

УДК 533.69
EDN ICLKLY (<https://elibrary.ru/iclkly>)
DOI 10.33113/mkmk.ras.2023.29.04.01



РЕДУЦИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ КРЫЛА В НЕСЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ ПРИ РАСЧЕТАХ ПО НЕСТАЦИОНАРНОЙ И КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ТЕОРИЯМ*

Гонц Д.А.¹, Гришанина Т.В.¹, Русских С.В.^{1,2}

¹ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

²ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются аэроупругие колебания прямого крыла большого удлинения с симметричными профилями поперечных сечений в дозвуковом потоке при действии вертикальных порывов ветра, изменяющихся по гармоническому закону. Профили крыла считаются недеформируемыми. Перемещения и углов закручивания поперечных сечений крыла представляются по методу Ритца в виде разложений по заданным функциям с неизвестными коэффициентами, которые принимаются за обобщенные координаты.

Аэродинамические нагрузки, действующие на упругое крыло, вычисляются на основании квазистационарной и нестационарной теорий плоскопараллельного безотрывного обтекания колеблющегося профиля в дозвуковом потоке. Уравнения колебаний в обобщенных координатах записываются как уравнения Лагранжа.

Редуцирование системы дифференциальных уравнений рассмотрено на примере двухстепенной модели, для которой первая обобщенная координата характеризует изгибные колебания, а вторая – крутильные. Уравнения колебаний представлены в безразмерном виде. Определены критические значения безразмерного параметра, характеризующего скорость набегающего потока, на границе статической и динамической устойчивости аэроупругих колебаний. Пренебрегая инерционными и демпфирующими силами, обусловленными кручением крыла, а так же инерционными силами присоединенных масс воздуха были получены упрощенные уравнения колебаний. Для двух вариантов редуцированных уравнений гармонических колебаний получены аналитические решения дифференциальных уравнений.

В качестве примера рассмотрено крыло с симметричным профилем, прямоугольного силового сечения. Приведены графики результатов расчета, полученные при решении полной и редуцированной систем дифференциальных уравнений по нестационарной и квазистационарной теориям. Определены значения приведенной частоты гармонических колебаний, при которых результаты расчетов для редуцированной и полной систем дифференциальных уравнений близки между собой.

Ключевые слова: изгибно-крутильные колебания крыла; дозвуковое обтекание; аэроупругость; аэродинамические характеристики; метод Ритца

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИППРИМ РАН, госбюджетная тема №121112200126-5.

REDUCTION OF THE EQUATIONS OF HARMONIC OSCILLATIONS OF A WING IN AN INCOMPRESSIBLE FLOW IN CALCULATIONS BASED ON NON-STATIONARY AND QUASI-STATIONARY THEORIES

Gonc D.A.¹, Grishanina T.V.¹, Russkikh S.V.^{2,1}

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

²*Institute of Applied Mechanics Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

ABSTRACT

Aeroelastic oscillations of a straight wing of large elongation with symmetrical cross-section profiles in a subsonic flow under the action of vertical wind gusts varying according to the harmonic law are considered. Wing profiles are considered non-deformable. The displacements and twisting angles of the wing cross sections are represented by the Ritz method in the form of decompositions according to given functions with unknown coefficients, which are taken as generalized coordinates.

Aerodynamic loads acting on an elastic wing are calculated on the basis of quasi-stationary and non-stationary theories of plane-parallel continuous flow around an oscillating profile in a subsonic flow. The oscillation equations in generalized coordinates are written as Lagrange equations.

The reduction of the system of differential equations is considered by the example of a two-step model, for which the first generalized coordinate characterizes bending vibrations, and the second one – torsional. The oscillation equations are presented in dimensionless form. The critical values of the dimensionless parameter characterizing the velocity of the incoming flow at the boundary of static and dynamic stability of aeroelastic oscillations are determined. Ignoring the inertial and damping forces caused by the wing torsion, as well as the inertial forces of the attached air masses, simplified oscillation equations were obtained. Analytical solutions of differential equations are obtained for two variants of reduced harmonic oscillation equations.

As an example, a wing with a symmetrical profile, rectangular power section is considered. The graphs of the calculation results obtained when solving the complete and reduced systems of differential equations by nonstationary and quasi-stationary theories are presented. The values of the reduced frequency of harmonic oscillations are determined, at which the calculation results for the reduced and full systems of differential equations are close to each other.

