ F^+ = \frac{\pi(1-q)}{M_s^0 - M_f^0}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\, t^{\sigma+}}{2}\right). \tag{3.8}$$

Для вычисления величины $d\left(M_s^{\sigma}\right)$ находим

$$\sigma'_{ij}\omega_{ij}^{+} = \rho_{D1}\left(\mu_{\sigma}\right)\sigma_u\left(1-qf\left(q\right)\right)\varphi_1\left(\sigma_u,\mu_{\sigma}\right)+ f\left(q\right)\sigma'_{ij}\varepsilon_{ij}^{phst\,\prime}. \tag{3.9}$$

Дифференцируя (3.9) с учетом (1.25) получаем

$$d\left(\sigma'_{mn}\omega_{mn}^{+}\right) = \frac{\left[C\left(\sigma_u\Sigma_{mn}^{(1)}+\frac{3}{2}\rho_{D1}\varphi_1\frac{\sigma'_{mn}}{\sigma_u}\right)+\varepsilon_{mn}^{phst\,\prime}+\sigma_u q\Sigma_{mn}^{(2)}\right]d\sigma'_{mn}}{C+q}+ \tag{3.10}$$
$$+\frac{\left(C+q\right)\sigma_u\rho_{D2}\varphi_2 - C\rho_{D1}\varphi_1\sigma_u - \sigma'_{mn}\varepsilon_{mn}^{phst\,\prime}}{\left(C+q\right)^2}dq.$$

В (3.10) $\Sigma_{mn}^{(1)}$ по аналогии с Σ_{mn}^{2} (1.21), определяется из соотношения $d\left[\rho_{D1}\left(\mu_{\sigma}\right)\varphi_1\left(\sigma_u,\mu_{\sigma}\right)\right]=\Sigma_{mn}^{(1)}d\sigma'_{mn}$ и равна

$$\Sigma_{mn}^{(1)} = \left\{\left[\varphi_1\left(\sigma_u,\mu_{\sigma}\right)\rho'_{D1}\left(\mu_{\sigma}\right)+\rho_{D1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mu_{\sigma}}\right]\frac{\partial\mu_{\sigma}}{\partial\sigma'_{mn}}+\frac{3}{2}\rho_{D1}\left(\mu_{\sigma}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma_u}\frac{\sigma'_{mn}}{\sigma_u}\right\}$$

или, после подстановки выражения для $\partial\mu_{\sigma}/\partial\sigma'_{mn}$ (1.10) получается

$$\Sigma_{mn}^{(1)} = \frac{9}{2}\left\{\left(\varphi_1\frac{d\rho_{D1}}{d\mu_{\sigma}}+\rho_{D1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mu_{\sigma}}\right)\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma'_{ns}\sigma'_{sm}}{\left(\sigma_u\right)^3}+\mu_{\sigma}\frac{\sigma'_{mn}}{\left(\sigma_u\right)^2}\right)+\rho_{D1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma_u}\frac{\sigma'_{mn}}{\sigma_u}\right\}.$$

Тогда, согласно (3.2)

$$dZ = \frac{\sigma_{kk}\Delta K}{3K_A K_M}d\sigma_{kk}+\frac{\sigma_i\Delta G}{3G_A G_M}d\sigma_u = \frac{\sigma_{kk}\Delta K}{3K_A K_M}d\sigma_{kk}+\frac{\Delta G\sigma'_{mn}}{2G_A G_M}d\sigma'_{mn}.$$

В результате получается

$$d\left(M_s^{\sigma}\right)=\frac{A_{mn}^{+}d\sigma'_{mn}+D^{+}dq+Bd\sigma_{kk}}{\Delta S}. \tag{3.11}$$

