УДК 539.3
EDN RJBFIV (https://elibrary.ru/rjbfiv)
DOI 10.33113/mkmk.ras.2023.29.03.06

МЕТОД СВЕДЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО К ПАРНЫМ РЯДАМ-УРАВНЕНИЯМ*

Киреенков А.А.[1,2], Михайлова Е.Ю.[3], Федотенков Г.В.[3]

[1]ФГБУН Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, г. Москва, Россия
[2]Московский физико-технический институт (Физтех), Московская область, г. Долгопрудный, Россия
[3]ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена контактная задача для сферической оболочки, опирающейся на абсолютно твёрдую плоскую поверхность. Для оболочки используется система уравнений равновесия в перемещениях, основанная на гипотезах С.П. Тимошенко, учитывающая влияние деформации сдвига. Для построения системы разрешающих уравнений использован принцип суперпозиции, согласно которому нормальные перемещения оболочки связаны с контактным давлением посредством интегрального соотношения. Это приводит к основному разрешающему интегральному уравнению типа Фредгольма I рода. Ядром этого уравнения является функция влияния для оболочки. Функция влияния простроена с применением разложений в ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. Для построения корректной системы разрешающих уравнений задача сведена к системе парных рядов-уравнений. Метод решения системы разрешающих уравнений основан на сведении парных уравнений к регулярному интегральному уравнению Фредгольма II рода. Для этого используются известные разложения разрывных функций в ряды по полиномам Лежандра, а также интегральное представление для полиномов Лежандра. В результате задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма II рода относительно вспомогательной функции. Через вспомогательную функцию выражаются искомые коэффициенты ряда для контактного давления. Для определения области контакта дополнительно привлекается условие равновесия оболочки.

Ключевые слова: контактная задача; сферическая оболочка; функции влияния; интегральные уравнения; парные ряды-уравнения; уравнения Фредгольма; контактное давление

METHOD FOR REDUCING CONTACT PROBLEMS FOR SPHERICAL SHELLS OF THE TIMOSHENKO TYPE TO PAIRED SERIES-EQUATIONS

Kireenkov Alexey A., Mikhailova Elena Yu., Fedotenkov Grigory V.

Institute of Problems of Mechanics RAS named after. A.Yu. Ishlinsky, Moscow, Russia

* *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-29-00987, https://rscf.ru/project/23-29-00987/*

Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT), Dolgoprudny, Zhukovsky, Russia
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

The contact problem for a spherical figure resting on an absolutely flat surface is considered. For the description, a system for determining equilibrium in movements is used, based on the hypotheses of S.P. Timoshenko, Observed shift dynamics. To create systems that allow electronic methods, the principle of superposition was used, according to the normal voltage displacements with contact application through an integral approach. This leads to a fundamental resolving integral equation of the Fredholm type of the first kind. The core of this equation is the transient function. Transient function is received using series expansions in Legendre and Gegenbauer polynomials. To construct a correct system of resolving mathematical problems, it is reduced to a system of paired series-equations. The method for solving this system of permissive bases is based on carrying out paired samples to the regular Fredholm integral equation of the second kind. For this purpose, original developments of discontinuous functions in series in Legendre polynomials, as well as an integral representation for Legendre polynomials, were used. As a result, the problem is reduced to the Fredholm II integral equation with respect to the auxiliary function. Using the auxiliary function, the required series of coefficients for contact pressure are expressed. To determine the contact area, an equilibrium condition is additionally required.

Ключевые слова: contact problem; spherical shell; transient functions; integral equations; paired series-equations; Fredholm equations; contact pressure

ВВЕДЕНИЕ

Механика контактных взаимодействий твердых деформируемых тел является активно развивающимся направлением механики деформируемого твёрдого тела, которое постоянно находится в центре внимания исследователей. Это обусловлено тем, что абсолютное большинство механизмов и конструкций состоит из взаимодействующих между собой частей. При этом распределение контактных усилий между этими частями заранее неизвестно и может быть найдено лишь в результате решения соответствующих контактных задач. Определение распределение контактного давления по области контакта является основной целью решения контактной задачи, поскольку позволяет затем сформулировать граничные условия в напряжениях на поверхностях тел и решить более простые проблемы по определению напряженно-деформированного состояния внутри взаимодействующих тел.

