



## О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ\*

Курбатов А.С., Исаченко И.А., Жаворонок С.И.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Предложена новая формулировка безмоментной теории оболочек с памятью формы, основанная на однократно связной модели термоупругих фазовых переходов и внутренних кинематических переменных. На базе эволюционных и определяющих уравнений трехмерной задачи механики материала с памятью для тонкой оболочки, находящейся в безмоментном напряженном состоянии, получены инкрементальное уравнение, описывающее приращение объемной доли параметра фазового состава, усредненной по толщине, и инкрементальное определяющее уравнение для малого приращения тензора тангенциальной деформации оболочки при удержании нулевых членов рядов Маклорена для объемной доли мартенсита и линейного тензора деформации. Температура в рамках однократно связной модели является заданным полем. Предложенные эволюционное и определяющее уравнения для безмоментной оболочки учитывают разносопротивляемость материала с памятью, т.е. зависимость точной верхней грани деформации изменения формы в процессе фазового перехода от параметра напряженного состояния, записанного в терминах компонентов тензора тангенциальных сил. Рассмотрены некоторые статические задачи для безмоментных оболочек вращения, находящихся под действием постоянных внешних сил, и переменного во времени однородного поля температуры (сферическая оболочка, заполненная нагретой жидкостью под давлением при действии вертикальной перегрузки), допускающие замкнутое аналитическое решение уравнений статического равновесия. Вычислены распределения тангенциальных деформаций оболочки вдоль образующей при различных температурах. Показано, что при малых перегрузках влияние веса заполнителя мало по сравнению с эффектом давления, а пренебрежение разносопротивляемостью материала при двухосном растяжении оболочки приводит к недопустимому завышению амплитуд фазовых деформаций.

**Ключевые слова:** сплавы с эффектом памяти; превращения фазовые; деформации упругие; деформации фазовые; оболочек теория безмоментная

## ON THE SOLUTIONS FOR SOME STATICS PROBLEMS FOR SHAPE MEMORY MEMBRANE SHELLS UNDERGOING NON-ISOTHERMAL PHASE TRANSITIONS

Kurbatov Alexey S., Isachenko Ivan A., Zhavoronok Sergey I.

*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

---

\* Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН (номер гос. регистрации темы 121112200124-1).

## ABSTRACT

A new theory formulation for shape memory membrane shells is based on the once coupled model of thermoelastic phase transitions and on the intrinsic variables. The three-dimensional evolution and constitutive equations for a shape memory alloy are used as a background. Both the incremental equation for across-the-thickness average of the phase state parameter and the constitutive equation for the small increment of the shell tangent strain tensor are derived considering the membrane stress state of a thin shell and keeping only the zeroth term in the minor totals for the martensite volume ratio and linear strain tensor. The temperature is assumed to be given scalar fields as provided by the once coupled model of phase transforms. The proposed evolution and constitutive equations for the membrane take into account the differentially resistant material property, i.e. the dependence of the deviatoric strain on the stress state parameter expressed in terms of tangent force tensor. Some problems of statics for shape memory membrane shells of revolution loaded by constant external forces and by temperature fields varying in time are considered (e.g. the spherical shell filled by the pressurized heated fluid under vertical g-loads); such problems allow one to obtain closed-form analytical solutions of static equations. As a result, the distributions of the tangent strains along the generator line of the base surface of the shell for different temperatures are computed. It is shown small g-loads lead to small impact of the weight load of fluid as compared with the pressure effect. On the other hand neglecting for the differential resistance of the shape memory alloy results in inadmissible overestimating of tangent strain amplitudes for shells under the biaxial tension.

**Keywords:** shape memory alloys; phase transforms; elastic and phase strains; membrane shells

## ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные оболочки (сильфоны), выполненные из сплавов с памятью формы (СПФ), используются в качестве демпферов и элементов противосейсмической защиты [1,2], а также сенсоров и актуаторов [3]. Однако, в достаточной мере развитая теория оболочек с памятью отсутствует; авторы работ [1,3] применяют метод конечных элементов в трехмерной постановке задачи, ограничиваясь моделью, описывающей явление сверхупругости СПФ при структурных превращениях. Известные теории оболочек с памятью [4-7] основаны на концепции фазового превращения с разрывом параметра фазового состава на фронте фазового перехода, не соответствующей наблюдаемому в бинарных сплавах семейства Ni-Ti существованию двух квазифронтов начала и окончания перехода со смешанным фазовым составом между ними [8]. Кроме того, модели данного класса требуют постановки условий на разрыве [9] и определения положения фронта в процессе превращения [10]. Существуют также некоторые теоретические разработки в области механики тонких пленок с памятью [11] на подложках [12,13]. В то же время перечисленные результаты не удовлетворяют потребность в полноценной теории оболочек с памятью формы, пригодной для качественного анализа деформирования и устойчивости тонкостенных криволинейных элементов из СПФ. Известно, что стержни [14], пластины [15] и оболочки из СПФ [16] склонны к потере устойчивости при аномально низких критических напряжениях в силу возмущающего эффекта фазового перехода; притом, что для прямолинейных и плоских элементов данный эффект изучен достаточно детально как на базе одномерных моделей и бифуркационного подхода [17], так и численно в трехмерной нелинейной постановке задачи [18,19], решений для оболочек немного (в основном

для сверхупругого поведения СПФ [20] или перехода «мартенсит – аустенит» при наложении кинематических связей [21]).

Одной из наиболее развитых моделей СПФ является феноменологическая модель [17], учитывающая как фазовые и структурные превращения, так и другие эффекты. На базе данной модели получены численные решения задач о деформировании толстостенных цилиндрических и сферических оболочек [22-24], а также о потере устойчивости тривиальной формы равновесия цилиндрическими оболочками с памятью [16]. В основу решений положена постановка краевой задачи относительно вектора перемещения; при построении общей теории оболочек с памятью данная постановка требует обращения определяющих уравнений, изначально разрешенных относительно приращения тензора деформации [25,26]. В общем случае обратные инкрементальные уравнения были получены сравнительно недавно [27]. В то же время формулировка краевой задачи механики относительно тензора напряжения в случае материала с памятью не требует обращения определяющих соотношений [28-30]; предложена постановка задачи теории оболочек из СПФ во «внутренних» переменных, соответствующая концепции [31,32], и получены уравнения совместности для оболочки [33,34].

Первым приближением, обеспечивающим построение частного решения, а в некотором классе задач – и общего решения краевой задачи общей теории оболочек, является решение на базе безмоментной теории [35]. В силу статической определимости краевой задачи статики безмоментной оболочки описание ее деформирования в процессе фазового превращения сводится к интегрированию определяющих уравнений при заданных компонентах тензора тангенциальных сил и температуры. Ниже рассмотрено построение эволюционного уравнения для параметра фазового состава и определяющего уравнения, разрешенного относительно тензора тангенциальной деформации, при учете зависимости точной верхней грани деформации изменения формы от вида напряженного состояния для безмоментной оболочки произвольной формы, выполнена постановка краевой задачи и получено решение для сферической оболочки, заполненной жидкостью заданной температуры под давлением. Проведен анализ зависимости амплитуд фазовых деформаций от сочетания действующих нагрузок и показано, что для достаточно тонких оболочек (при отношении толщины к радиусу кривизны  $h/R \sim 1/1000$ ) и в отсутствие перегрузок влияние веса жидкости мало по сравнению с избыточным давлением; таким образом, для грубой оценки фазовых деформаций на базе безмоментной теории допустимы приближенные формулы. С другой стороны, показано, что при двухосном растяжении оболочки пренебрежение разносопротивляемостью СПФ приводит к существенному завышению амплитуд фазовых деформаций.

## **1. ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С ПАМЯТЬЮ, ПРЕТЕРПЕВАЮЩИХ ТЕРМОУПРУГИЕ ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ**

### **1.1. Основные соотношения безмоментной теории тонких оболочек.**

Пусть  $S$  – моделирующее срединную поверхность тонкой оболочки двумерное гладкое многообразие, оснащенное системой координат  $\xi^1, \xi^2 \in D_\xi \subseteq \mathbb{R}^2$  и характеризующееся двумя симметрическими тензорными

полями на расслоении  $TS$ , удовлетворяющими уравнениям Петерсона  $\epsilon^{\alpha\beta}\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} = 0$  и Кодацци-Гаусса (1.1) – метрическим тензором  $a_{\alpha\beta}$  и тензором кривизны  $b_{\alpha\beta}$  [36] ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots = 1, 2$ )

$$\epsilon^{\gamma\delta}(\partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda \Gamma_{\delta\lambda}^\alpha - b_{\beta\gamma} b_{\delta}^\alpha) = 0; \quad 2aK = \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\delta\gamma} (\partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta, \alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda \Gamma_{\delta\lambda, \alpha}); \quad (1.1)$$

$\epsilon^{\alpha\beta}$  – компоненты тензора Леви-Чивиты,  $2\Gamma_{\alpha\beta, \gamma} = -\partial_\alpha a_{\beta\gamma} + \partial_\beta a_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma a_{\alpha\beta}$ ,  $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial\xi_\alpha$ . Деформирование поверхности  $S \rightarrow S'$  описывается симметрическими тензорами тангенциальной деформации  $\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})$  и изменения кривизны  $\varkappa_{\alpha\beta} = b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}$ , удовлетворяющими линеаризованным уравнениям совместности деформаций (1.2)

$$\epsilon^{\alpha\delta} \epsilon^{\beta\gamma} \nabla_\beta \mu_{\gamma\delta} = b_{\lambda}^\alpha \epsilon^{\beta\gamma} \epsilon^{\delta\lambda} \epsilon_{\gamma\delta}; \quad b_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\delta} \mu_{\gamma\delta} = \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\delta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \epsilon_{\gamma\delta}, \quad (1.2)$$

где в случае тонкой оболочки допустимо принять  $\mu_{\gamma\delta} = -\varkappa_{\gamma\delta} + b_{\gamma}^\lambda \epsilon_{\delta\lambda} \approx -\varkappa_{\gamma\delta}$  [35].