Keywords: flexural-torsional vibrations of the wing; subsonic flow; aeroelasticity; aerodynamic characteristics; the Ritz method

ВВЕДЕНИЕ

Колебания тонкостенных конструкций типа крыла большого удлинения обычно рассматривается на основе балочной теории [1,2]. За счет того, что у крыла линии центров жесткости и центров тяжести поперечных сечений не совпадают, колебания крыла являются связанными изгибно-крутильными колебаниями. У прямого крыла как балки с прямолинейной осью жесткости связь между изгибом и кручением происходит только за счет инерционных сил. В данной статье рассмотрены колебания прямого крыла с симметричными профилями, которые считаются недеформируемыми. В этом случае взаимодействие изгибных и крутильных колебаний происходит только за счет

действия аэродинамических нагрузок.

Двухстепенные расчетные модели (для нескольких попарных комбинаций различных форм) часто используются для приближенных проектировочных расчетов, поскольку они позволяют получить результаты в виде формул, на основании которых несложно исследовать влияние различных факторов на аэроупругие колебания крыла [3]. Одна обобщенная координата представляет собой изгиб упругой оси по низшей форме изгибных колебаний, а другая закручивание относительно упругой оси по низшей форме крутильных колебаний. Такая расчетная модель имеет две степени свободы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

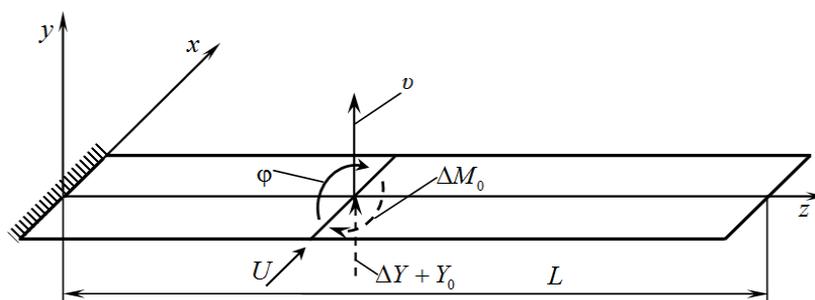


Рис.1. Модель прямого крыла.

Рассмотрим консоль крыла (рис.1). Ось z проходит через центры симметрии профилей. Колебания крыла как балки без учета сдвигов характеризуются поперечным перемещением оси $v(z, t)$ и углом закручивания $\varphi(z, t)$. Запишем потенциальную и кинетическую энергии, а также вариацию работы внешних нагрузок

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L (EIv''^2 + GJ_k \varphi'^2) dz, \quad T = \frac{1}{2} \int_0^L (mv^{\dot{2}} + J\dot{\varphi}^2) dz; \\ \delta A &= \int_0^L ([\Delta Y + Y_0] \delta v + \Delta M_0 \delta \varphi) dz. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $EI(z)$, $GJ_k(z)$ – изгибная жесткость и жесткость свободного кручения; $m(z)$, $J(z)$ – погонная масса и погонный массовый момент инерции, относительно оси z ; $\Delta Y(z, t)$, $\Delta M_0(z, t)$ – погонная поперечная нагрузка и погонный момент относительно оси z ; $Y_0(z)$ – заданная распределенная внешняя нагрузка, обусловленная действиями порывов ветра; штрихом обозначены производные по координате z .

На основании метода Ритца неизвестные функции ищутся в виде разложений

$$v(z, t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) \cdot f_i(z), \quad \varphi(z, t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) \cdot \varphi_i(z),$$

где $f_i(z)$, $\varphi_i(z)$ – заданные функции, представляющие возможные связанные или отдельные формы изгиба и кручения крыла; $q_i(t)$ – обобщенные координаты. Если фюзеляж считается массивным, жестким и неподвижным, то в заделке

при $z = 0$ заданные функции должны удовлетворять кинематическим граничным условиям $f_i(0) = 0$, $f_i'(0) = 0$, $\varphi_i(0) = 0$. При рассмотрении совместных колебаний крыла и фюзеляжа необходимо выбирать функции $f_i(z)$, $\varphi_i(z)$ так, чтобы удовлетворялись кинематические условия сопряжения.