Контактные задачи для тонкостенных элементов конструкций, в том числе, для оболочек, являются актуальным направлением развития механики контактных взаимодействий, поскольку оболочечные элементы широко применяются при проектировании и производстве всех современных видов транспорта, включая различные аэрокосмические аппараты, при строительстве зданий и сооружений, а также в робототехнике. Например, многочисленные инженерные приложения имеет задача о движении упругой оболочки по твердой шероховатой поверхности под влиянием комбинированного анизотропного трения. Для корректного учета влияния анизотропии коэффициентов сухого трения в таких системах, требуется построение приближенных аналитических моделей силового состояния внутри пятна контакта с учетом реального распределения нормальных и касательных контактных напряжений [1-3]. При изучении подобных проблемм одной из наиболее перспективных является теория многокомпонентного сухого трения [4-7], которая позволяет корректно описать возникающие эффекты трения с помощью построения физически согласованных феноменологических моделей трения.

Характерной особенностью контактных задач является то, что в математическом плане они представляют собой задачи со смешанными граничными условиями, которые, как правило, сводятся к интегральным уравнениям первого рода. Эти уравнения зачастую являются некорректными и требуют использования специальных методов решения. Одним из эффективных методов решения подобных задач является метод парных рядов-уравнений. По существу, он представляет собой обобщение метода разделения переменных на краевые задачи со смешанными граничными условиями.

В настоящей работе, с применением принципа суперпозиции и функций влияния, предложен общий подход к решению контактных задач для сферических оболочек, основанных на сведении математической постановки к решению системы интегральных уравнений. В свою очередь, с использованием разложений в ряды Фурье, эта система с водится к парным рядам-уравнениям. Их решение предложено строить с помощью введения новой неизвестной вспомогательной функции, являющейся решением интегрального уравнение Фредгольма II рода.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается контактная задача для сферической оболочки типа Тимошенко [8,9], опирающейся на абсолютно твёрдую плоскую поверхность (рис.1).

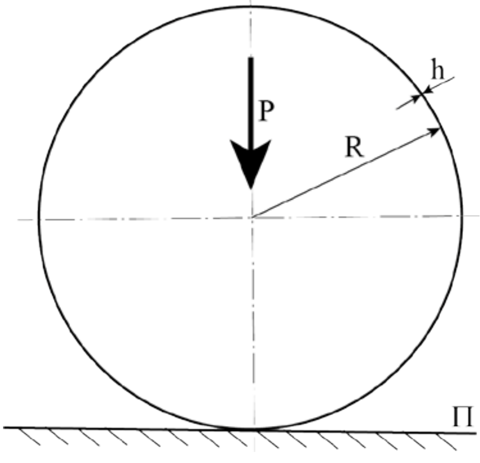

Рис.1. Постановка задачи.

Для оболочки используется система уравнений равновесия в перемещениях, полученная в работе [10]. Уравнения учитывают влияние деформации сдвига, согласно гипотезам С.П. Тимошенко

$$\mathbf{L}\mathbf{w} + \mathbf{p} = 0,\ \mathbf{L} = \left(L_{ij}\right)_{3\times3},\ \mathbf{w} = \left(u, w, \chi\right)^{\mathrm{T}},\ \mathbf{p} = \left(0, p, 0\right)^{\mathrm{T}}, \tag{1.1}$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \mathrm{ctg}\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \eta^2\left(2 - k^2\right) - \frac{1}{\sin^2\beta},$$

$$L_{12} = \left[2\left(1-\eta^2\right)+\eta^2k^2\right]\frac{\partial}{\partial\beta},\quad L_{13} = -\gamma^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\operatorname{ctg}\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{\sin^2\beta}\right)+\eta^2k^2,$$

$$L_{21} = -\left[2\left(1-\eta^2\right)+\eta^2k^2\right]\left(\frac{\partial}{\partial\beta}+\operatorname{ctg}\beta\right),\; L_{22} = \eta^2k^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\operatorname{ctg}\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)-4\left(1-\eta^2\right),$$

$$L_{23} = \eta^2k^2\left(\frac{\partial}{\partial\beta}+\operatorname{ctg}\beta\right),\quad L_{31} = \gamma^{-2}L_{13},\quad L_{32} = -\eta^2k^2\gamma^{-2}\frac{\partial}{\partial\beta},\quad L_{33} = -\gamma^{-2}L_{13}.$$