Здесь введены обозначения

$$A_{mn}^{+} = \frac{C\left(\sigma_u\Sigma_{mn}^{(1)}+\frac{3}{2}\rho_{D1}\varphi_1\frac{\sigma'_{mn}}{\sigma_u}\right)+\varepsilon_{mn}^{phst\,\prime}+\sigma_u q\Sigma_{mn}^{(2)}}{C+q}+\frac{\Delta G\sigma'_{mn}}{2G_A G_M},\quad B=\frac{\sigma_{kk}\Delta K}{3K_A K_M}+\varepsilon_0,$$

$$D^{+} = \frac{\left(C+q\right)\sigma_u\rho_{D2}\varphi_2 - C\rho_{D1}\varphi_1\sigma_u - \sigma'_{mn}\varepsilon_{mn}^{phst\,\prime}}{\left(C+q\right)^2}.$$

Подстановка (3.11) в первую формулу (3.8) дает

$$dq = \frac{F^{+}}{\Delta S}\left(A_{mn}^{+}d\sigma'_{mn}+D^{+}dq+Bd\sigma_{kk}-\Delta S dT\right). \tag{3.12}$$

В результате, величину dq можно явно выразить из уравнения (3.12)

$$dq = \alpha_{mn}^{+}d\sigma'_{mn}+\beta^{+}d\sigma_{kk}+p^{+}dt^{+}, \tag{3.13}$$

где $\alpha_{mn}^{+}=A_{mn}^{+}/R_1^{+}$, $\beta = B/R_1^{+}$, $p^{+}=\left(M_s^0-M_f^0\right)\Delta S/R_1^{+}$, $R_1^{+}=\Delta S/F^{+}+D^{+}$.

Для упрощенной модели прямого превращения, не учитывающей развитие мартенситных элементов, выражение (3.10) при $C\to\infty$ принимает вид

$$d\left(\sigma'_{mn}\omega_{mn}^{+}\right)=\left(\sigma_u\Sigma_{mn}^{(1)}+\frac{3}{2}\rho_{D1}\varphi_1\frac{\sigma'_{mn}}{\sigma_i}\right)d\sigma'_{mn}. \tag{3.14}$$

Учитывая (3.3), (3.14), (3.12) для упрощенной модели получаем

$$d\left(M_s^\sigma\right)=\frac{A_{mn}^0 d\sigma'_{mn}+Bd\sigma_{kk}}{\Delta S},$$

$$A_{mn}^0=\sigma_u\Sigma_{mn}^1+\left(\frac{3}{2}\rho_{D1}\left(\mu_\sigma\right)\frac{\varphi_1\left(\sigma_u,\mu_\sigma\right)}{\sigma_u}+\frac{\Delta G}{2G_A G_M}\right)\sigma'_{mn}.$$

В результате для упрощенной модели сразу получается явное выражение для dq

$$dq=\frac{F^+}{\Delta S}\left(A_{mn}^0 d\sigma'_{mn}+Bd\sigma_{kk}-\Delta SdT\right). \tag{3.15}$$

Влияние параметра вида напряженного состояния на dq осуществляется, прежде всего, через матрицу A_{mn}, коэффициенты которой зависят от величин ρ_{D1}, ρ_{D2}, φ_1, φ_2, зависящих от параметра вида девиатора напряжений. Кроме того, сохраняется зависимость dq от гидростатического напряжения, выражаемая через слагаемое с коэффициентом B (3.15). Величина q подчиняется уравнению (3.15), при выполнении условий $T\le M_s^\sigma$, $0\le q<1$ и неравенства $\alpha_{mn}^+ d\sigma'_{mn}+\beta^+ d\sigma_{kk}+p^+ dt^+>0$ в общем случае и $\left(A_{mn}^0 d\sigma'_{mn}+Bd\sigma_{kk}-\Delta SdT\right)>0$ для частного случая модели, не учитывающей эффекта ориентированного превращения.