Если ограничиться двумя обобщенными координатами, например, q_1 и q_2 (две степени свободы $s = 2$), и положив $f_2 \equiv 0$, $\varphi_1 \equiv 0$, тогда

$$v(z, t) = q_1(t) \cdot f_1(z), \quad \varphi(z, t) = q_2(t) \cdot \varphi_2(z). \quad (2)$$

Выражения (1) с учетом представления (2) приводятся к виду

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_{ii} \dot{q}_i^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 k_{ii} q_i^2, \quad \delta A = \sum_{i=1}^2 Q_i \delta q_i, \quad (3)$$

где

$$m_{11} = \int_0^L m f_1^2 dz, \quad m_{22} = \int_0^L J \varphi_2^2 dz, \quad k_{11} = \int_0^L E I f_1''^2 dz, \quad k_{22} = \int_0^L G J_k \varphi_2'^2 dz; \quad (4)$$

$$Q_1(t) = \int_0^L (\Delta Y + Y_0) f_1 dz, \quad Q_2(t) = \int_0^L \Delta M_0 \varphi_2 dz.$$

Газ считается идеальным и несжимаемым, а его возмущенное течение – безотрывным. В таком потоке вихри не будут образовываться, а течение всюду вне несущей поверхности и ее следа будет потенциальным. Тогда погонная поперечная аэродинамическая нагрузка и погонный аэродинамический момент относительно центра профиля вычисляются по формулам [3]

$$\Delta Y = \frac{\rho b}{2} [g_1 U (U \varphi - \dot{v}_0) + g_2 U b \dot{\varphi} + g_3 b (U \dot{\varphi} - \ddot{v}_0) + g_4 b \ddot{\varphi}]; \quad (5)$$

$$\Delta M_0 = \frac{\rho b^2}{2} [h_1 U (U \varphi - \dot{v}_0) + h_2 U b \dot{\varphi} + h_3 b (U \dot{\varphi} - \ddot{v}_0) + h_4 b \ddot{\varphi}].$$

Здесь ρ и U – плотность и скорость набегающего потока; $b = 2a$ – ширина профиля.

Коэффициенты, входящие в формулы (5), вычисляются следующим образом [4-9]:

1) При нестационарном дозвуковом обтекании несжимаемым газом

$$g_1 = 2\pi C(k), \quad g_2 = \frac{\pi}{2} C(k), \quad g_3 = \frac{\pi}{2}, \quad g_4 = 0; \quad (6)$$

$$h_1 = \frac{\pi}{2} C(k), \quad h_2 = \frac{\pi}{8} (C(k) - 1), \quad h_3 = 0, \quad h_4 = -\frac{\pi}{64}.$$

Здесь $C(k)$ – функции Теодорсена, $k = \omega a / U$ – приведенная частота колебаний.

2) Для нестационарной теории при $k \rightarrow 0$ ($C(k) \rightarrow 1$) эти коэффициенты равны

$$g_1 = 2\pi, \quad g_2 = \frac{\pi}{2}, \quad g_3 = \frac{\pi}{2}, \quad g_4 = 0; \quad (7)$$

$$h_1 = \frac{\pi}{2}, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = 0, \quad h_4 = 0.$$

3) При использовании квазистационарной теории эти коэффициенты следует положить равными

$$g_1 = 2\pi, \quad g_2 = \frac{\pi}{2}, \quad g_3 = 0, \quad g_4 = 0; \quad (8)$$

$$h_1 = \frac{\pi}{2}, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = 0, \quad h_4 = 0.$$

Уравнения колебаний в обобщенных координатах записываются как уравнения Лагранжа

$$m_{ii}\ddot{q}_i + k_{ii}q_i = Q_i, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

2. УРАВНЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Уравнения аэроупругих колебаний (9) с учетом (4), (5) и $b = 2a$ примут вид

$$\begin{aligned} m_{11} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + k_{11} q_1 = aLc_0 Y_0 + \rho a^2 L U^2 \left[b_{22} q_2 + d_{11} \frac{a}{U} \frac{dq_1}{dt} + d_{12} \frac{a}{U} \frac{dq_2}{dt} + \right. \\ \left. + g_{11} \frac{a^2}{U^2} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + g_{12} \frac{a^2}{U^2} \frac{d^2 q_2}{dt^2} \right]; \\ m_{22} \frac{d^2 q_2}{dt^2} + k_{22} q_2 = \rho a^2 L U^2 \left[b_{22} q_2 + d_{21} \frac{a}{U} \frac{dq_1}{dt} + d_{12} \frac{a}{U} \frac{dq_2}{dt} + \right. \\ \left. + g_{21} \frac{a^2}{U^2} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + g_{22} \frac{a^2}{U^2} \frac{d^2 q_2}{dt^2} \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_{12} = \frac{g_1}{aL} \int_0^L f_1 \varphi_2 dz, \quad b_{22} = \frac{2h_1}{L} \int_0^L \varphi_2^2 dz, \quad c_0 = \frac{1}{aL} \int_0^L f_1 dz; \\ d_{11} = -\frac{g_1}{a^2 L} \int_0^L f_1^2 dz, \quad d_{12} = \frac{2(g_2 + g_3)}{aL} \int_0^L f_1 \varphi_2 dz, \quad d_{21} = \frac{-2h_1}{aL} \int_0^L f_1 \varphi_2 dz; \\ d_{22} = \frac{4(h_2 + h_3)}{L} \int_0^L f_1^2 dz, \quad g_{11} = -\frac{2g_3}{a^2 L} \int_0^L f_1^2 dz, \quad g_{12} = \frac{4g_4}{aL} \int_0^L f_1 \varphi_2 dz; \\ g_{21} = -\frac{4h_3}{aL} \int_0^L f_1 \varphi_2 dz, \quad g_{22} = \frac{8h_4}{L} \int_0^L f_1^2 dz. \end{aligned}$$