При записи всех уравнений и соотношений здесь и далее используется следующая система безразмерных величин (при одинаковом начертании величин они обозначены верхним символом «$*$», который в последующем изложении опускается)

$$u^* = \frac{u}{R},\; w^* = \frac{w}{R},\; p^* = \frac{p}{\lambda+2\mu}\frac{h^2}{R^2},\; \eta^2 = \frac{\mu}{\lambda+2\mu},\; \gamma^2 = \frac{h}{12R},\; k^2 = \frac{5}{6}. \qquad (1.2)$$

В (1.1) и (1.2) u, w – тангенциальное и нормальное перемещения; χ – угол поворота нормального к срединной поверхности до деформации волокна за счет сдвиговых деформаций; p – нормальное давление, $\beta\in\left[0,\pi\right]$ – угол сферической системы координат с началом в центре масс оболочки.

Оболочка находится под действием вдавливающей силы P. Контакт между оболочкой и плоскими поверхностями происходит в условиях свободного проскальзывания.

В области контакта, граница которой определяется углом β_*, нормальные перемещения определяются следующим выражением (рис.2)

$$w = -\left(w_c-1+\cos\beta\right),\; \beta\in\left[0,\beta_*\right], \qquad (1.3)$$

где w_c – перемещение центра масс оболочки.

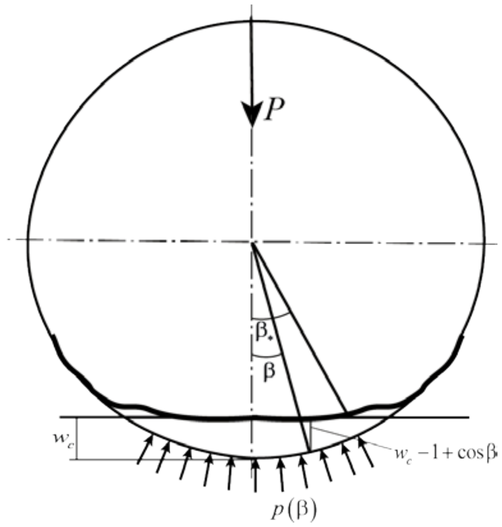

Рис.2. Деформированное состояние оболочки.

Вне области контакта нормальное давление отсутствует

$$p\left(\beta\right) = 0,\; \beta\in\left(\beta_*,\pi\right]. \qquad (1.4)$$

Условие равновесия оболочки определяется уравнением статического равновесия

$$P=-\pi\int_0^{\beta_*} p(\beta)\sin 2\beta d\beta. \tag{1.5}$$

2. ФУНКЦИЯ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ ОБОЛОЧКИ

Для построения системы разрешающих уравнений будем использовать принцип суперпозиции, согласно которому нормальные перемещения оболочки связаны с контактным давлением посредством интегрального соотношения

$$w(\beta)=2\pi\int_0^{\pi} G_w(\beta,\xi)\,p(\xi)\,d\xi,\ \beta\in[0,\beta_*], \tag{2.1}$$

где $G_w(\beta,\xi)$ – функция влияния для оболочки.

Функция влияния $G(\beta,\xi)$ представляет собой нормальные перемещения как решение следующей задачи

$$\begin{gathered}\mathbf{LG}+\mathbf{p}=0,\\ \mathbf{G}=\left(G_u,G_w,G_\chi\right)^{\mathrm{T}},\ \mathbf{p}=\left[0,\delta(\beta-\xi),0\right]^{\mathrm{T}},\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\delta(\beta-\xi)$ – дельта-функция Дирака.

Для построения функции влияния воспользуемся разложениями в ряды Фурье по полиномам Лежандра $P_n(\cos\beta)$ и Гегенбауэра $-\sin\beta C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta)$ [11,12]

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}G_u(\beta,\xi)\\ G_\chi(\beta,\xi)\end{pmatrix}=-\sin\beta\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}G_{un}(\xi)\\ G_{\chi n}(\xi)\end{pmatrix}C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta),\\ \begin{pmatrix}G_w(\beta,\xi)\\ \delta(\beta-\xi)\end{pmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}G_{wn}(\xi)\\ \delta_n(\xi)\end{pmatrix}P_n(\cos\beta).\end{gathered} \tag{2.3}$$