Оболочка, вообще говоря, представляет собой трехмерное тело  $V \subset \mathbb{R}^3$  – некоторую окрестность поверхности  $S$  с системой координат  $\xi^\alpha, \zeta \in [-h/2, h/2]$ ,  $h$  – толщина оболочки, с метрическим тензором  $g_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$  на расслоении  $TV$

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta} - 2\zeta b_{\alpha\beta} + \zeta^2 b_{\alpha\gamma} b_{\beta}^\gamma \approx a_{\alpha\beta} - 2\zeta b_{\alpha\beta}, \quad g_{i3} = \delta_{i3}; \quad (1.3)$$

с учетом (1.3) тензор деформации  $e_{ij} = \frac{1}{2}(g'_{ij} - g_{ij})$  может быть приближен линейным по нормальной координате  $\zeta$  соотношением (1.4) – представлением гипотезы Кирхгоффа во внутренних кинематических переменных  $\epsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\varkappa_{\alpha\beta}$  [37]

$$e_{ij} = e_{ij}(\epsilon_{\alpha\beta}, \varkappa_{\alpha\beta}): \quad e_{\alpha\beta} \approx \epsilon_{\alpha\beta} - \zeta \varkappa_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha 3} \rightarrow 0; \quad (1.4)$$

В соответствии с (1.5) тангенциальная деформация  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и изменение кривизны  $\varkappa_{\alpha\beta}$  оболочки являются коэффициентами ряда Маклорена [37] компонентов тензора  $e_{\alpha\beta}$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}|_{\zeta=0}, \quad \varkappa_{\alpha\beta} = -\partial_\zeta e_{\alpha\beta}|_{\zeta=0}. \quad (1.5)$$

Соотношения (1.5) – основа для пространственной редукции определяющих уравнений однократно связной модели термоупругих фазовых превращений [25].

Напряженное состояние тонкой оболочки, описываемой уравнениями канонической теории [35], задается тангенциальными компонентами тензора  $\sigma^{\alpha\beta}$

$$\sigma^{\alpha\beta} = h^{-1} N^{\alpha\beta} + 12h^{-3} M^{\alpha\beta}, \quad \sigma^{33} \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

$N^{\alpha\beta}$ ,  $M^{\alpha\beta}$  – контравариантные компоненты тензоров тангенциальных сил и моментов, определенных на расслоении  $TS$  для тонкой оболочки соотношениями

$$N^{\alpha\beta} \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} d\zeta, \quad M^{\alpha\beta} \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} \zeta d\zeta; \quad (1.7)$$

в соотношениях (1.7) для класса тонких оболочек предполагается  $|g_{\alpha\beta}|/|a_{\alpha\beta}| \approx 1$ .

Напряженное состояние (1.6) является безмоментным в области  $S \setminus S_M$ ,  $S_M$  – носитель общего (моментного) решения, т.е.  $\exists N_*^{\alpha\beta}$  – частное решение, такое, что

$$\sup_{M \in S \setminus S_M} |\sigma^{\alpha\beta}(M^{\gamma\delta})| \sim h^{-1} R_0 \inf_{M \in S \setminus S_M} |\sigma^{\alpha\beta}(N^{\gamma\delta})| \Rightarrow \sigma^{\alpha\beta} \approx h^{-1} N_*^{\alpha\beta}, \quad (1.8)$$

если тангенциальные  $q^\alpha$  и нормальный  $p$  компоненты главного вектора внешних сил, приведенных к  $S$ , и геометрия срединной поверхности  $S$  удовлетворяют достаточным условиям безмоментности, приведенным, например, в [35]

- 1)  $q^\alpha, p, b_\alpha^\beta, h$  существенно не возрастают при дифференцировании по  $\xi^\alpha$ ;
- 2)  $\exists M' \in S : b_1^1(M') = b_1^2(M') = b_2^1(M') = b_2^2(M') = 0, |b_\alpha^\beta(M')| = 0, \partial_\gamma b_\alpha^\beta|_{M'} \neq 0$ ;
- 3)  $S$  не содержит бесконечно удаленных точек.

При выполнении условий безмоментности компоненты тензора тангенциальных сил  $N^{\alpha\beta}$  приближенно удовлетворяют уравнениям статического равновесия оболочки (1.9) и силовым краевым условиям (1.10)

$$\nabla_\beta N^{\alpha\beta} + q^\alpha = 0, \quad b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + p = 0, \quad (1.9)$$

$$N^{\alpha\beta} \nu_\beta|_{S_\sigma} = N_*^\alpha. \quad (1.10)$$

Определяющие уравнения для тензора упругой деформации имеют вид [35]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{E,T} = E^{-1} h^{-1} \Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\gamma\delta} + \alpha a_{\alpha\beta} (T^0 - T_0^0), \quad (1.11)$$

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(1 + \nu)(a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} + a_{\beta\gamma} a_{\alpha\delta}) - \nu a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta}.$$

$E$  – модуль Юнга,  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения (вообще говоря, зависящие от фазового состава),  $T_0^0 = T_0|_{\zeta=0}$  – начальная температура. Изменение кривизны  $\varkappa_{\alpha\beta}$  определяется из уравнения (1.2) по заданной (1.11) деформации  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ .

## 1.2. Определяющие уравнения безмоментной теории оболочек с памятью, претерпевающих термоупругие фазовые переходы.

Поле температуры в соответствии с предположениями однократно связанной модели термоупругих фазовых переходов в СПФ [17,25] предполагаем известным и в силу малости толщины  $h$  постоянным по толщине оболочки, т.е.  $T \approx T^0(\xi^\alpha) = T|_{\zeta=0}$ . Фазовый состав оболочки задается постоянным по толщине скалярным полем объемной доли мартенсита  $q^0 = q|_{\zeta=0} \in [0,1]$  [34], где  $M$ -фазе соответствует значение  $q^0 = 1$ ,  $A$ -фазе – значение  $q^0 = 0$ .

Для тангенциальной деформации введем аддитивное разложение [25,33]

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{E,T} + \varepsilon_{\alpha\beta}^\pm; \quad (1.12)$$

упругая и температурная деформации определяются конечным соотношением (1.11). Модуль Юнга  $E$  и коэффициент линейного расширения  $\alpha$  зависят от  $q^0$

$$E^{-1}(q^0) = E_A^{-1} + q^0 E_M^{-1}, \quad \alpha(q^0) = \alpha_A + q^0 \alpha_M; \quad (1.13)$$

$E_\Delta^{-1} = E_M^{-1} - E_A^{-1}$ ,  $\alpha_\Delta = \alpha_A - \alpha_M$ , где  $E_A, E_M, \alpha_A, \alpha_M$  – модули Юнга и коэффициенты линейного расширения в  $A$  ( $q^0 = 0$ ) и  $M$  ( $q^0 = 1$ ) фазовых состояниях СПФ [17]. Приращение тангенциальной фазовой деформации  $\varepsilon_{\alpha\beta}^\pm$  определяется (1.14)

$$\delta\varepsilon_{\alpha\beta}^\pm = (\omega_{\alpha\beta}^{\pm(0)} + \varepsilon_0 a_{\alpha\beta}) \delta q^0, \quad (1.14)$$

$$\omega_{\alpha\beta}^{\pm(0)} = \frac{3}{2} \rho_D(s) \left[ 1 - q^0 f^\pm(q^0) \right] \varphi_1(\sigma_i/\sigma_0) \Sigma_{\alpha\beta} + f^\pm(q^0) \left( \varepsilon_{\alpha\beta}^\pm - \frac{1}{3} \varepsilon_0 q^0 a_{\alpha\beta} \right), \quad (1.15)$$

$$f^\pm(q^0) = (1 \pm 1 + q^0)^{-1}, \quad \varphi_1(x) = \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}), \quad (1.16)$$

в (1.16) знак «+» соответствует переходу  $A \rightarrow M$ , знак «-» – переходу  $M \rightarrow A$ ,  $\rho_D(s)$  – точная верхняя грань деформации изменения формы при фазовом переходе,  $\varepsilon_0$  – дилатация при полном  $A \rightarrow M$  переходе [17],  $\Sigma_{\alpha\beta} = \sigma_i^{-1} s_{\alpha\beta}$  – направляющий тензор тангенциальной составляющей девиатора напряжения  $s_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \sigma a_{\alpha\beta}$ ,

$$\begin{aligned} s_{\alpha\beta} &= h^{-1} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\gamma\delta}, \quad s^{33} = -\frac{1}{3} a_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} \neq 0, \\ \sigma_i &= \sqrt{\frac{3}{2} (s^{\alpha\beta} s_{\alpha\beta} + s^{33} s_{33})} = h^{-1} \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\alpha\beta} N^{\gamma\delta}}, \\ \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} (a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma}) - \frac{1}{3} a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta}; \end{aligned} \quad (1.17)$$

Точная верхняя грань деформации изменения формы СПФ при фазовом переходе, вообще говоря, зависит от вида напряженного состояния. В первом приближении возможным ввести кусочно-линейную аппроксимацию

$$\rho_D(s) \approx \begin{cases} \rho_D^{\max}, & s \in [0, 1]; \\ \rho_D^{\max} + \delta\rho_D s, & s \in [-1, 0]; \end{cases} \quad (1.18)$$

$s$  – параметр вида напряженного состояния; для безмоментной оболочки (1.19)

$$s = \frac{27}{2} \sigma_i^{-3} |\sigma_i^j - \delta_i^j \sigma| = -\frac{9}{2} \sigma_i^{-3} h^{-3} a_{\alpha\beta} \epsilon^{\gamma\delta} \epsilon_{\lambda\mu} \bar{\Delta}_{\gamma\nu\pi}^{\lambda\cdot} \bar{\Delta}_{\delta\rho\sigma}^{\mu\cdot} N^{\alpha\beta} N^{\nu\pi} N^{\rho\sigma}; \quad (1.19)$$

$\sigma_0$  – пороговое значение интенсивности напряжения  $\sigma_i$  (1.17). Приращение трансверсальной фазовой деформации оболочки в безмоментном напряженном состоянии, вообще говоря, отлично от нуля и определяется соотношением (1.20)