Введем безразмерное время $\tau = \omega_1 t$ ($\omega_1^2 = k_{11}/m_{11}$) и разделим уравнения на k_{11} , тогда уравнения колебаний примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} + q_1 = y_0 + \psi^2 b_{12} q_2 + \psi \sqrt{\nu} \left(d_{11} \frac{dq_1}{d\tau} + d_{12} \frac{dq_2}{d\tau} \right) + \\ + \nu \left(g_{11} \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} + g_{12} \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} \right); \\ \frac{m_{22}}{m_{11}} \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} + \frac{k_{22}}{k_{11}} q_2 = \psi^2 b_{22} q_2 + \psi \sqrt{\nu} \left(d_{21} \frac{dq_1}{d\tau} + d_{12} \frac{dq_2}{d\tau} \right) + \\ + \nu \left(g_{11} \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} + g_{12} \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь использованы следующие обозначения

$$\psi^2 = \frac{\rho U^2 L a^2}{k_{11}}, \quad v = \frac{\rho L a^4}{m_{11}}, \quad y_0 = \frac{Y_0 c_0 a L}{k_{11}}.$$

Очевидно, что на всех режимах полета должно выполняться с определенным запасом условие статической устойчивости $\psi < \psi_*$, где $\psi_* = \sqrt{k_{22}/(k_{11} b_{22})}$.

Для гармонических колебаний, когда внешнее воздействие Y_0 , например, порыв ветра, изменяется по закону $e^{i\omega t}$ (ω – заданная частота колебаний), кинематические параметры характеризующие движение крыла изменяются во времени также по гармоническому закону $e^{i\omega t}$. С учетом введенного безразмерного времени τ будем иметь

$$q_1 = q_1^0 e^{i\tilde{k}\tau}, \quad q_2 = q_2^0 e^{i\tilde{k}\tau}. \quad (11)$$

Здесь $\tilde{k} = k\psi/\sqrt{v}$ (k – приведенная частота, от которой зависит функция Теодорсена).

В итоге дифференциальные уравнения (9) преобразуются в линейные алгебраические уравнения относительно q_1^0 и q_2^0 , при решении которых действительные и мнимые части отделяются друг от друга. Если функции v и ψ считаются действительными, то в полученном решении следует взять только действительную часть.

3. РЕДУЦИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ

Запишем упрощенные уравнения колебаний, пренебрегая инерционными и демпфирующими силами, обусловленными кручением крыла, а так же инерционными силами присоединенных масс воздуха, т.е. $m_{22} d^2 q_2 / d\tau^2 \approx 0$, $d_{22} dq_2 / d\tau \approx 0$, $g_{ij} \approx 0$ ($i, j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} + q_1 &= y_0 + b_{12} \psi^2 q_2 + \psi \sqrt{v} \left(d_{11} \frac{dq_1}{d\tau} + d_{12} \frac{dq_2}{d\tau} \right); \\ \frac{k_{22}}{k_{11}} q_2 &= b_{22} \psi^2 q_2 + d_{21} \psi \sqrt{v} \frac{dq_1}{d\tau}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из второго уравнения выражаем q_2 через q_1 . Подставляя полученные выражения для q_2 в первое уравнение системы (10), получим приближенное уравнение для q_1

$$\left(1 - \frac{d_{12} d_{21} \psi^2 v}{k_{22}/k_{11} - b_{22} \psi^2} \right) \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} - \left(\frac{\psi^3 \sqrt{v} b_{12} d_{21}}{k_{22}/k_{11} - b_{22} \psi^2} + \psi \sqrt{v} d_{11} \right) \frac{dq_1}{d\tau} + q_1 = y_0. \quad (13)$$