Коэффициенты $\delta_n(\xi)$ находятся так

$$\delta_n(\xi)=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}\delta(\beta-\xi)\,P_n(\cos\beta)\sin\beta d\beta=\frac{2n+1}{2}P_n(\cos\xi)\sin\xi. \tag{2.4}$$

Подставляем (2.3) с учётом (2.4) в (2.2). Используем известные соотношения для полиномов Лежандра и Гегенбауэра [11]

$$\frac{d^2P_n(\cos\beta)}{d\beta^2}+\operatorname{ctg}\beta\frac{dP_n(\cos\beta)}{d\beta}=-n(n+1)P_n(\cos\beta),$$

$$-\sin\beta C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta)=dP_n(\cos\beta)/d\beta,$$

$$\frac{d^2\tilde{C}_{n-1}^{3/2}(\cos\beta)}{d\beta^2}+\operatorname{ctg}\beta\frac{d\tilde{C}_{n-1}^{3/2}(\cos\beta)}{d\beta}-\frac{\tilde{C}_{n-1}^{3/2}(\cos\beta)}{\sin^2\beta}=-n(n+1)\tilde{C}_{n-1}^{3/2}(\cos\beta),$$

$$\tilde{C}_{n-1}^{3/2}(\cos\beta)=-\sin\beta C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta).$$

В результате приходим к системе уравнений относительно коэффициентов разложений (2.3)

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_n\mathbf{G}_n+\mathbf{p}_n=0,\ \mathbf{L}_n=\left(L_{nij}\right)_{3\times3},\\ \mathbf{G}_n=\left(G_{un},G_{wn},G_{\varphi n}\right)^{\mathrm{T}},\ \mathbf{p}_n=\left[0,\delta_n(\xi),0\right]^{\mathrm{T}},\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$L_{n11}=\eta^2\left(2-k^2\right)-n\left(n+1\right),$$
$$L_{n12}=2\left(1-\eta^2\right)+\eta^2k^2,\quad L_{n13}=\gamma^2n\left(n+1\right)+\eta^2k^2,$$
$$L_{n21}=\left[2\left(1-\eta^2\right)+\eta^2k^2\right]n\left(n+1\right),\quad L_{n22}=-\eta^2k^2n\left(n+1\right)-4\left(1-\eta^2\right),$$
$$L_{n23}=-\eta^2k^2n\left(n+1\right),\quad L_{n31}=\gamma^{-2}L_{n13},\quad L_{n32}=-\eta^2k^2\gamma^{-2},\quad L_{n33}=-\gamma^{-2}L_{n13}.$$

Решая систему (2.5), находим

$$G_{wn}\left(\xi\right)=\frac{Q_{2n}}{Q_{3n}}\delta_n\left(\xi\right),$$
$$Q_{2n}=Q_2\left[n\left(n+1\right)\right],\quad Q_{3n}=Q_3\left[n\left(n+1\right)\right],$$
$$Q_2\left(l\right)=\left(\eta^2k^2+\gamma^2l\right)\left[2\eta^2+l\left(\gamma^2-1\right)\right],$$
$$Q_3\left(m\right)=k^2\eta^2l^3\gamma^2\left(\gamma^2-1\right)+2\gamma^2l^2\left[\eta^4\left(k^2+2\right)-2\eta^2\left(\gamma^2+1\right)+2\gamma^2\right]+$$
$$+\eta^2l\left[k^2\eta^4-\left(\left(\gamma^2+1\right)k^2+2\gamma^2\right)4\eta^2+\left(4\gamma^2k^2+8\gamma^2\right)\right]+8\eta^4k^2\left(1-\eta^2\right).\tag{2.6}$$

Таким образом, функция влияния $G_w\left(\beta,\xi\right)$ определяется соответствующим рядом в (2.3) с коэффициентами (2.6).

Для оценки практической сходимости ряда разложения для функции влияния $G_w\left(\beta,\xi\right)$, рассмотрим задачу о деформировании оболочки под действием нормального давления, распределённого по некоторой заданной области, принадлежащей внешней поверхности оболочки. При этом внешнее давление должно быть самоуравновешенным. В противном случае решение задачи приведёт к неограниченному росту перемещений.