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{33}^{\pm} &= (\omega_{33}^{\pm(0)} + \varepsilon_0) \delta q^0, \\ \omega_{33}^{\pm(0)} &= -\frac{1}{3} \rho_D(s) [1 - q^0 f^{\pm}(q^0)] \varphi_1(\sigma_i/\sigma_0) \sigma_i h^{-1} a_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + f^{\pm}(q^0) (\varepsilon_{33}^{\pm} - \frac{1}{3} \varepsilon_0 q^0). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Приращение объемной доли мартенситной фазы  $q^0$  задано уравнением (1.21)

$$\begin{aligned} \delta q^0 &= \Phi^{\pm(0)}(q^0, t^{\pm(0)}) [\delta T^0 - Q_{\alpha\beta}^{\pm(0)} \delta N^{\alpha\beta}]; \\ Q_{\alpha\beta}^{\pm(0)} &= (h\Delta_S)^{-1} (\omega_{\alpha\beta}^{\pm(0)} + \tilde{\omega}_{\alpha\beta}^{\pm(0)} + \tilde{\tilde{\omega}}_{\alpha\beta}^{\pm(0)} + h^{-1} E_{\Delta}^{-1} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\gamma\delta} + \varepsilon_0 a_{\alpha\beta}), \\ \tilde{\omega}_{\alpha\beta}^{\pm(0)} &= \frac{3}{2} \rho_D(s) h^{-1} [1 - q^0 f^{\pm}(q^0)] \varphi_1'(\sigma_i/\sigma_0) \sigma_0^{-1} \sigma_i \Sigma_{\alpha\beta}; \\ \tilde{\tilde{\omega}}_{\alpha\beta}^{\pm(0)} &= \rho_D'(s) h^{-1} [1 - q^0 f^{\pm}(q^0)] \varphi_1(\sigma_i/\sigma_0) S_{\alpha\beta}; \\ S_{\alpha\beta} &= -\frac{27}{2} \sigma_i^{-2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} h^{-2} \sigma \epsilon^{\gamma\delta} \epsilon^{\lambda\mu} (\bar{\Delta}_{\gamma\lambda\alpha\beta} \bar{\Delta}_{\delta\mu\nu\pi} + \bar{\Delta}_{\gamma\lambda\nu\pi} \bar{\Delta}_{\delta\mu\alpha\beta}) - 9 \sigma_i^{-2} \sigma \Delta_S \bar{\Delta}_{\alpha\beta\nu\pi} \right] N^{\nu\pi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} h^{-1} \Delta_S a_{\alpha\beta} \right\}; \quad \Delta_S = \frac{1}{2} h^{-2} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\gamma\delta} \bar{\Delta}_{\alpha\gamma\lambda\mu} \bar{\Delta}_{\beta\delta\nu\pi} N^{\lambda\mu} N^{\nu\pi}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где для прямого мартенситного перехода (знак «+») справедливы формулы (1.22)

$$\Phi^{+(0)}(q^0, t^{+(0)}) = -\pi \frac{1 - q^0}{T_S^+ - T_F^+} \operatorname{tg} \pi \frac{t^{+(0)}}{2}, \quad t^{+(0)} = \frac{T_S^{+(0)}(N^{\alpha\beta}) - T^0}{T_S^+ - T_F^+}; \quad (1.22)$$

в случае обратного мартенситного превращения (знак «-») – формулы (1.23)

$$\Phi^{-0)}(q^0, t^{-0)}) = -\pi \frac{q^0}{T_F^- - T_S^-} \operatorname{ctg} \pi \frac{t^{-0)}}{2}, \quad t^{-0)} = \frac{T^0 - T_S^{+(0)}(N^{\alpha\beta})}{T_F^- - T_S^-}, \quad (1.23)$$

$t^{\pm(0)}$  – безразмерная температура на поверхности  $S$  при прямом и обратном переходах [33],  $T_S^{\pm}$ ,  $T_F^{\pm}$  – температуры начала и окончания прямого и обратного

превращений при  $\sigma_i \equiv 0$ ,  $T_{S,F}^{\pm(0)}$  – температуры начала и окончания фазового перехода на поверхности  $S$  при действии в оболочке тангенциальных усилий  $N^{\alpha\beta}$

$$T_{S,F}^{\pm(0)}(N^{\alpha\beta}) = T_{S,F}^{\pm} + \Delta S^{-1} \left( \omega^{\pm(0)} + W_{\Delta} + 3\varepsilon_0 \sigma \right), \quad (1.24)$$

$$\omega^{\pm(0)} = \rho_D(s) \left[ 1 - q^0 f^{\pm}(q^0) \right] \varphi_1(\sigma_i/\sigma_0) \sigma_i + \\ + f^{\pm}(q_0) h^{-1} \left[ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm} - \frac{1}{3} (\varepsilon_{33}^{\pm} + q^0 \varepsilon_0) a_{\alpha\beta} \right] N^{\alpha\beta}; \quad W_{\Delta} = \frac{1}{2} E_{\Delta}^{-1} \Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\alpha\beta} N^{\gamma\delta}.$$

Вообще говоря, смещение границ температурных диапазонов фазовых превращений (1.24) существенно зависят не только от интенсивности напряжения  $\sigma_i$ , но и от вида напряженного состояния.

## 2. НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В БЕЗМОМЕНТНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ

Рассмотрим сферическую оболочку радиусом  $R$  и толщиной  $h$ , свободно опертую по диаметральному сечению, заполненную жидкостью плотностью  $\rho_0$ , нагретую до температуры  $T_* = T_0$  под давлением  $p_0$  (рис.1).

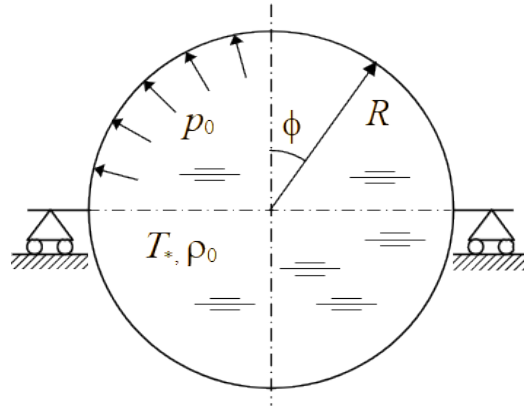


Рис.1. Постановка задачи.

Оболочка отнесена к системе координат  $O\phi\theta$ , где  $\phi \in [0, \pi]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \phi \end{pmatrix}, \quad -b_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \sin^2 \phi \end{pmatrix}.$$

Задача является осесимметричной:  $p \neq p(\theta)$ ,  $T_0 \neq T_0(\theta)$ . Физические компоненты тензора тангенциальных сил  $N_{\alpha\beta}^*$  определяются из уравнений (1.9) при учете зависимости давления  $p_{\Sigma}$  от координаты  $\phi$  (2.1) в виде (2.2) и (2.3)

$$p_{\Sigma} = p_0 + \rho_0 g n R (1 - \cos \phi); \quad (2.1)$$

$$N_{\phi\phi} = \frac{p_0 R}{2} + \frac{1}{6} \rho_0 g n R^2 \left\{ \Theta\left(\frac{1}{2}\pi - \phi\right) \left[ 1 - 2 \operatorname{ctg}^2 \phi (1 - \cos \phi) \right] + \right. \\ \left. + \Theta\left(\phi - \frac{1}{2}\pi\right) \left[ 5 + 2 \operatorname{ctg}^2 \phi (1 + \cos^2 \phi) \right] \right\}; \quad (2.2)$$

$$N_{\theta\theta} = \frac{p_0 R}{2} + \frac{1}{6} \rho_0 g n R^2 \left\{ \Theta\left(\frac{1}{2}\pi - \phi\right) \left[ 5 - 6 \cos \phi + 2 \operatorname{ctg}^2 \phi (1 - \cos \phi) \right] + \Theta\left(\phi - \frac{1}{2}\pi\right) \left[ 1 - 6 \cos \phi - 2 \operatorname{ctg}^2 \phi (1 + \cos \phi) \right] \right\}, \quad (2.3)$$

где  $\Theta(\phi)$  – функция Хевисайда.

Физические константы материала с памятью приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Физические постоянные сплава с памятью ТН-1.

$E_M, \text{ ГПа}$	$E_A, \text{ ГПа}$	$\nu$	$\rho_D$	$\delta\rho_D$	$\varepsilon_0$	$\sigma_0, \text{ ГПа}$	$\alpha_M, \text{ К}^{-1}$	$\alpha_A, \text{ К}^{-1}$	$\Delta S, \text{ Дж/К}$
30	70	0,31	0,14	0,45	$10^{-3}$	0,1	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$6,44 \cdot 10^5$

Рассмотрим далее оболочку толщиной  $h = 0,001$  м и радиусом  $R = 1$  м, заполненную жидкостью плотностью  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Примем давление и вертикальную перегрузку равными нулю:  $p_0 = 0, n = 0$ . Соответствующие зависимости физических компонентов девиатора  $s_{\alpha\beta}^*(\phi)$  и интенсивности напряжения  $\sigma_i(\phi)$ , отнесенные к напряжению  $\sigma_0$ , приведены на рис.2.

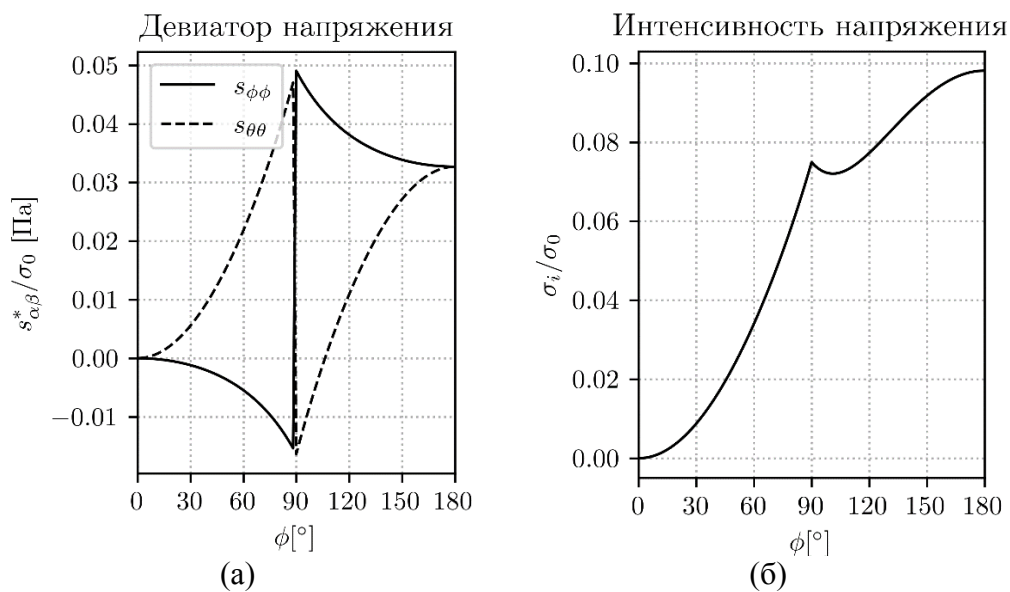


Рис.2. Безразмерные физические компоненты девиатора напряжения  $s_{\alpha\beta}^*/\sigma_0$  (а) и интенсивность напряжения  $\sigma_i/\sigma_0$  (б) в оболочке:  $p = 0, n = 0$ .