Для случая обратного превращения справедлива следующая формула, выражающая объемную долю мартенситной фазы q через температуру T, напряжения и деформации [40,42]

$$q=\varphi(t),\quad \varphi(t)=\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\pi t^{\sigma-}\right)\right) \text{ при } 0\le t^{\sigma-}\le 1, \tag{3.16}$$

$$t^{\sigma-}=\left(A_s^\sigma-T\right)\Big/\left(A_s^0-A_f^0\right),\; t^-=\left(A_f^0-T\right)\Big/\left(A_f^0-A_s^0\right),$$

$$A_s^\sigma=A_s^0+\omega_{ij}^-\sigma'_{ij}\Big/\Delta S_0+Z\left(\sigma_{ij}\right)\Big/\Delta S_0+\sigma_{kk}\varepsilon_0\Big/\left(\Delta S_0\right),\qquad \omega_{ij}^-=\frac{\varepsilon_{ij}^{phst}}{q}. \tag{3.17}$$

Здесь A_s^0, A_f^0 – температуры начала и окончания обратного фазового превращения в отсутствии напряжений, A_s^σ – температура начала обратного превращения при наличии напряжений. Определяющие соотношения (3.17) правильно описывают изменение q лишь в полных циклах фазовых превращений, причем они являются не явными выражениями для q, а лишь трансцендентными уравнениями для этой величины. Эти соотношения удобно использовать для описания процессов, для которых справедливо положение об активных процессах пропорционального нагружения, поскольку определяющие соотношения для таких процессов также сводятся к конечным (а не дифференциальным) соотношениям.

В общем случае следует обратиться к дифференциальным определяющим соотношениям для q, типа полученных в [41] для модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. В данном разделе будет изложен вариант такой дифференциальной модели, справедливый для объединенной модели поведения СПФ с изотропным упрочнением, причем учитывающий влияние изменения вида напряженного состояния на поведение СПФ.

Исходное дифференциальное соотношение для q при обратном превращении имеет вид [41]

$$\frac{dq}{dQ} = \frac{q}{Q}. \tag{3.18}$$

Здесь Q – значение величины q, принимаемое для тех же значений температуры, напряжений и деформаций в полных циклах фазовых переходов, определяемое по формуле (3.16), или по эквивалентной формуле

$$Q = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\pi\, t^{\sigma-}\right)\right). \tag{3.19}$$

Уравнение (3.18) имеет решение $q = CQ$, где $C > 0$ – постоянная интегрирования, определяемая из начального условия для рассматриваемого этапа фазового превращения. Это решение справедливо только в том случае, когда в рассматриваемом процессе q, а значит и Q непрерывно убывают (обратное превращение). При этом могут меняться температура, напряжения и деформации. Согласно этому решению $q = 0$ тогда и только тогда, когда $Q = 0$, т.е. выход из петли гистерезиса для полных циклов может происходить только через вершину этой петли.

Дифференцируя (3.19)

$$dQ = -\frac{\pi}{2\left(A_f^0 - A_s^0\right)} \sin\left(\pi\, t^{\sigma-}\right)\left(dT - dA_s^{\sigma}\right)$$

и подставляя результат в (3.18) получаем

$$dq = \frac{q}{Q} dQ = -\frac{\pi q \sin\left(\pi\, t^{\sigma-}\right)}{\left(A_f^0 - A_s^0\right)\left(1 + \cos\left(\pi\, t^{\sigma-}\right)\right)}\left(dT - dA_s^{\sigma}\right)$$

или переходя в тригонометрических функциях к половинному аргументу

$$dq = \frac{\pi q}{\left(A_f^0 - A_s^0\right)} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\, t^{\sigma-}}{2}\right)\left(dA_s^{\sigma} - dT\right). \tag{3.20}$$

Необходимо найти исходя из (3.17) величину $d\left(A_s^{\sigma}\right)$

$$d\left(A_s^{\sigma}\right) = \frac{1}{\Delta S}\left\{ d\left(\frac{\sigma'_{ij}\varepsilon_{ij}^{phst\,\prime}}{q}\right) + d\left[Z\left(\sigma_{ij}\right)\right] + \varepsilon_0 d\sigma_{kk} \right\}. \tag{3.21}$$

Вычислим первое слагаемое правой части (3.21)

$$d\left(\frac{\sigma'_{ij}\varepsilon_{ij}^{phst\,\prime}}{q}\right) = \frac{q\sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij}^{phst\,\prime} + q\varepsilon_{ij}^{phst\,\prime} d\sigma'_{ij} - \varepsilon_{ij}^{phst\,\prime}\sigma'_{ij} dq}{q^2}.$$