Пример 1. Положим, что на оболочку действует давление вида $p\left(\beta\right)=-\cos^2\left(\beta\right)$, $\beta\in\left[0,\pi/20\right]\cup\left[\pi-\pi/20,\pi\right]$.

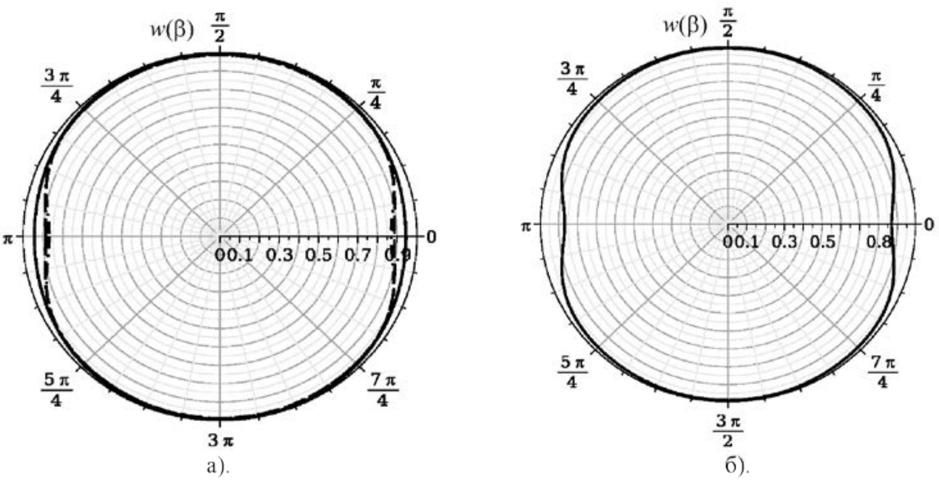

Рис.3. Практическая сходимость ряда разложения для функции влияния.

На рис.3а представлены нормальные перемещения оболочки $w\left(\beta\right)$, вычисленные по формуле (2.1) при учёте первых трёх, пяти и десяти членов ряда разложения (2.3). Сплошная линия советует результату при трёх членах ряда, пунктирная – при пяти, штрихпунктирная – при десяти. На рис.3б аналогичные графики построены при учёте десяти, пятнадцати и двадцати членов. Графики построены в полярной системе координат, связанной с центром оболочки. Видно, что отличие в результатах при учёте 10 и более членов ряда не значительное, поэтому в дальнейшем ограничимся удержанием первых десяти членов ряда (2.3). Отметим, что в рассмотренном случае интеграл в (2.1) вычисляется аналитически. В качестве материала оболочки выбрана сталь. Соответствующие безразмерные параметры задачи имеют следующие значения: $\gamma = 1/40$, $\eta = 0.504$.

3. ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Для построения разрешающих уравнений используем интегральное соотношение (2.1). Используя разложение контактного давления $p(\xi)$ в ряд по полиномам Лежандра

$$p(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m P_m(\cos\xi), \tag{3.1}$$

а также разложение в ряд для функции влияния (2.3) и формулы (2.4), (2.6), приходим к следующему уравнению

$$w(\beta) = 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} p_m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\cos\beta) \frac{Q_{2n}}{Q_{3n}} \int_0^{\pi} P_n(\cos\xi) P_m(\cos\xi) \sin\xi d\xi,\ \beta \in [0, \beta_*]. \tag{3.2}$$

С учётом свойства ортогональности для полиномов Лежандра [4]

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\xi) P_m(\cos\xi) \sin\xi d\xi = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn},$$

уравнение (3.2) принимает вид

$$2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Q_{2n}}{Q_{3n}} p_m P_m(\cos\beta) = w(\beta),\ \beta \in [0, \beta_*]. \tag{3.3}$$

До разрешающей системы уравнений оно дополняется уравнением (1.4), записанным с учётом разложения (3.1)

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m P_m(\cos\beta) = 0,\ \beta \in (\beta_*, \pi] \tag{3.4}$$

и условием равновесия (1.5):

$$-\pi \sum_{m=0}^{\infty} p_m C_m(\beta_*) = P,\ C_m(\beta_*) = \int_0^{\beta_*} P_m(\cos\beta) \sin 2\beta d\beta. \tag{3.5}$$

Отметим, что интегралы в выражении для $C_m(\beta_*)$ при любом $m = 0, 1, 2...$ вычисляются аналитически.