Пусть начальная температура равна  $T_0^0 = 90^\circ\text{C}$ . Оболочка последовательно охлаждается и нагревается через диапазоны фазовых переходов  $A \rightarrow M, M \rightarrow A$ , т.е.  $T_0^0 \rightarrow T_1^0 \rightarrow T_2^0$ , где  $T_1^0 = 10^\circ\text{C}, T_2^0 = T_0^0 = 90^\circ\text{C}$ . Процессы нагрева и охлаждения предполагаются достаточно медленными. В данном диапазоне температур при заданных величинах  $\rho_0, p_0, n$  осуществляется полный цикл термоупругих фазовых переходов  $A \rightarrow M \rightarrow A$  (рис.3).

Зависимости меридиональной деформации оболочки от температуры в точках  $\phi$ , приведенных в таблице 2, показаны на рис.4а,б; соответствующие зависимости окружной деформации – на рис.5а,б.



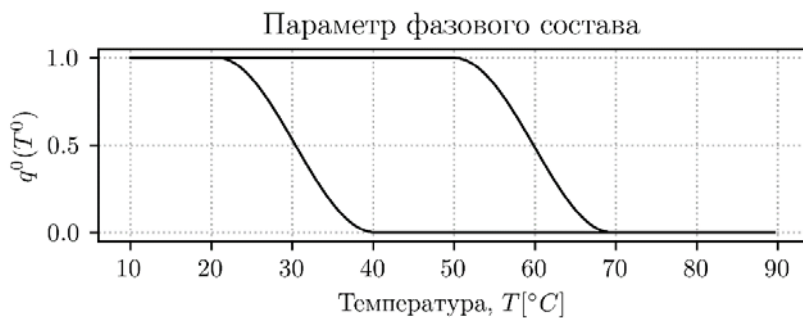
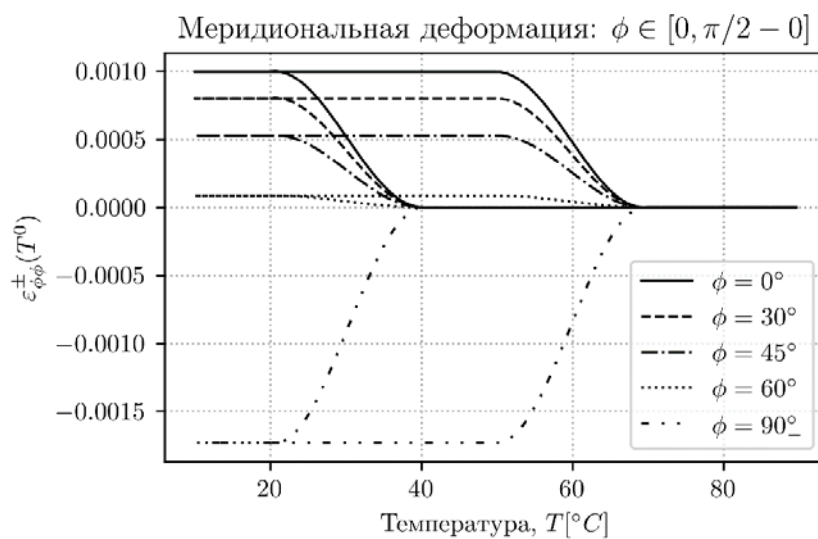


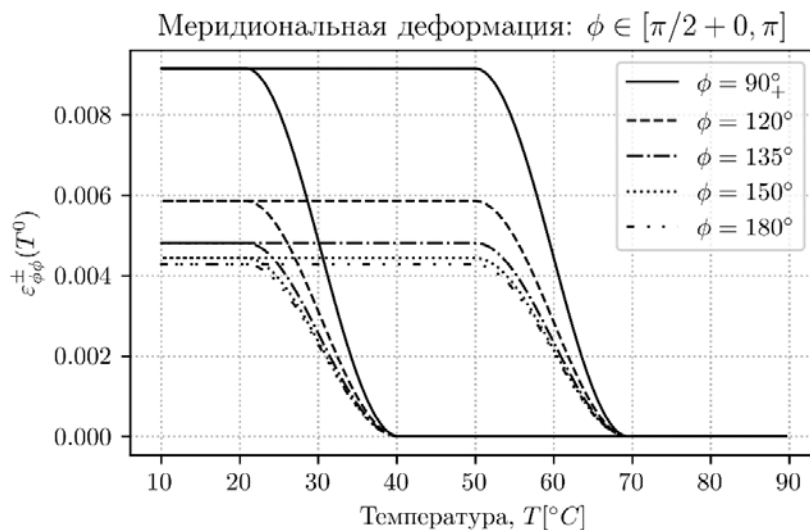
Рис.3. Зависимость параметра фазового состава  $q^0$  от температуры в оболочке:  $p_0 = 0$ ,  $n = 1$ ,  $\phi = \pi/4$ .

Таблица 2.

$\phi$ , рад	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2 - 0$	$\pi/2 + 0$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$\pi$
--------------	---	---------	---------	---------	-------------	-------------	----------	----------	----------	-------



(а)



(б)

Рис.4. Зависимости меридиональной фазовой деформации  $\varepsilon_{\phi\phi}^{\pm}$  от температуры:  $p_0 = 0$ ,  $n = 1$ .

В силу  $\sigma_i/\sigma_0 < 0.1$  и, следовательно, малости  $\varphi_1(\sigma_i/\sigma_0) < 0.08$  (рис.6) влияние первого слагаемого (1.15) на величину  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm}$  и смещение  $T_{S,F}^{\pm}$  незначительно.

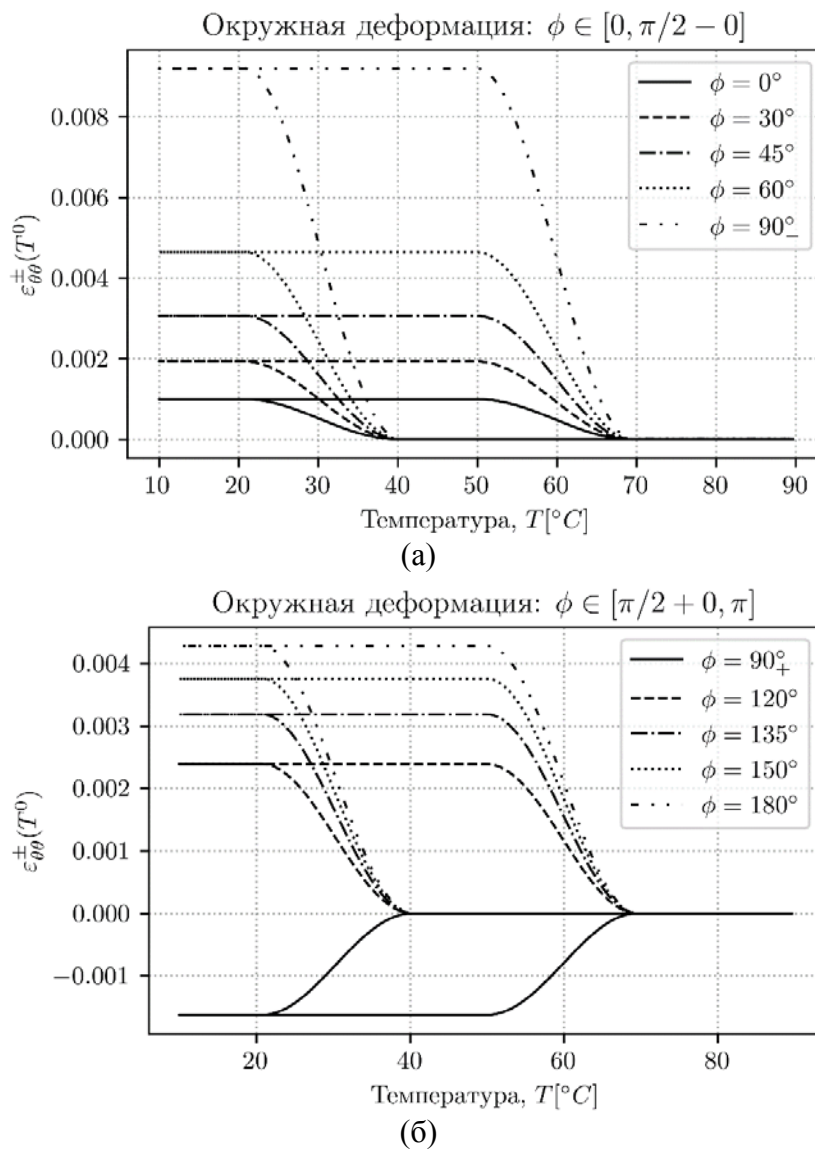


Рис.5. Зависимости окружной фазовой деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}^{\pm}$  от температуры:  $p_0 = 0$ ,  $n = 1$ .

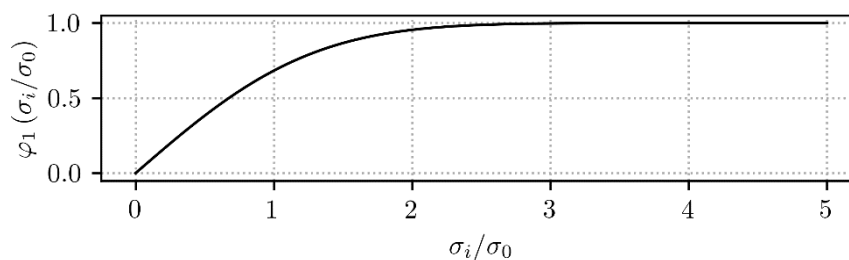


Рис.6. Материальная функция  $\varphi_1(\sigma_i/\sigma_0)$ .