Если положить $d_{12} dq_2 / d\tau = 0$, то уравнение для q_1 примет вид

$$\frac{d^2 q_1}{d\tau^2} - \left(\frac{\psi^3 \sqrt{v} b_{12} d_{21}}{k_{22}/k_{11} - b_{22} \psi^2} + \psi \sqrt{v} d_{11} \right) \frac{dq_1}{d\tau} + q_1 = y_0. \quad (14)$$

Тогда при гармонических колебаниях при $y_0 = y_0^0 e^{i\tilde{k}\tau}$ получим

$$q_1^0 = y_0^0 \left\{ \left(\frac{\psi^2 d_{12} d_{21}}{k_{22}/k_{11} - b_{22} \psi^2} - 1 \right) \tilde{k}^2 - \left(\frac{\psi^3 \sqrt{v} b_{12} d_{21}}{k_{22}/k_{11} - b_{22} \psi^2} + \psi \sqrt{v} d_{11} \right) i\tilde{k} + 1 \right\}^{-1} \quad (15)$$

– решение для уравнения (13).

$$q_1^0 = y_0^0 \left\{ 1 - \tilde{k}^2 - \left(\frac{\Psi^3 \sqrt{v} b_{12} d_{21}}{\kappa_{22}/k_{11} - b_{22} \Psi^2} + \Psi \sqrt{v} d_{11} \right) i \tilde{k} \right\}^{-1} \tag{16}$$

– решение для уравнения (14).

4. ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве примера рассмотрим крыло с симметричным профилем, прямоугольного силового сечения. В качестве функций аппроксимирующих перемещение центра профиля и угол закручивания выберем следующие функции

$$f_1(z) = a \left(1 - \cos \frac{\pi z}{2L} \right), \quad \varphi_2(z) = \sin \frac{\pi z}{2L}.$$

Тогда отношение коэффициент обобщенных масс и жесткостей для прямоугольного сечения высотой h будут равны

$$\frac{m_{22}}{m_{11}} = \frac{1}{6(3/2 - 4/\pi)}, \quad \frac{k_{22}}{k_{11}} = \left(\frac{L}{a} \right)^2 \frac{8}{(1 + \mu)\pi^2}.$$

Коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

Интегралы в формулах аэродинамических коэффициентов принимают следующий вид

$$\frac{1}{a^2 L} \int_0^L f_1^2 dz = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}, \quad \frac{1}{aL} \int_0^L f_1 dz = 1 - \frac{2}{\pi}; \quad \frac{1}{aL} \int_0^L f_1 \varphi_2 dz = \frac{1}{\pi}, \quad \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_2^2 dz = \frac{1}{2}.$$

Расчеты выполнены при следующих исходных данных: $L/a = 8$, $v = 0,125$. Тогда $\omega_1/\omega_2 = 0,0184$ и критическое значение безразмерного параметра, характеризующего скорость набегающего потока, равно $\psi_* = 5,04$. При расчете вынужденных гармонических колебаний полагаем $y_0^0 = 0,1$, $\psi = 3$.

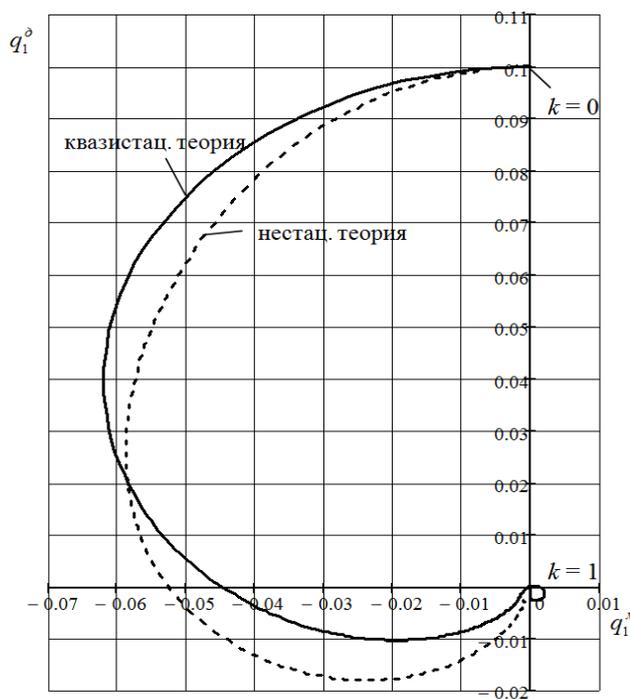


Рис.2. Графики изменения q_1 .

На рис.2 и 3 показаны графики изменения действительных и мнимых частей для обобщенных координат q_1 и q_2 , полученные при решении нередуцированной системы уравнений колебаний. Сплошными линиями показаны решения, полученные на основе квазистационарной теории, пунктирными – нестационарной.