В результате контактная задача сводится к решению системы парных рядов-уравнений (3.3), (3.4) с учётом дополнительного соотношения (3.5).

4. МЕТОД РЕШЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Следуя [13], метод решения системы уравнений (3.3)-(3.5) основывается на сведении парных уравнений (3.3), (3.4) к регулярному интегральному уравнению Фредгольма II рода. Для этого используем известные разложения разрывных функций в ряды по полиномам Лежандра [12]

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)P_m\left(\cos\beta\right)=\begin{cases}0, & 0<t<\beta\le\pi,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\left(\cos\beta-\cos t\right)}}, & 0<\beta<t\le\pi,\end{cases}\quad(4.1)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\cos\left(\frac{2m+1}{2}t\right)P_m\left(\cos\beta\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\left(\cos t-\cos\beta\right)}}, & 0<t<\beta\le\pi,\\ 0, & 0<\beta<t\le\pi\end{cases}\quad(4.2)$$

и интегральное представление для полиномов Лежандра [14]

$$P_m\left(\cos\beta\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\beta}\frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2}x\right)}{\sqrt{2\left(\cos x-\cos\beta\right)}}dx.\quad(4.3)$$

Уравнения (3.3)-(3.5) с помощью элементарных преобразований приведём к виду

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(1-g_m\right)\tilde{p}_mP_m\left(\cos\beta\right)=w(\beta),\ \beta\in\left[0,\beta_*\right],\quad(4.4)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2m+1}{2}\tilde{p}_mP_m\left(\cos\beta\right)=0,\ \beta\in\left(\beta_*,\pi\right],\quad(4.5)$$

$$-\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2m+1}{2}\tilde{p}_mC_m\left(\beta_*\right)=P,\quad(4.6)$$

где $\tilde{p}_m=\dfrac{2}{2m+1}p_m,\quad g_m=\dfrac{Q_{3m}-\pi\left(2m+1\right)Q_{2m}}{Q_{3m}}$.

Положим

$$\tilde{p}_m=\int_0^{\beta_*}\varphi(t)\cos\left(\frac{2m+1}{2}t\right)dt,\quad(4.7)$$

где $\varphi(t)$ – функция, подлежащая определению.

Подставим (4.7) в уравнение (4.4):

$$\int_0^{\beta_*}\varphi(t)\sum_{m=0}^{\infty}\cos\left(\frac{2m+1}{2}t\right)P_m\left(\cos\beta\right)dt-$$
$$-\int_0^{\beta_*}\varphi(t)\sum_{m=0}^{\infty}g_mP_m\left(\cos\beta\right)\cos\left(\frac{2m+1}{2}t\right)dt=w(\beta),\quad \beta\in\left[0,\beta_*\right].$$

Используя выражение (4.2) в первом слагаемом в левой части и интегральное представление (4.3) во втором слагаемом, получаем уравнение

$$\int_0^{\beta}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2\left(\cos t-\cos\beta\right)}}dt-$$
$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\beta_*}\varphi(t)\sum_{m=0}^{\infty}g_m\cos\left(\frac{2m+1}{2}t\right)dt\int_0^{\beta}\frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2}x\right)}{\sqrt{2\left(\cos x-\cos\beta\right)}}dx=w(\beta),\ \beta\in\left[0,\beta_*\right],$$

которое, после не сложных преобразований, приводится к виду

$$\int_0^{\beta}\left[\varphi(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\beta_*}\varphi(t)\left[g(x-t)+g(x+t)\right]dt\right]\frac{dx}{\sqrt{2(\cos x-\cos\beta)}}=$$
$$=w(\beta),\ \beta\in[0,\beta_*],\ g(y)=\sum_{m=0}^{\infty}g_m\cos\left(\frac{2m+1}{2}y\right). \tag{4.8}$$

Подставляя (4.7) в левую часть уравнения (4.5) и, проводя операцию интегрирования по частям, приходим к выражению

$$\varphi(\beta_*)\sum_{m=0}^{\infty}P_m(\cos\beta)\sin\left(\frac{2m+1}{2}\beta_*\right)-$$
$$-\varphi'(t)\int_0^{\beta_*}\sum_{m=0}^{\infty}P_m(\cos\beta)\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)dt,\quad \beta\in(\beta_*,\pi].$$

Видим, что оно равно нулю в силу (4.1) и неравенств $0<t\le\beta_*<\beta\le\pi$. Таким образом, уравнение (4.5) тождественно выполняется.