На графиках, приведенных на рис.4 и 5, компоненты фазовой деформации терпят разрыв I рода в точке  $\phi = \pi/2$  вследствие разрыва  $N_{\phi\phi}$ ,  $N_{\theta\theta}$  и, следовательно, компонентов девиатора напряжения (рис.2а).

Пусть далее перегрузка  $n = 10$ . Зависимости деформации  $\varepsilon_{\phi\phi}$  от температуры в точках  $\phi$  (табл.2) показаны на рис.7а,б; соответствующие зависимости окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}$  – на рис.8а,б.

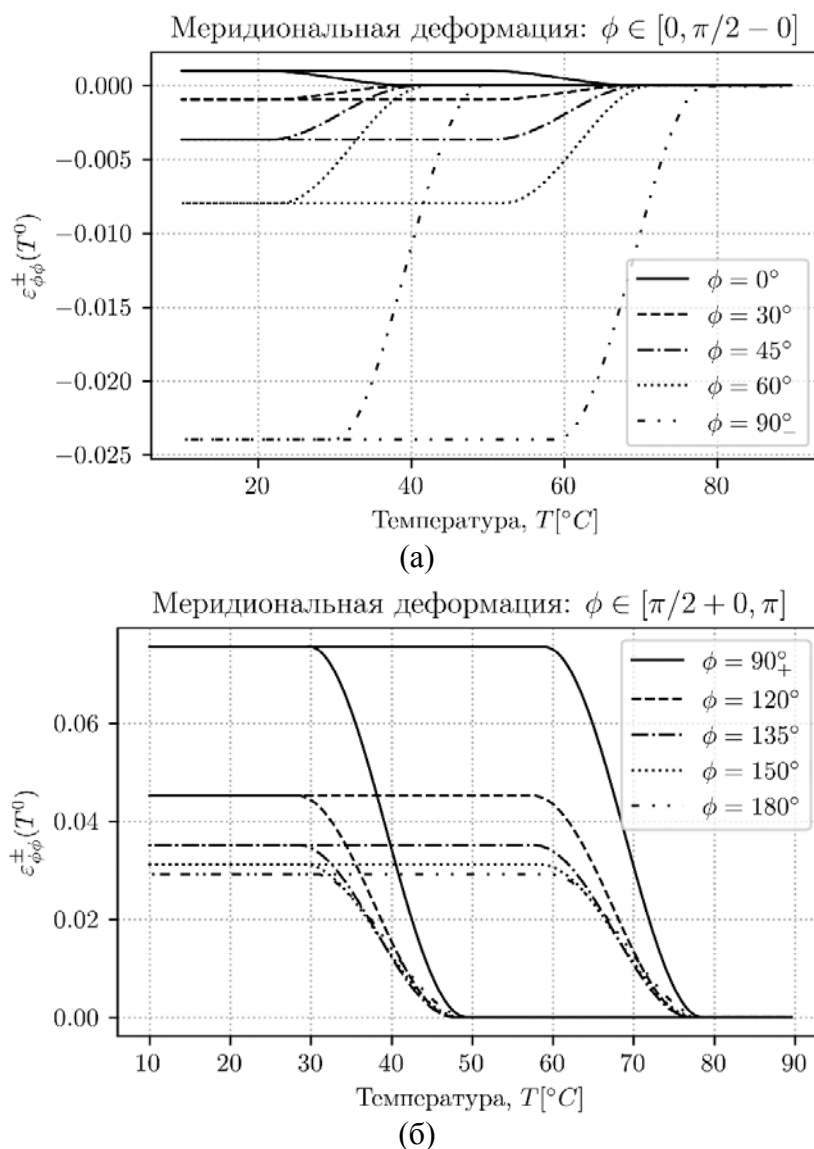


Рис.7. Зависимости меридиональной фазовой деформации  $\varepsilon_{\phi\phi}^{\pm}$  от температуры:  $p_0 = 0$ ,  $n = 10$ .

В силу увеличения интенсивности напряжения до величины  $\sigma_i/\sigma_0 \sim 1$  по сравнению со случаем  $n = 1$  наблюдается не только рост фазовых деформаций до максимальной амплитуды  $\max|\varepsilon_{\phi\phi}^{\pm}, \varepsilon_{\theta\theta}^{\pm}| \approx 0,075$ , но и заметное смещение температур начала и окончания фазовых переходов до  $T_S^+ \approx 50^\circ\text{C}$ ,  $T_F^+ \approx 30^\circ\text{C}$ ,  $T_S^- \approx 60^\circ\text{C}$ ,  $T_F^- \approx 80^\circ\text{C}$ , возрастающее от верхнего к нижнему полюсу сферы.

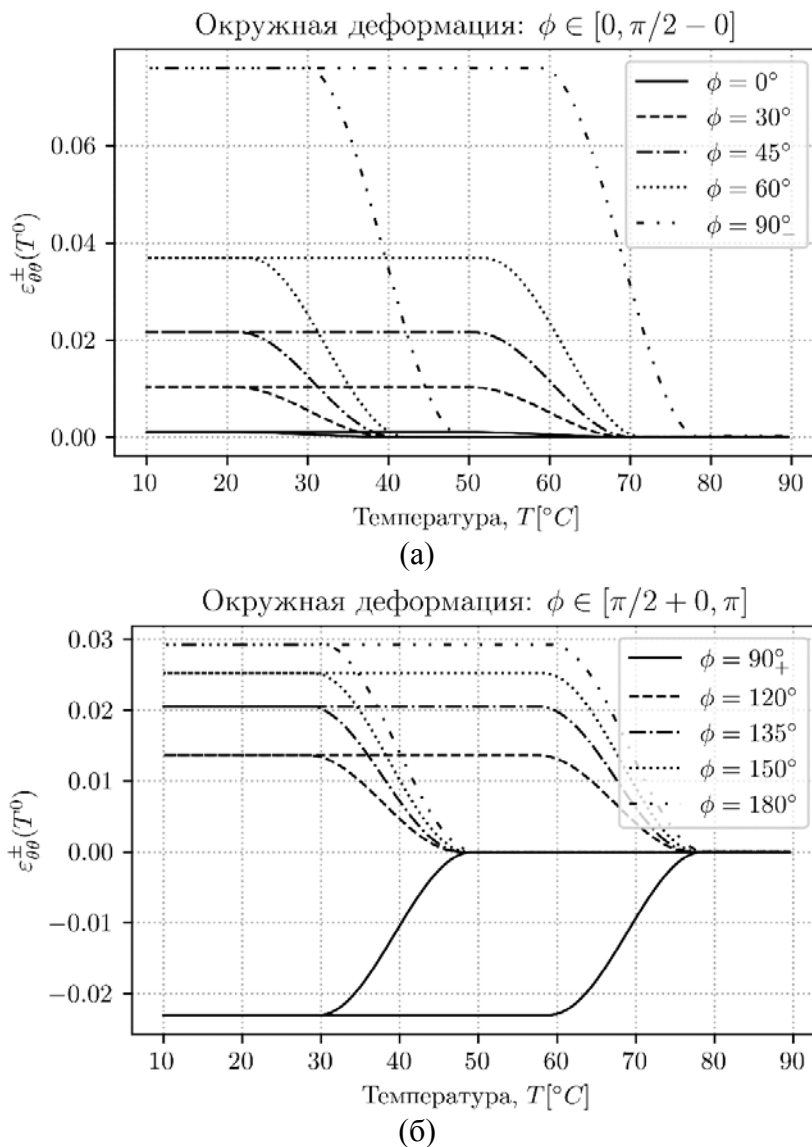


Рис.8. Зависимости окружной фазовой деформации  $\varepsilon_{\phi\phi}^{\pm}$  от температуры:  $p_0 = 0$ ,  $n = 10$ .

Пусть теперь  $n = 1$ , но действует избыточное давление  $p_0 = 10^5$  Па. Действие равномерного давления приводит к существенному изменению зависимости компонентов девиатора напряжения  $s_{\alpha\beta}^*$  и интенсивности напряжения  $\sigma_i$  от координаты  $\phi$  по сравнению с рис.2 (см. рис.9).

Зависимости  $\varepsilon_{\phi\phi}$  от температуры в точках  $\phi$  (табл.2) показаны на рис.10а,б; соответствующие зависимости окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}$  – на рис.11а,б.

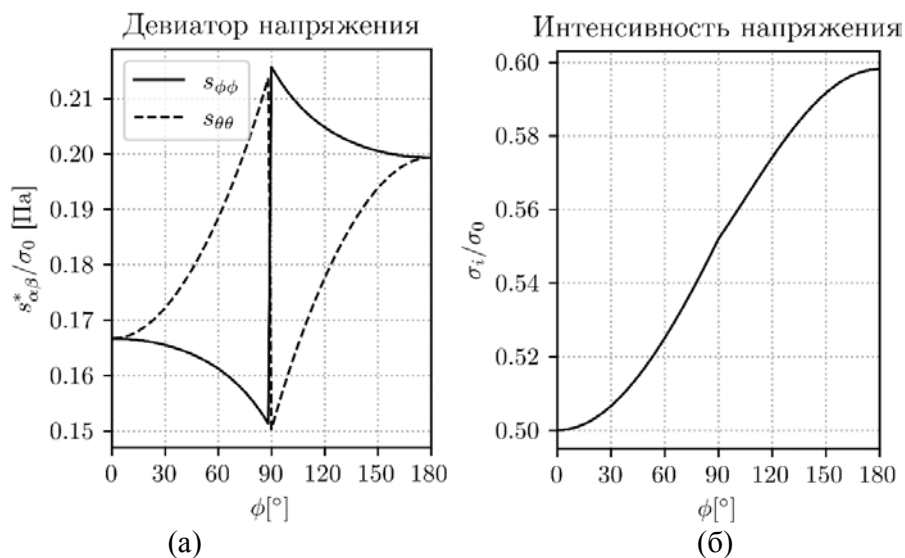


Рис.9. Безразмерные физические компоненты девиатора напряжения  $s_{\alpha\beta}^*/\sigma_0$  (а) и интенсивность напряжения  $\sigma_i/\sigma_0$  (б) в оболочке:  $p = 10^5$  Па,  $n = 1$ .