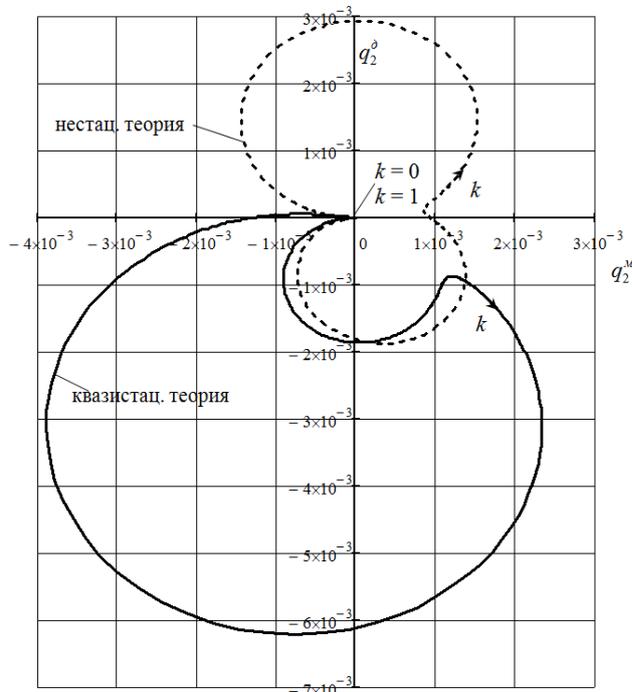


Рис.3. Графики изменения q_2 .

На рис.4,5 и рис.6,7 показаны графики изменения амплитуды колебаний $A_1 = \sqrt{q_1^o + q_1^m}$ и угла сдвига по фазе $\alpha_1 = \arctg(q_1^o / q_1^m)$ для обобщенной координаты q_1 в зависимости от приведенной частоты колебаний k , полученные на основе полной системы уравнений и редуцированной, по квазистационарной и нестационарной теориям соответственно. Пунктирными линиями показаны решения для полной системы уравнений, а сплошными – редуцированной системы. По формулам (15) и (16) получились близкие значения и на графиках они совпали.

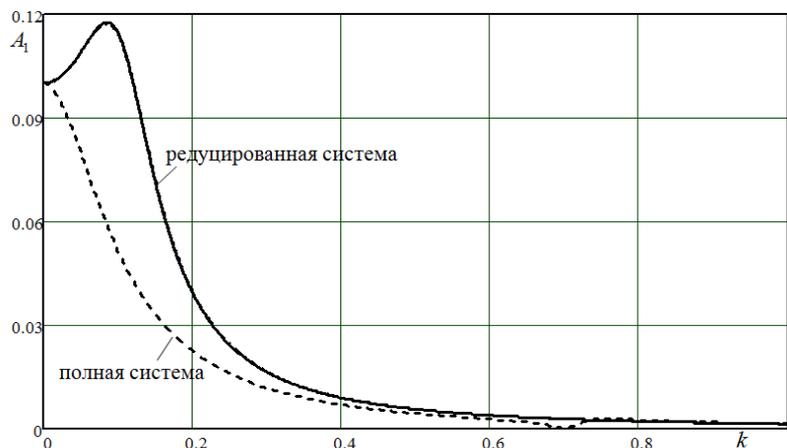


Рис.4. Графики изменения амплитуды колебаний q_1 при решении по квазистационарной теории.

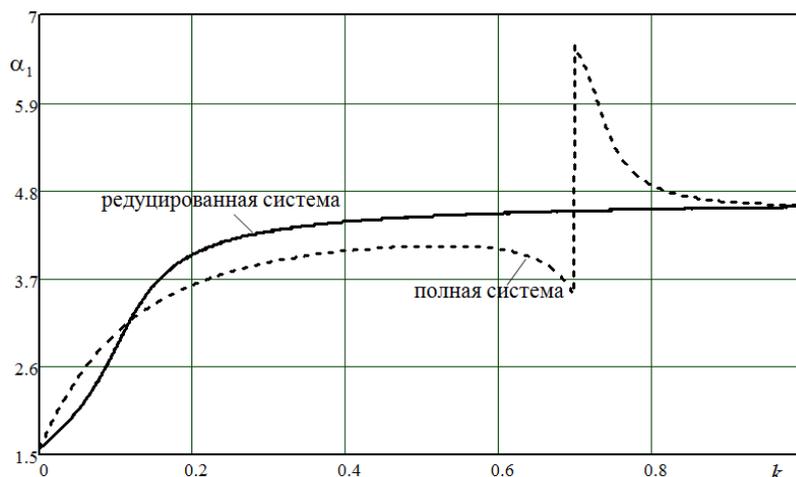


Рис.5. Графики изменения угла сдвига по фазе q_1 при решении по квазистационарной теории.