Уравнение (4.8) является уравнением Абеля относительно выражения в квадратных скобках [15]. Его решение имеет вид [16]

$$\varphi(\beta)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\beta_*}\varphi(t)\left[g(\beta-t)+g(\beta+t)\right]dt=\frac{2}{\pi}\frac{d}{d\beta}\int_0^{\beta}\frac{w(x)\sin x dx}{\sqrt{2(\cos\beta-\cos x)}}, \tag{4.9}$$
$$\beta\in[0,\beta_*].$$

Уравнение (4.9) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода относительно функции $\varphi(\beta)$.

Таким образом, разрешающая контактную задачу система уравнений имеет вид

$$\varphi(\beta)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\beta_*}\varphi(t)\left[g(\beta-t)+g(\beta+t)\right]dt=f(\beta),\quad \beta\in[0,\beta_*],$$
$$p_m=\frac{2m+1}{2}\int_0^{\beta_*}\varphi(t)\cos\left(\frac{2m+1}{2}t\right)dt, \tag{4.10}$$
$$-\pi\sum_{m=0}^{\infty}p_mC_m(\beta_*)=P,$$

где $f(\beta)=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{d}{d\beta}\displaystyle\int_0^{\beta}\frac{w(x)\sin x dx}{\sqrt{2(\cos\beta-\cos x)}}$, $C_m(\beta_*)=\displaystyle\int_0^{\beta_*}P_m(\cos\beta)\sin 2\beta d\beta.$

Отметим, что первое уравнение системы (4.10) является регулярным интегральным уравнением Фредгольма II рода. Его решение может быть получено с помощью известных методов, например, метода последовательных приближений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С применением принципа суперпозиции, метода функций влияния, парных рядов уравнений и разложений в ряды по системе собственных функций построена разрешающая система уравнений контактной задачи для сферической оболочки, опирающейся на абсолютно твёрдую поверхность. Разработан метод её решения, основанный на сведении системы уравнений к интегральному уравнению Фредгольма II рода относительно новой вспомогательной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грицков А.В., Киреенков А.А., Федотенков Г.В. *Функции Грина для балки Тимошенко, связанной с деформируемым основанием* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №4. – С.561-574.
2. Киреенков А.А., Федотенков Г.В. *Модель силового контакта композитной сферической оболочки с твёрдой поверхностью с учётом комбинированного анизотропного сухого трения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №4. – С.558-569.
3. Киреенков А.А., Федотенков Г.В. *Движение композитной сферической оболочки по твёрдой поверхности с учётом комбинированного сухого трения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №3. – С.327-340.
4. Kireenkov A.A. *Further development of the theory of multicomponent dry friction* / Proceedings of the 6th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. COUPLED PROBLEMS’2015. – 2015. – Pp.203-209.
5. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Anisotropic Combined Dry Friction in Problems of Pneumatics’ Dynamics* // Journal of Vibrational Engineering and Technologies. – 2020. – Vol.8(2). – Pp.365-372.
6. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Coupled dry friction models in problems of aviation pneumatics’ dynamics* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2017. – Vol.127. – Pp.198-203.
7. Zhavoronok S.I., Kireenkov A.A. *On the effect of the anisotropic dry friction and the deformed state of tires on the shimmy initiation* / Proceedings of the VII International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. – Rhodes Island, Greece, 2017. – Pp.216-226.
8. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. *Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства* // Труды МАИ. – 2014. – №78. – С.10.
9. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. *Нестационарная осесимметричная задача об ударе сферической оболочки по упругому полупространству (начальный этап взаимодействия)* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.98-108.
10. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. *Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек* // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2018. – Т.160. – №3. – С.561-577.
11. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. *Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
12. *Гоббсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций*. – М.: Издательство иностранной литературы, 1952. – 476 с.
13. Уфлянд Я.С. *Метод парных уравнений в задачах математической физики.* – Л.: Наука, 1977. – 219 с.
14. Лебедев Н.Н. *Специальные функции и их приложения*. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1963. – 379 с.
15. Михлин С.Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям*. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 233 с.

16. Краснов М.Л. *Интегральные уравнения. Введение в теорию*. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1975. – 303 с.