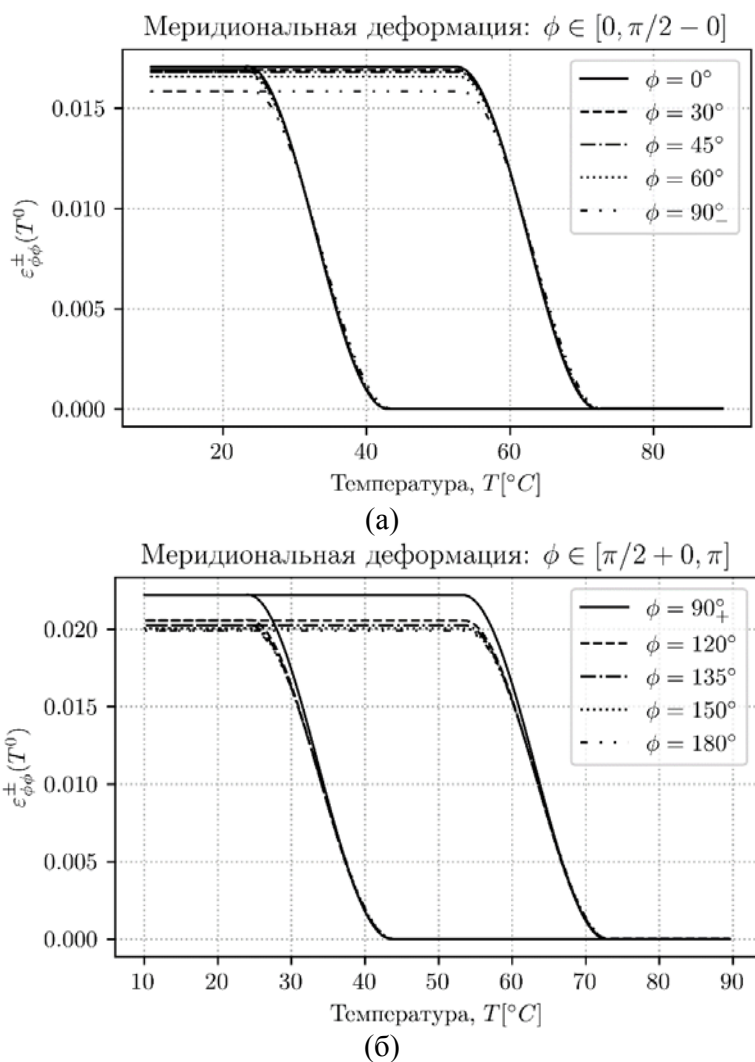


Рис.10. Зависимости меридиональной фазовой деформации  $\epsilon_{\phi\phi}^{\pm}$  от температуры:  $p_0 = 10^5$  Па,  $n = 1$ .

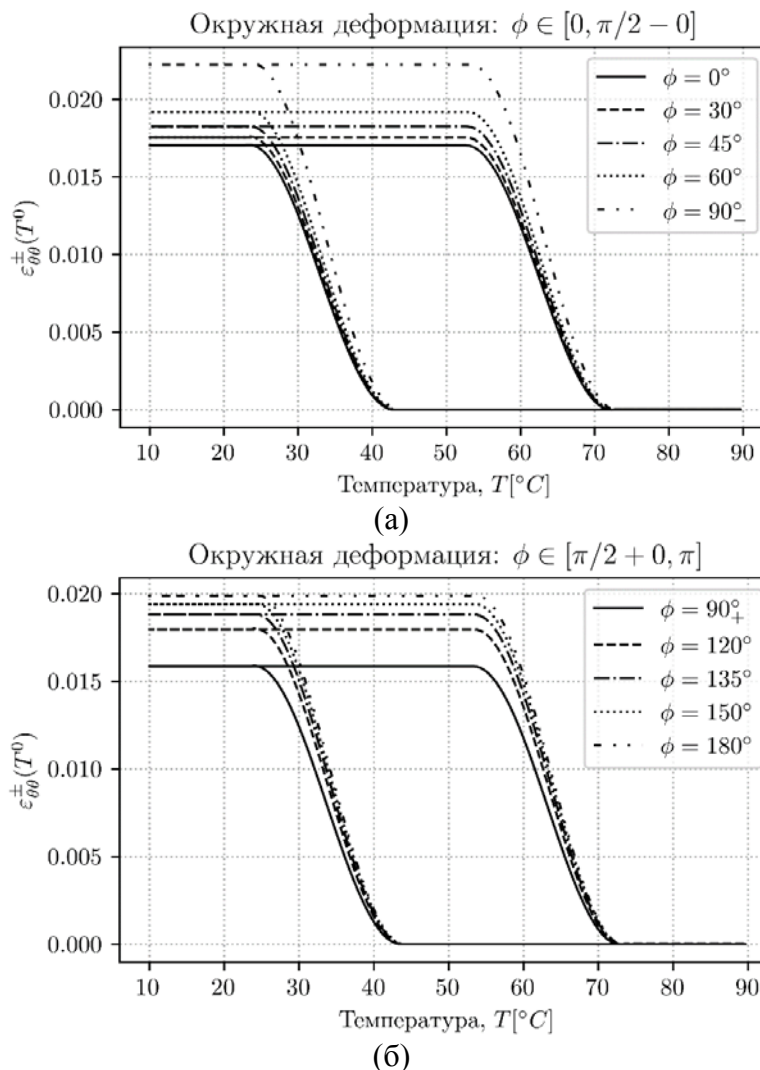


Рис.11. Зависимости окружной фазовой деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}^{\pm}$  от температуры:  
 $p_0 = 10^5$  Па,  $n = 1$ .

Влияние давления в жидкости качественно изменяет картину фазовых деформаций в тонкой сферической оболочке, претерпевающей нагрев и охлаждение через диапазоны фазовых переходов. Во-первых, оболочка находится в состоянии двухосного растяжения, что существенно в силу зависимости амплитуды фазовой деформации от вида напряженного состояния; во-вторых, различие деформаций при разных значениях угла  $\phi$ , порождаемое весом жидкости, незначительно (амплитуды меридиональной деформации в верхнем полюсе и на экваторе различаются не более чем на 10%; различие амплитуд окружных деформаций в верхнем полюсе и на экваторе сферы составляет около 30%.

При дальнейшем росте давления (выше  $10^5$  Па) влияние слоя жидкости на фазовые деформации становится малозаметным; следовательно, грубая оценка деформации при фазовых переходах в сферической оболочке в первом приближении может осуществляться только по величине давления в жидкости  $p_0$ .

Для тонкой оболочки эффект разносопротивляемости, т.е. зависимости от вида напряженного состояния точной верхней грани деформации изменения

формы  $\rho_D(s)$  (1.18), является весьма заметным. На рис.12 приведены зависимости меридиональной и окружной фазовых деформаций от температуры в окрестности экваториального сечения ( $\phi = \pi/2 - 0$  и  $\phi = \pi/2 + 0$ ), при  $p_0 = 0$ ,  $n = 1$  и  $n = 10$ .

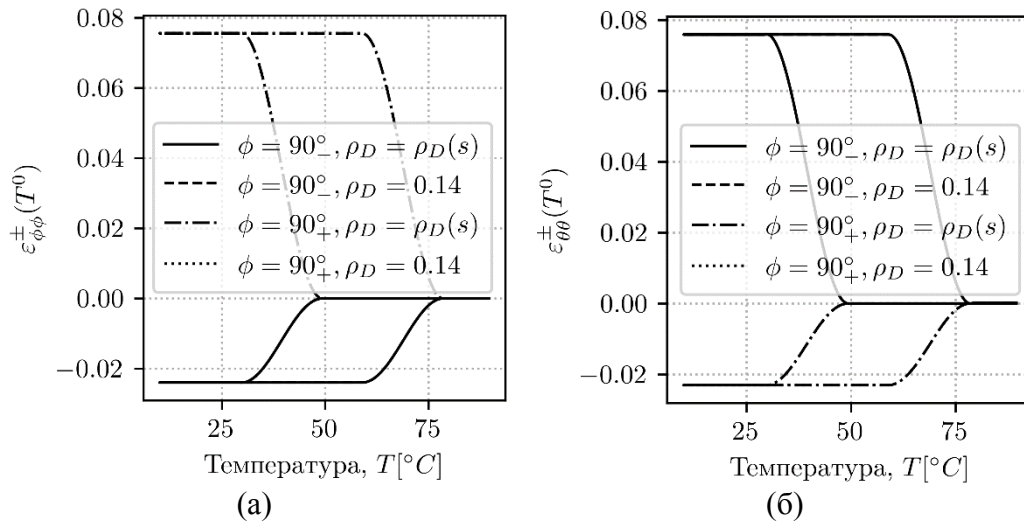
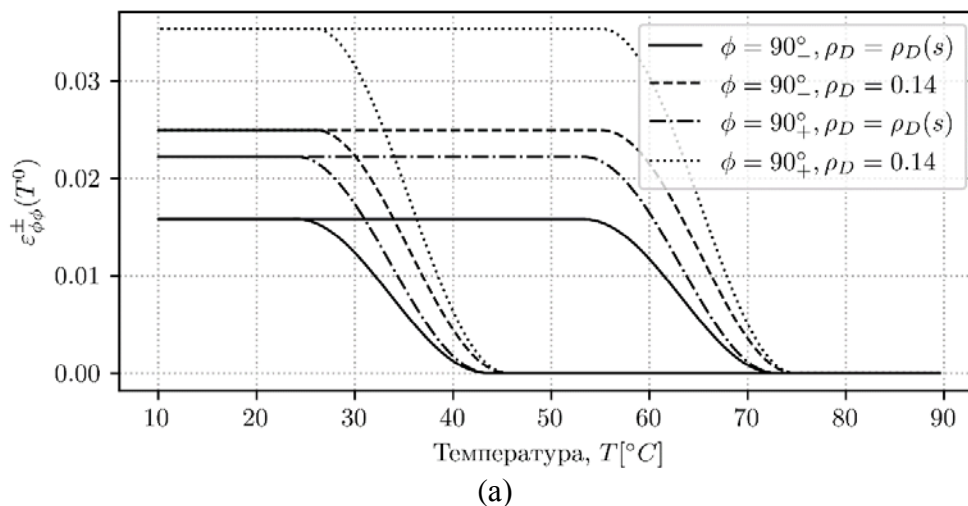


Рис.12. Зависимости фазовых деформаций от вида напряженного состояния: (а) – меридиональная деформация  $\varepsilon_{\phi\phi}^{\pm}(\pi/2 \pm 0)$  при  $n = 10$ ; (б) – окружная деформация  $\varepsilon_{\theta\theta}^{\pm}(\pi/2 \pm 0)$  при  $n = 10$ .