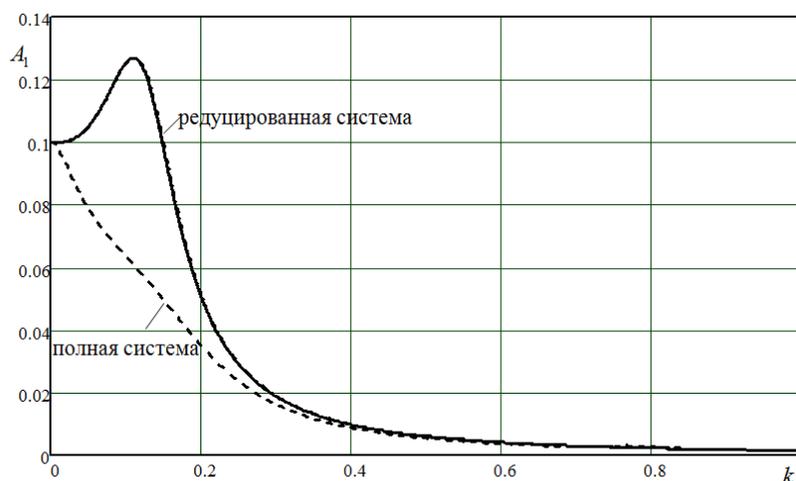


Рис.6. Графики изменения амплитуды колебаний q_1 при решении по нестационарной теории.

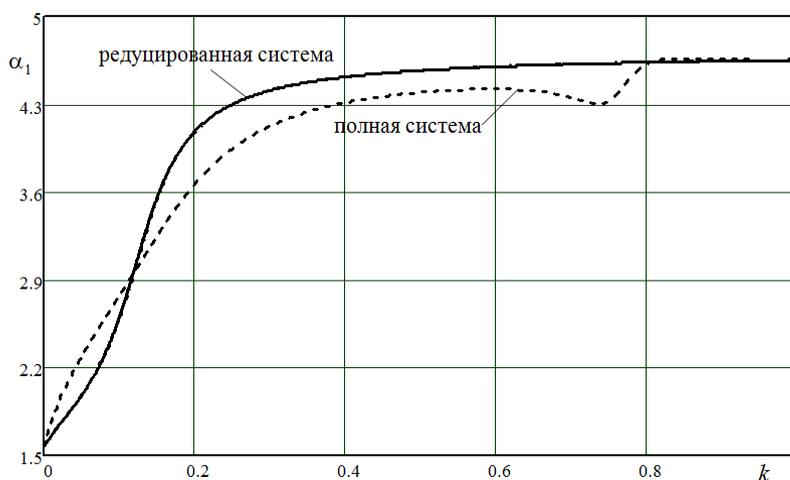


Рис.7. Графики изменения угла сдвига по фазе q_1 при решении по нестационарной теории

На рис.8 показаны графики изменения амплитуды колебаний $A_1 = \sqrt{q_1^0 + q_1^M}$ для обобщенной координаты q_1 в зависимости от приведенной частоты колебаний k для четырех вариантов значений безразмерного параметра $\psi = Ua\sqrt{\rho L/k_{11}}$, характеризующего скорость полета.

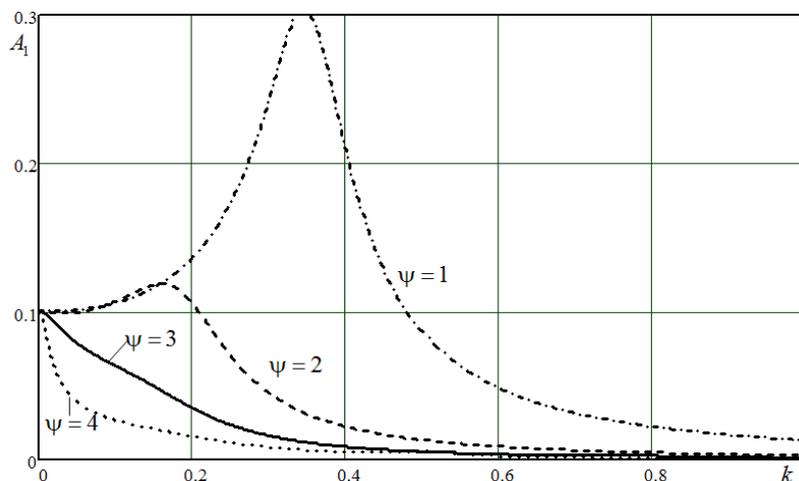


Рис.8. Графики изменения q_1^0 при решении по нестационарной теории при различных параметрах ψ .