С использованием (1.25) находим

$$d\left(\frac{\sigma'_{ij}\varepsilon_{ij}^{phst\,\prime}}{q}\right) = \frac{A}{q^2} dq + \left(\sigma_u \Sigma_{mn}^{(2)} + \frac{1}{q}\varepsilon_{mn}^{phst\,\prime}\right) d\sigma'_{mn} =$$

$$= D^- dq + \left(\sigma_u \Sigma_{mn}^{(2)} + \frac{1}{q}\varepsilon_{mn}^{phst\,\prime}\right) d\sigma'_{mn},$$

$$A = q\sigma_u \rho_{D2}\left(\mu_\sigma\right)\varphi_2\left(\sigma_u, \mu_\sigma\right) - \sigma'_{mn}\varepsilon_{mn}^{phst\,\prime}, \qquad D^- = A/q^2,$$

$$d\left(A_s^{\sigma}\right) = \frac{1}{\Delta S}\left\{D^- dq + A_{mn}^- d\sigma'_{mn} + B d\sigma_{kk}\right\},$$

$$A^{-}_{mn}=\sigma_u\Sigma^{(2)}_{mn}+\frac{1}{q}\varepsilon^{phst}_{mn}{}'+\frac{\Delta G\sigma'_{mn}}{2G_AG_M},\quad B=\frac{\Delta K\sigma_{kk}}{3K_AK_M}+\varepsilon_0.$$

В результате из (3.20) получается уравнение

$$dq=\frac{F^{-}}{\Delta S}\left(D^{-}dq+A^{-}_{mn}d\sigma'_{mn}+Bd\sigma_{kk}-dT\Delta S\right),\quad F^{-}=\frac{\pi q}{\left(A^0_f-A^0_s\right)}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi\, t^{\sigma-}}{2}\right).$$

Решая это уравнение, получаем
или

$$dq=\alpha^{-}_{mn}d\sigma'_{mn}+\beta^{-}d\sigma_{kk}+p^{-}dt^{-},\tag{3.22}$$

где $\alpha^{-}_{mn}=A^{-}_{mn}/R^{-}_1$, $\beta^{-}=B/R^{-}_1$, $p^{-}=\left(A^0_f-A^0_s\right)\Delta S/R^{-}_1$, $R^{-}_1=\Delta S/F^{-}+D^{-}$.

Дифференциальное уравнение (3.22) справедливо при выполнении условий

$$\alpha^{-}_{mn}d\sigma'_{mn}+\beta^{-}d\sigma_{kk}+p^{-}dt^{-}<0,\quad T\ge A^{\sigma}_s,\quad 1\ge q>0.$$

Подстановка (3.13) или (3.22) в (1.22) дает окончательный вариант определяющих соотношений для приращения девиатора фазово-структурной деформации

$$d\varepsilon^{phst}_{ij}{}'=\left(\frac{3}{2}q\frac{\sigma'_{ij}\Sigma^{(2)}_{mn}}{\sigma_u}+\Lambda^{\pm}_{ij}\alpha^{\pm}_{mn}\right)d\sigma'_{mn}+\Lambda^{\pm}_{ij}\left(\beta^{\pm}d\sigma_{kk}+p^{\pm}dt^{\pm}\right).$$

Для упрощенной модели прямого превращения, не учитывающей явление ориентированного превращения, в которой $f\left(q\right)=0$ получается

$$d\varepsilon^{phst}_{ij}{}'=\frac{3}{2}\frac{\sigma'_{ij}\Omega_{mn}}{\sigma_u}d\sigma'_{mn}+\frac{3}{2}\frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_u}\rho_{D1}\varphi_1\left(\beta^{+}d\sigma_{kk}+p^{+}dt^{+}\right),$$