Так как в данном случае  $\text{sgn}(s_{\phi\phi}) \neq \text{sgn}(s_{\theta\theta})$   $s > 0$  (1.19), то в соответствии с (1.18)  $\rho_D(s) = \rho_D^{\max}$ , то разносопротивляемость СПФ не проявляется (см. рис.12). С другой стороны, при действии давления  $p_0 = 10^5$  Па, т.е. при двухосном растяжении оболочки  $\text{sgn}(s_{\phi\phi}) = \text{sgn}(s_{\theta\theta})$ , следовательно,  $s < 0$ , и  $\rho_D \approx 0,6\rho_D^{\max}$ . На рис.13а,б приведены зависимости меридиональной и окружной фазовых деформаций от температуры в окрестности экваториального сечения ( $\phi = \pi/2 - 0$  и  $\phi = \pi/2 + 0$ ); завышение максимальных амплитуд при пренебрежении разносопротивляемостью СПФ составляет около 40%.





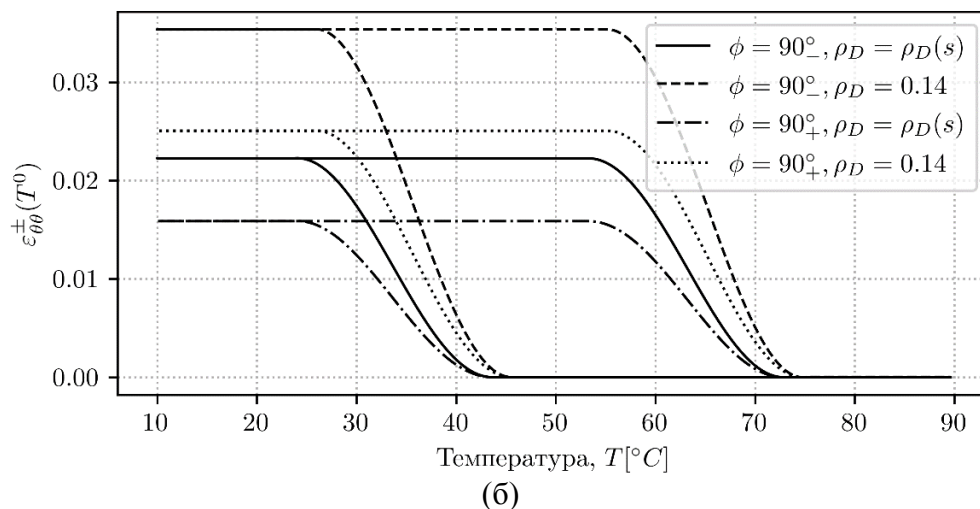


Рис.13. (а) – зависимость меридиональной фазовой деформации от температуры при учете и пренебрежении разнсопротивляемостью,  $p = 10^5$  Па,  $n = 1$ ; (б) – Зависимость окружной фазовой деформации от температуры при учете и пренебрежении разнсопротивляемостью,  $p = 10^5$  Па,  $n = 1$ .

Следует заметить, что различие амплитуд фазовых деформаций по абсолютной величине в случае учета или пренебрежения разнсопротивляемостью СПФ определяется значением  $\phi_1(\sigma_i/\sigma_0)$  (рис.6), т.е. величиной интенсивности  $\sigma_i$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На базе общего подхода, основанного на редукции пространственной размерности задачи о деформировании сплава с памятью при неизотермических термоупругих фазовых переходах в однократно связной постановке [25,26], построены инкрементальные эволюционные и определяющие соотношения безмоментной теории оболочек с эффектом памяти формы, учитывающие влияние вида напряженного состояния на амплитуду фазовых деформаций изменения формы и соответствующие формулировке общей теории тонких оболочек с памятью во «внутренних» кинематических переменных [33,34]. Построено решение задачи о полных термоупругих фазовых переходах в тонкой сферической оболочке из СПФ типа ТН-1, заполненной жидкостью под давлением, при действии вертикальной перегрузки и изменениях температуры и пренебрежении в первом приближении изменением уровня жидкости при деформировании оболочки. Построены зависимости деформаций в оболочке, претерпевающей полные циклы фазовых переходов «аустенит – мартенсит – аустенит», при различных сочетаниях нагрузок, и показано, в частности, что рост перегрузки приводит как к увеличению амплитуд фазовых деформаций, так и к заметному смещению диапазонов температур фазовых переходов. С другой стороны, при росте избыточного давления и малых перегрузках влияние веса жидкости на фазовые деформации мало, и грубые оценки деформаций могут быть получены только по величине давления. Показано также, что в тонких оболочках, находящихся в состоянии двухосного растяжения, весьма существенным является эффект разнсопротивляемости СПФ,



пренебрежение которым может привести к недопустимому завышению амплитуд фазовых деформаций.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Semba H., Okabe N., Yamaji T., Okita K., Yamauchi K. *Dynamic behavior of single-stage bellows of Titanium-Nickel shape memory alloy under cyclic loading* // International Journal of Modern Physics B. – 2006. – Vol.20. – No.25-27. – Pp.3944-3949.
2. Calim F., Gullu A., Yuksel F. *Numerical investigation on the effect of different shape memory alloys' material characteristics on energy dissipative cushions* / 3<sup>rd</sup> European Conference on Earthquake Engineering & Seismology. – Bucharest, Romania, 2022. – Pp.1598-1605.
3. Damanpack A.R., Bodaghi M., Liao W.H. *SMA bellows as reversible thermal sensors/actuators* // IOP Publ. Smart Materials & Structures. – 2015. – Vol.24. – 065013.
4. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. *The non-linear theory of elastic shells with phase transformations* // Journal of Elasticity. – 2004. – Vol.74. – No.1. – Pp.67-86.
5. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. *Thermomechanics of shells undergoing phase transitions* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2011. – Vol.59. – No.7. – Pp.1395-1412.
6. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. *On the nonlinear theory of two-phase shells* // Advanced Structured Materials. – 2011. – Vol.15. – Pp.219-232.
7. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. *Phase transitions in thermoviscoelastic shells* / In: Encyclopedia of Thermal Stress. – Berlin, Springer, 2014. – Pp.3667-3673.
8. Малыгин Г.А. *Размытые мартенситные переходы и пластичность кристаллов с эффектом памяти формы* // Успехи физических наук. – 2001. – Т.171. – №2. – С.210-212.
9. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W., Konopinska V. *On continuity conditions at the phase interface of two-phase elastic shells* / EMMC-10 Conference “Multi-Phase and Multi-Component Materials under Dynamic Loading”. – Kazimerz Dolny, Poland, 2007. – Pp.373-379.
10. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. *On quasi-static propagation of the phase interface in thin-walled inelastic bodies* / In: EMMC-10 Conference “Multi-Phase and Multi-Component Materials under Dynamic Loading”. – Kazimerz Dolny, Poland, 2007. – Pp.99-105.
11. Bhattacharya K., James R.D. *A theory of thin films of martensitic materials with applications to microactuators* // Journal of Mechanics and Physics of Solids. – 1999. – Vol.36. – Pp.531-576.
12. Mete Ozturk M., Bhattacharyya A. *Heat transfer in shape memory alloy thin films* // Acta Mechanica. – 2014. – Vol.225. – Pp.1029-1042.
13. Mete Ozturk M., Bhattacharyya A. *A computational study of cyclic thermal response of shape memory alloy thin-film island structures* // Acta Mechanica. – 2017. – Vol.228. – Pp.3497-3509.
14. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Казарина С.А., Жаворонок С.И., Сильченко Т.Л. *Устойчивость стержней из никелида титана, нагружаемых в режиме мартенситной неупругости* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2012. – №3. – С.72-80.
15. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. *Потеря устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы, вызванная обратным термоупругим*

- мартенситным превращением* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – №1. – С.117-130.
16. Сильченко Л.Г., Мовчан И.А. *Устойчивость цилиндрической оболочки из сплава с памятью формы при сжатии и кручении* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т.15. – №4. – С.489-496.
  17. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
  18. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions* // IFAC Papers OnLine. – 2018. – Vol.51. – No.2. – Pp.873-878.
  19. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Abnormal Buckling of Thin-Walled Bodies with Shape Memory Effects Under Thermally Induced Phase Transitions* // Advanced Structured Materials. – 2019. – Vol.110. – Pp.493-524.
  20. Watkins R.T., Shaw J.A. *Unbuckling of superelastic shape memory alloy columns* // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2018. – Vol.29. – No.7. – Pp.1360-1378.
  21. Хусаинов М.А., Малухина О.А. *Анализ выпучивания сферических сегментов с памятью формы* / 3-й Международный симпозиум «Современные проблемы прочности» им. В.А. Лихачева. Сборник материалов. – Новгород, 1999. – С.185-189.
  22. Машихин А.Е., Мовчан А.А. *Краевые задачи термомеханики для цилиндра и сферы из сплава с памятью формы* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – №3. – С.113-128.
  23. Мовчан А.А., Машихин А.Е. *Деформации кругового цилиндра из сплава с памятью формы при структурном переходе или прямом фазовом превращении* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №2. – С.235-247.
  24. Мовчан А.А., Машихин А.Е. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2016. – №3. – С.100-114.
  25. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
  26. Мовчан А.А., Давыдов В.В. *Инкрементальные определяющие соотношения для объемной доли мартенситной фазы в сплавах с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №4-2. – С.653-661.
  27. Мовчан А.А. *Определяющие соотношения модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы, разрешенные относительно приращений напряжений* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №3. – С.343-359.
  28. Жаворонок С.И. *Уравнения совместности деформаций для сплавов с памятью, претерпевающих термоупругие фазовые превращения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №3. – С.403-408.