REFERENCES

1. Gritskov A.V., Kireenkov A.A., Fedotenkov G.V. *Funktsii Grina dlya balki Timoshenko, svyazannoj s deformiruemym osnovaniem [Green functions for a Timoshenko beam associated with a deformable base]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2022, Vol.28, No.4, Pp.561-574.
2. Kireenkov A.A., Fedotenkov G.V. *Model' silovogo kontakta kompozitnoj sfericheskoj obolochki s tvyordoj poverkhnost'yu s uchyotom kombinirovannogo anizotropnogo sukhogo treniya [A model of the force contact of a composite spherical shell with a solid surface taking into account the combined anisotropic dry friction]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2021, Vol.27, No.4, Pp.558-569.
3. Kireenkov A.A., Fedotenkov G.V. *Dvizhenie kompozitnoj sfericheskoj obolochki po tvyordoj poverkhnosti s uchyotom kombinirovannogo sukhogo treniya [Motion of a composite spherical shell on a solid surface under conditions of combined dry friction]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2020, Vol.26, No.3, Pp.327-340.
4. Kireenkov A.A. *Further development of the theory of multicomponent dry friction*. Proceedings of the 6th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. COUPLED PROBLEMS'2015, 2015, Pp.203-209.
5. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Anisotropic Combined Dry Friction in Problems of Pneumatics' Dynamics*. Journal of Vibrational Engineering and Technologies, 2020, Vol.8(2), Pp.365-372.
6. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Coupled dry friction models in problems of aviation pneumatics' dynamics*. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, Vol.127, Pp.198-203.
7. Zhavoronok S.I., Kireenkov A.A. *On the effect of the anisotropic dry friction and the deformed state of tires on the shimmy initiation*. Proceedings of the VII International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering, Rhodes Island, Greece, 2017, Pp.216-226.
8. Mihajlova E.Yu., Tarlakovskij D.V., Fedotenkov G.V. *Nestatsionarnyj kontakt sfericheskoj obolochki i uprugogo poluprostranstva [Transient contact of a spherical shell and an elastic half-space]*. Trudy MAI, 2014, No.78, Pp.10.
9. Mikhailova E.Y., Fedotenkov G.V. *Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction).* Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.239-247.
10. Mihajlova E.Yu., Tarlakovskij D.V., Fedotenkov G.V. *Obobshhennaya linejnaya model' dinamiki tonkikh uprugikh obolochek [The generalized linear model of thin elastic shells dynamics]*. Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki, 2018, Vol.160, No.3, Pp.561-577.
11. Gorshkov A.G., Medvedskij A.L., Rabinskij L.N., Tarlakovskij D.V. *Volny v sploshnykh sredakh: Uchebnoe posobie: Dlya vuzov [Waves in elastic media: A Textbook]*. Moskva, FIZMATLIT, 2004, 472 p.
12. Gobbson E.V. *Teoriya sfericheskikh i ehllipsoidal'nykh funktsij [Theory of spherical and elliptical functions]*. Moskva, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1952, 476 p.

13. Uflyand Ya.S. *Metod parnykh uravnenij v zadachakh matematicheskoj fiziki [The method of paired equations in mathematical physics]. Leningrad, Nauka,* 1977, 219 p.
14. Lebedev N.N. *Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya [Special distributions and their applications]*. Moskva, *Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoj literatury,* 1963, 379 p.
15. Mihlin S.G. *Lektsii po linejnym integral'nym uravneniyam [Lectures on linear integral equations]*. Moskva, *Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoj literatury*, 1959, 233 p.
16. Krasnov M.L. *Integral'nye uravneniya. Vvedenie v teoriyu [Integral equations theory: an introduction]*. Moskva, *Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoj literatury izdatel'stva «Nauka»*, 1975, 303 p.

Поступила в редакцию 01 сентября 2023 года.

Сведения об авторах:

Киреенков Алексей Альбертович – к.ф.-м.н., с.н.с., ФГБУН Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, г. Москва, Россия; e-mail: kireenk@ipmnet.ru, kireenk@mail.ru

Михайлова Елена Юрьевна – к.ф.-м.н., доц., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: mihe16@yandex.ru

Федотенков Григорий Валерьевич – д.ф.-м.н., доц., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: greghome@mail.ru