$$\Omega_{mn}=q\Sigma^{(2)}_{mn}+\rho_{D1}\varphi_1\alpha^{+}_{mn}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен вариант распространения объединенной модели фазового и структурного деформирования СПФ, с изотропным упрочнением при структурном переходе на случай учета влияния вида напряженного состояния. Учтена возможность изменения параметра вида девиатора напряжений в процессе фазовых превращений и структурных переходов. В явном виде получены законы фазово-структурного деформирования, и входящие в формулировки этих законов дифференциальные выражения для параметра фазового состава, также учитывающие влияние изменения вида напряженного состояния. В явном виде получены дифференциальные условия активного деформирования по структурному механизму. Сформулировано и доказано положение об активных процессах пропорционального нагружения, позволяющее в некоторых случаях интегрировать определяющие соотношения для СПФ в приращениях до решения соответствующей краевой задачи и после этого решать краевую задачу с использованием определяющих соотношений, связывающих сами тензора напряжений и деформаций, а не их приращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wasilevski R.J. *The effect of applied stress on the martensitic transformation in TiNi* // Metall. Trans. – 1971. – Vol.2. – No.11. – Pp.2973-2981.

2. Gall K., Sehitoglu H., Chumlyakov Y.I., Kireeva I.V. *Tension – compression asymmetry of the stress – strains response in aged single crystal and polycrystalline NiTi* // Acta Material. – 1999. – Vol.47. – No.4. – Pp.1203-1217.
3. Gall K., Sehitoglu H. *The role of texture in tension-compression asymmetry in polycrystalline NiTi* // International journal of plasticity. – 1999. – Vol.15. – No.1. – Pp.69-92.
4. Liu Y., Xie Z., Van Humbeck J., Delaey L. *Asymmetry of stress-strain curves under tension – compression for TiNi shape memory alloys* // Acta Mater. – 1998. – Vol.46. – No.12. – Pp.4325-4338.
5. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – №12. – С.2-11.
6. Sittner P., Novak V. *Anisotropy of Cu-Based Shape Memory Alloys In Tension/Compression Thermomechanical Loads* // Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol. – 1999. – Vol.121. – No.1. – Pp.48-55.
7. Jacobus K., Sehitoglu H., Balzer M. *Effect of Stress State on the Stress Induced Martensitic Transformation in polycrystalline Ni-Ti Alloy* // Metall. Mater. Trans A. – 1996. – Vol.27. – Pp.3066-3073.
8. Reedlunn Benjamin. *Thermomechanical behavior of shape memory alloy cables and tubes* / A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Ph'D (Mechanical Engineering). – University of Michigan, 2012. – 208 p.
9. Reedlunn Benjamin, Christopher B. Churchill, Emily E. Nelson, Samantha H. Daly, John A. Shaw. *Tension, compression, and bending of superelastic shape memory alloy tubes* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2014. – Vol.63. – Pp.506-537.
10. Lim T.J., McDowell D.L. *Mechanical behavior of an Ni-Ti shape memory alloy under axial-torsional proportional and nonproportional loading* // J. Eng. Mater. Technol. Trans. ASME. – 1999. – Vol.121. – No.1. – Pp.9-18.
11. Adler P.H., Yu W., Pelion A.R., Zadno R., Duerig T.W. Barresi R. *On the tensile and torsional properties of pseuooelastlc NiTi* // Scripta Metallurgica et Materialia. – 1990. – Vol.24. – Pp.943-947.
12. Thamburaja P., Anand L. *Superelastic behavior in tensiontorsion of an initially-textured Ti-Ni shape-memory alloy* // International Journal of Plasticity. – 2002. – Vol.18(11). – Pp.1607-1617.
13. Orgeas L., Favier D. *Stress-induced martensite transformation of a NiTi alloy in isothermal shear, tension and compression* // Acta Materialia. – 1998. – Vol.46. – Pp.5579-5591.
14. Favier D., Liu Y., Orgeas L., Rio G. *Mechanical instability of NiTi in tension, compression and shear* // Solid Mechanics and its Applications. – 2001. – Vol.101. – Pp.205-212.
15. Lexcellent C., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P. *Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2002. – Vol.50. – Pp.2717-2735.
16. Lexcellent C., Boubakar M.L., Bouvet C., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification*

under proportional loading and anisothermal condition // Int. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43. – Pp.613-626.