29. Zhavoronok S.I. *On the coupled model of the thermoelastic behavior of a shape memory alloy in intrinsic variables and some statement of buckling problems of shape memory elements* // AIP Conference Proceedings. – 2021. – Vol.2343. – 120004.
30. Жаворонок С.И. *Обратные инкрементальные определяющие соотношения и уравнения совместности деформаций для сплавов с памятью, претерпевающих структурные превращения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №4. – С.587-593.
31. Chien W.-Z. *The intrinsic theory of thin shells and plates. Part I: General Theory.* // Quarterly Applied Mathematics. – 1944. – Vol.1. – No.4. – Pp.297-327.
32. Pietraszkiewicz W. *Development of Intrinsic Formulation of W.-Z. Chien of the Geometrically Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells* // Computer Modelling in Engineering & Sciences. – 2010. – Vol.70. – No.2. – Pp.153-190.
33. Zhavoronok S.I. *Constitutive relations and compatibility equations for thin shape memory alloy shells* // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol.2611. – 100004.
34. Zhavoronok S.I. *On the incremental constitutive relations and compatibility equations for thin shape memory alloy shells undergoing non-isothermal phase transitions* // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2023. – Vol.14. – No.1. – Pp.1-27.
35. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. *Линейная теория тонких оболочек.* – Л: Политехника, 1991. – 656 с.
36. Каган В.Ф. *Основы теории поверхностей в тензорном изложении.* Т.1. – М.-Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1941. – 512 с.
37. Zhavoronok S.I. *On different definitions of strain tensors in general shell theories of Vekua-Amosov type* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2021. – Vol.17. – No.1. – Pp.72-81.

## REFERENCES

1. Semba H., Okabe N., Yamaji T., Okita K., Yamauchi K. *Dynamic behavior of single-stage bellows of Titanium-Nickel shape memory alloy under cyclic loading.* International Journal of Modern Physics B, 2006, Vol.20, No.25-27, Pp.3944-3949.
2. Calim F., Gullu A., Yuksel F. *Numerical investigation on the effect of different shape memory alloys' material characteristics on energy dissipative cushions.* 3<sup>rd</sup> European Conference on Earthquake Engineering & Seismology, Bucharest, Romania, 2022, Pp.1598-1605.
3. Damanpack A.R., Bodaghi M., Liao W.H. *SMA bellows as reversible thermal sensors/actuators.* IOP Publ. Smart Materials & Structures, 2015, Vol.24, 065013.
4. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. *The non-linear theory of elastic shells with phase transformations.* Journal of Elasticity, 2004, Vol.74, No.1, Pp.67-86.
5. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. *Thermomechanics of shells undergoing phase transitions.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2011, Vol.59, No.7, Pp.1395-1412.
6. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. *On the nonlinear theory of two-phase shells.* Advanced Structured Materials, 2011, Vol.15, Pp.219-232.
7. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. *Phase transitions in thermoviscoelastic shells.* In: Encyclopedia of Thermal Stress, Berlin, Springer, 2014, Pp.3667-3673.

8. Malygin G.A. *Diffuse Martensitic Transitions and the Plasticity of Crystals with a Shape Memory Effect*. Physics Uspekhi, 2001, Vol.44, No.2, Pp.173-197.
9. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W., Konopinska V. *On continuity conditions at the phase interface of two-phase elastic shells*. EMMC-10 Conference “Multi-Phase and Multi-Component Materials under Dynamic Loading”, Kazimierz Dolny, Poland, 2007, Pp.373-379.
10. Eremeyev V., Pietraszkiewicz W. *On quasi-static propagation of the phase interface in thin-walled inelastic bodies*. EMMC-10 Conference “Multi-Phase and Multi-Component Materials under Dynamic Loading”, Kazimierz Dolny, Poland, 2007, Pp.99-105.
11. Bhattacharya K., James R.D. *A theory of thin films of martensitic materials with applications to microactuators*. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1999, Vol.36, Pp.531-576.
12. Mete Ozturk M., Bhattacharyya A. *Heat transfer in shape memory alloy thin films*. Acta Mechanica, 2014, Vol.225, Pp.1029-1042.
13. Mete Ozturk M., Bhattacharyya A. *A computational study of cyclic thermal response of shape memory alloy thin-film island structures*. Acta Mechanica, 2017, Vol.228, Pp.3497-3509.
14. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Kazarina S.A., Zhavoronok S.I., Sil'chenko T.L. *Stability of titanium nickelide rods loaded in the mode of martensite inelasticity*. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2012, Vol.41, No.3, Pp.245-251.
15. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. *Buckling of a circular plate made of a shape memory alloy due to a reverse thermoelastic martensite transformation*. Mechanics of Solids, 2008, Vol.43, No.1, Pp.100-111.
16. Sil'chenko L.G., Movchan I.A. *Ustojchivost' tsilindricheskoy obolochki iz splava s pamyat'yu formy pri szhatii i kruchenii [Buckling of the cylindrical shell from the shape memory alloy at compression and torsion]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2009, Vol.15, No.4, Pp.489-496.
17. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Materialy s pamyat'yu formy kak ob"ekt mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela: ehksperimental'nye issledovaniya, opredelyayushhie sootnosheniya, reshenie kraevykh zadach [Shape memory materials as an object of solid mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary-value problems]*. Fizicheskaya mezomekhanika, 2012, Vol.15, No.1, Pp.105-116.
18. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions*. IFAC Papers OnLine, 2018, Vol.51, No.2, Pp.873-878.
19. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Abnormal Buckling of Thin-Walled Bodies with Shape Memory Effects Under Thermally Induced Phase Transitions*. Advanced Structured Materials, 2019, Vol.110, Pp.493-524.
20. Watkins R.T., Shaw J.A. *Unbuckling of superelastic shape memory alloy columns*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2018, Vol.29, No.7, Pp.1360-1378.
21. Khusainov M.A., Malukhina O.A. *Analiz vypuchivaniya sfericheskikh segmentov s pamyat'yu formy [Buckling Analysis of Shape Memory Spherical Segments]*. 3-j Mezhdunarodnyj simpozium “Sovremennye problemy prochnosti” im. V.A. Likhacheva. Sbornik materialov, Novgorod, 1999, Pp.185-189.
22. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Kraevye zadachi termomekhaniki dlya tsilindra i sfery iz splava s pamyat'yu formy [Thermomechanical boundary problems*

- for a cylinder and sphere made of shape memory alloy]. Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika, 2017, No.3, Pp.113-128.
23. Movchan A.A., Mashihin A.E. *Deformatsii krugovogo tsilindra iz splava s pamyat'yu formy pri strukturnom perekhode ili pryamom fazovom prevrashhenii [Straining circular cylinder from shape memory alloy at direct phase transition or martensite inelasticity]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2012, Vol.18, No.2, Pp.235-247.
  24. Mashihin A.E., Movchan A.A. *Problem of direct martensite transformation in a thick-walled cylinder made of shape memory alloy*. Mechanics of Solids, 2016, Vol.51, No.3, Pp.321-333.
  25. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking account of the martensite inelasticity in the reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
  26. Movchan A.A., Davydov V.V. *Inkremental'nye opredelyayushhie sootnosheniya dlya ob'emnoj doli martensitnoj fazy v splavakh s pamyat'yu formy [Incremental constitutive equation for martensite volume part parameter in shape memory alloys]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2010, Vol.16, No.4-2, Pp.653-661.
  27. Movchan A.A. *Opredelyayushhie sootnosheniya modeli nelinejnogo deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy, razreshennye otnositel'no prirashhenij napryazhenij [Constitutive relations of the model of nonlinear deformation of shape memory alloys, resolved with respect to stress increments]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2021, Vol.27, No.3, Pp.343-359.
  28. Zhavoronok S.I. *Uravneniya sovmestnosti deformacij dlya splavov s pamyat'yu, preterpeyayushchih termouprugie fazovye prevrashcheniya [New compatibility equations for shape memory alloys undergoing thermoelastic phase transitions]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.3, Pp.403-408.
  29. Zhavoronok S.I. *On the coupled model of the thermoelastic behavior of a shape memory alloy in intrinsic variables and some statement of buckling problems of shape memory elements*. AIP Conference Proceedings, 2021, Vol.2343, 120004.
  30. Zhavoronok S.I. *Obratnye inkremental'nye opredelyayushhie sootnosheniya i uravneniya sovmestnosti deformatsij dlya splavov s pamyat'yu, preterpeyayushchikh strukturnye prevrashcheniya [Inverse incremental constitutive relations and compatibility equations for a shape memory alloy undergoing structure transitions]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2021, Vol.27, No.4, Pp.587-593.
  31. Chien W.-Z. *The intrinsic theory of thin shells and plates. Part I: General Theory*. Quarterly Applied Mathematics, 1944, Vol.1, No.4, Pp.297-327.
  32. Pietraszkiewicz W. *Development of Intrinsic Formulation of W.-Z. Chien of the Geometrically Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells*. Computer Modelling in Engineering & Sciences, 2010, Vol.70, No.2, Pp.153-190.
  33. Zhavoronok S.I. *Constitutive relations and compatibility equations for thin shape memory alloy shells*. AIP Conference Proceedings, 2022, Vol.2611, 100004.
  34. Zhavoronok S.I. *On the incremental constitutive relations and compatibility equations for thin shape memory alloy shells undergoing non-isothermal phase transitions*. Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal, 2023, Vol.14, No.1, Pp.1-27.

35. Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhailovskii E.I. *Linejnaya teoriya tonkikh obolochek [Linear Theory of Thin Shells]*. Leningrad, Politekhnik, 1991, 656 p.
36. Kagan V.F. *Osnovy teorii poverkhnostej v tenzornom izlozhenii. Tom 1 [Basics of Surface Theory using Tensor Notation. Vol.1]*. Moskva-Leningrad, OGIZ Gostekhizdat, 1941, 512 p.
37. Zhavoronok S.I. *On different definitions of strain tensors in general shell theories of Vekua-Amosov type*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2021, Vol.17, No.1, Pp.72-81.

Поступила в редакцию 02 августа 2023 года.

---

Сведения об авторах:

Курбатов Алексей Сергеевич – к.т.н., с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [kurbatov@iam.ras.ru](mailto:kurbatov@iam.ras.ru)

Исаченко Иван Александрович – асп., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [ivan12900@mail.ru](mailto:ivan12900@mail.ru)

Жаворонок Сергей Игоревич – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [zhavoronok@iam.ras.ru](mailto:zhavoronok@iam.ras.ru)