17. Auricchio F., Reali A., Stefanelli U. *A macoscopic 1d model for shape memory alloys including asymmetric behavior and transformation-dependent elastic properties* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2009. – Vol.198. – No.17-20. – Pp.1631-1637.
18. Auricchio F., Taylor R. L., Lubliner J. *Shape-memory alloys: macromodelling and numerical simulations of the superelastic behavior* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1997. – Vol.146. – Pp.281-312.
19. Gillet Y., Patoor E., Berveiller M. *Calculation of pseudoelastic elements using a non-symmetrical thermomechanical transformation criterion and associated rule* // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 1998. – Vol.9. – Pp.366-378.
20. Lubliner J. Auricchio F. *Generalized plasticity and shape-memory alloys* // Int. J. Solids Structure. – 1996. – Vol.33. – Pp.991-1003.
21. Reza Mirzaeifar, Reginald DesRoches, Arash Yavari, Ken Gall. *On superelastic bending of shape memory alloy beams* // Journal of Solids and Structures. – 2013. – Vol.50(10). – Pp.1664-1680.
22. Qidwai M.A., Lagoudas D.C. *On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material* // International journal of plasticity. – 2000. – Vol.16. – No.10. – Pp.1309-1343.
23. Wenyi Yan, Chun Hui Wang, Xin Ping Zhang and Yiu-Wing Mai. *Theoretical modeling of the effect of plasticity on reverse transformation in superelastic shape memory alloys* / Article submitted to Materials Science and Engineering: *A*. The University of Sydney, Australia, NSW, 2006.
24. Bouvet C. *De l_uniaxial au multiaxial: comportement pseudoerlastique des alliages ar mermoire de forme* // Ph.D. Thesis of University of Franche-Comter (France). – 2002. – No.870.
25. Мовчан А.А. *Объединенная модель фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2020. – №11. – С.2-10.
26. Мовчан А.А. *Модель неупругого деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – № 3. – С.8-17.
27. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.
28. Мовчан А.А. *Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – №4. – С.140-151.
29. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2015. – №2. – С.78-95.
30. Гаганова Н.В. *Распространение модели деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях на случай учета развития мартенситных элементов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.543-562.
31. Гаганова Н.В. *Описание явления сверхупругости в рамках объединенной модели деформирования сплавов с памятью формы с учетом развития*

мартенситных элементов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.26. – №4. – С.441-454.
32. Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. – М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.
33. Иванов Г.Е., Огарков Г.Л. *Применение символа Леви-Чивиты в теории поля. Методическое пособие*. М.: МФТИ, 2022. – 20 с.
34. Raniecki B., Tanaka K., Ziolkowski A. *Testing and modeling of NiTi SMA at complex stress state* // Material Science Research International. Special technical publications. – 2001. – Vol.2. – Pp.327-334.
35. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
36. Соколовский В.В. *Теория пластичности*. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
37. Трусов П.В., Швейкин А.И. *Теория пластичности: учебное пособие*. – Пермь: Издательство Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2011. – 425 с.
38. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Эффект перекрестного упрочнения сплава с памятью формы при сжатии* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №4. – С.2-9.
39. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
40. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
41. Мовчан А.А., Давыдов В.В. *Инкрементальные определяющие соотношения для объемной доли мартенситной фазы в сплавах с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №5. – С.653-661.
42. Liang C., Rogers C.A. *One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials* // J. of Intell. Mater. Syst. and Struct. – 1990. – Vol.1. – No.2. – Pp.207-234.

REFERENCES

1. Wasilevski R.J. *The effect of applied stress on the martensitic transformation in TiNi*. Metall. Trans., 1971, Vol.2, No.11, Pp.2973-2981.
2. Gall K., Sehitoglu H., Chumlyakov Y.I., Kireeva I.V. *Tension – compression asymmetry of the stress – strains response in aged single crystal and polycrystalline NiTi*. Acta Material., 1999, Vol.47, No.4, Pp.1203-1217.
3. Gall K., Sehitoglu H. *The role of texture in tension-compression asymmetry in polycrystalline NiTi*. International journal of plasticity, 1999, Vol.15, No.1, Pp.69-92.
4. Liu Y., Xie Z., Van Humbeck J., Delaey L. *Asymmetry of stress-strain curves under tension – compression for TiNi shape memory alloys*. Acta Material., 1998. Vol.46, No.12, Pp.4325-4338.
5. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Experimental Identification of a Nonlinear Deformation Model for a Shape Memory Alloy during Phase and Structural Transformations*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, No.4, Pp.301-308.

6. Sittner P., Novak V. *Anisotropy of Cu-Based Shape Memory Alloys In Tension/Compression Thermomechanical Loads*. Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol., 1999, Vol.121, No.1, Pp.48-55.
7. Jacobus K., Sehitoglu H., Balzer M. *Effect of Stress State on the Stress Induced Martensitic Transformation in polycrystalline Ni-Ti Alloy*. Metall. Mater. Trans. A, 1996, Vol.27, Pp.3066-3073.
8. Reedlunn Benjamin. *Thermomechanical behavior of shape memory alloy cables and tubes*. A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Ph'D (Mechanical Engineering), University of Michigan, 2012, 208 p.
9. Reedlunn Benjamin, Christopher B. Churchill, Emily E. Nelson, Samantha H. Daly and John A. Shaw. *Tension, compression, and bending of superelastic shape memory alloy tubes*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2014, Vol.63, Pp.506-537.
10. Lim T.J., McDowell D.L. *Mechanical behavior of an Ni-Ti shape memory alloy under axial-torsional proportional and nonproportional loading*. J. Eng. Mater. Technol. Trans. ASME, 1999, Vol.121, No.1, Pp.9-18.
11. Adler P.H., Yu W., Pelion A.R., Zadno R., Duerig T.W. Barresi R. *On the tensile and torsional properties of pseuooelastlc NiTi*. Scripta Metallurgica et Materialia, 1990, Vol.24, Pp.943-947.
12. Thamburaja P., Anand L. *Superelastic behavior in tensiontorsion of an initially-textured Ti-Ni shape-memory alloy*. International Journal of Plasticity, 2002, Vol.18, No.11, Pp.1607-1617.
13. Orgeas L., Favier D. *Stress-induced martensite transformation of a NiTi alloy in isothermal shear, tension and compression*. Acta Materialia, 1998, Vol.46, Pp.5579-5591.
14. Favier D., Liu Y., Orgeas L., Rio G. *Mechanical instability of NiTi in tension, compression and shear*. Solid Mechanics and its Applications, 2001, Vol. 101. Proceedings of IUTAM Symposium, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pp. 205–212.
15. Lexcellent C., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P. *Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2002, Vol.50, Pp.2717-2735.
16. Lexcellent C., Boubakar M.L., Bouvet C., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal condition*. Int. J. of Solids and Structures, 2006, Vol.43, Pp.613-626.
17. Auricchio F., Reali A., Stefanelli U. *A macoscopic 1d model for shape memory alloys including asymmetric behavior and transformation-dependent elastic properties*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, Vol.198, No.17-20, Pp.1631-1637.
18. Auricchio F., Taylor R. L., Lubliner J. *Shape-memory alloys: macromodelling and numerical simulations of the superelastic behavior*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, Vol.146, Pp.281-312.
19. Gillet, Y., Patoor, E., Berveiller, M. *Calculation of pseudoelastic elements using a non-symmetrical thermomechanical transformation criterion and associated rule*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1998, Vol.9, Pp.366-378.
20. Lubliner J. Auricchio F. *Generalized plasticity and shape-memory alloys*. Int. J. Solids Structure, 1996, Vol.33, Pp.991-1003.

21. Reza Mirzaeifar, Reginald DesRoches, Arash Yavari, Ken Gall. *On superelastic bending of shape memory alloy beams*. Journal of Solids and Structures, 2013, Vol.50(10), Pp.1664-1680.
22. Qidwai M.A., Lagoudas D.C. *On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material*. International journal of plasticity, 2000, Vol.16, No.10, Pp.1309-1343.
23. Wenyi Yan, Chun Hui Wang, Xin Ping Zhang, Yiu-Wing Mai. *Theoretical modeling of the effect of plasticity on reverse transformation in superelastic shape memory alloys*. Article submitted to Materials Science and Engineering: *A*. The University of Sydney, Australia, NSW, 2006.
24. Bouvet C. *De l_uniaxial au multiaxial: comportement pseudoerlastique des alliages ar mermoire de forme*. Ph.D. Thesis of University of Franche-Comter (France), 2002, No.870.
25. Movchan A.A. *Joint Model for the Phase-Structural Deformation of Shape Memory Alloy*. Russian Metallurgy (Metally), 2021, Vol.2021, No.4, Pp.333-340.
26. Movchan A.A. Shape memory alloys inelastic straining model. Russian Metallurgy (Metally), 2021, Vol.2021, No.10, Pp.1203-1212.
27. Movchan A.A. *Model for the Effect of the Phase Mechanism of Deformation on the Structural Mechanism in Shape Memory Alloys*. *Russian Metallurgy (Metally),* 2020, Vol.2020, No.4, Pp.282-290.
28. Movchan A.A. *Phenomenological Model of Changes in Phase-Structural Deformations in Shape Memory Alloys*. Mechanics of Solids, 2020, Vol.55, No.4, Pp.573-583.
29. Mishustin I.V. Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
30. Gaganova N.V. *Rasprostranenie modeli deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh na sluchaj ucheta razvitiya martensitnykh ehlementov [Propagation of the deformation model of shape memory alloys during phase and structural transformations in the case of taking into account the development of martensitic elements]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.25, No.4, Pp.543-562.
31. Gaganova N.V. *Opisanie yavleniya sverkhuprugosti v ramkakh ob"edinennoj modeli deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy s uchetom razvitiya martensitnykh ehlementov [Description of the superelasticity in the framework of the combined deformation model for shape memory alloys, considering the development of martensitic elements]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2021, Vol.26, No.4, Pp.441-454.
32. Dimitrienko Yu.I. *Tenzornoe ischislenie [Tensor calculus]*. Moskva, Vysshaya shkola, 2001, 575 p.
33. Ivanov G.E., Ogarkov G.L. *Primenenie simvola Levi-Chivity v teorii polya. Metodicheskoe posobie [Application of the Levi-Civita symbol in field theory. Methodical manual]*. Moskva, MFTI, 2022, 20 p.
34. Raniecki B., Tanaka K., Ziolkowski A. *Testing and modeling of NiTi SMA at complex stress state*. Material Science Research International. Special technical publications, 2001, Vol.2, Pp.327-334.
35. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti [Fundamentals of plasticity theory]*. Moskva, Nauka, 1969. 420 p.

36. Sokolovskij V.V. *Teoriya plastichnosti [Theory of plasticity]*. Moskva, Vysshaya shkola, 1969, 608 p.
37. Trusov P.V., Shvejkin A.I. *Teoriya plastichnosti: uchebnoe posobie [Theory of plasticity: Study guide]*. Perm’, Izdatel’stvo Permskogo natsional’nogo issledovatel’skogo politekhnicheskogo universiteta, 2011, 425 p.
38. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil’chenko A.L. *Cross Hardening of a Shape Memory Alloy during Compression*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, Vol.2019, No.10, Pp.967-973.
39. Movchan A.A., Silchenko L.G., Silchenko T.L. *Taking account of the martensite inelasticity in the reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
40. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. Physical Mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.
41. Movchan A.A., Davydov V.V. *Inkremental’nye opredelyayushhie sootnosheniya dlya ob”emnoj doli martensitnoj fazy v splavakh s pamyat’yu formy [Incremental constitutive relations for the martencite volume fraction in shape memory alloys]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2010, Vol.16, No.5, Pp.653-661.
42. Liang C., Rogers C.A. *One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials.* J. of Intell. Mater. Syst. and Struct., 1990, Vol.1, No.2, Pp.207-234.

Поступила в редакцию 26 июля 2023 года.

Сведения об авторе:

Мовчан Андрей Александрович – д.ф.-м.н., проф., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: movchan47@mail.ru