Результаты расчетов, выполненные для различных значений параметров, характеризующих скорость полета, показывают, что решения для редуцированной и полной систем дифференциальных уравнений практически совпадают, когда приведенная частота гармонических колебаний k принимает значения больше 0,8.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье сформулирована и решена задача аэроупругих колебаний в дозвуковом потоке прямого крыла, совершающего изгибно-крутильные колебания. Получены решения для полной и редуцированной системы дифференциальных уравнений при действии вертикальных порывов ветры, изменяющихся по гармоническому закону.

Определены значения приведенной частоты гармонических колебаний k , при которых результаты расчетов для редуцированной и полной систем дифференциальных уравнений близки между собой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмен Р.Л. *Аэроупругость*. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 800с.
2. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. *Введение в аэроавтоупругость*. – М.: Наука, 1980. – 384с.
3. Шклярчук Ф.Н. *Аэроупругость самолета*. – М.: Изд-во МАИ, 1985. – 77с.
4. Брутян М.А., Крапивский П.Л. *Теория тонкого деформируемого профиля* // Труды ЦАГИ. – 1983. – Вып.2216. – С.3-21.

5. Брутян М.А. *Влияние пассивной адаптации формы профиля на его аэродинамические характеристики при малых скоростях* // *Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты*. – 2014. – №11. – С.155-160.
6. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций*. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328с.
7. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Деформация и аэродинамические характеристики профиля мембранного крыла при дозвуковом обтекании* // *Вестник Московского авиационного института*. – 2014. – Т.21. – №5. – С.7-12.
8. Гришанина Т.В., Русских Н.М. *Анализ влияния нестационарности несжимаемого потока на изгибно-крутильные аэроупругие колебания крыла большого удлинения* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2019. – Т.25. – №2. – С.207-218.
9. Гришанина Т.В., Рыбкина Н.М. *К расчету флаттера прямого крыла большого удлинения в несжимаемом потоке с использованием нестационарной аэродинамической теории* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2020. – Т.26. – №1. – С.43-57.

REFERENCES

1. Bisplinghoff R.L., Eshli X., Khalfmen R.L. *Aehrouprugost' [Aeroelasticity]*. Moskva, Izdatel'stvo inostranoj literatury, 1958, 800 p.
2. Belocerkovskij S.M., Kochetkov Ju.A., Krasovskij A.A., Novickij V.V. *Vvedenie v aehroavtoupругost' [Introduction to Aeroautoelasticity]*. Moskva, Nauka, 1980, 384 p.
3. Shklyarchuk F.N. *Aehrouprugost' samoleta [Aeroelasticity of a plane]*. Moskva, Izdatel'stvo MAI, 1985, 77 p.
4. Brutyan M.A., Krapivskii P.L. *Teoriya tonkogo deformiruemogo profilya [The theory of thin deformable profile]*. Trudy TSAGI, 1983, No.2216, Pp.3-21.
5. Brutyan M.A. *Vliyanie passivnoj adaptatsii formy profilya na ego aehrodinamicheskie kharakteristiki pri malykh skorostyakh [Effect of a passive adaptation of the airfoil form on its aerodynamic characteristics with small velocities]*. Fundamental'nye i prikladnye issledovaniya: problemy i rezul'taty, 2014, No.11, Pp.155-160.
6. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Dinamika uprugikh upravlyaemykh konstruksij [Dynamics of elastic controlled structures]*. Moskva, Izdatel'stvo MAI, 2007, 328 p.
7. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Deformatsiya i aehrodinamicheskie kharakteristiki profilya membrannogo kryla pri dozvukovom obtekanii [Deformation and aerodynamic characteristics of a membrane wing airfoil with subsonic flow]*. Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute, 2014, Vol.21, No.5, Pp.7-12.
8. Grishanina T.V., Russkikh N.M. *Analiz vliyaniya nestatsionarnosti neshhimaemogo potoka na izgibno-krutit'nye aehrouprugie kolebaniya kryla bol'shogo udlineniya [Analysis of the effect of the incompressible flow unsteadiness on the flexural-torsional aeroelastic vibrations of a large elongation wing]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.25, No.2, Pp.207-218.
9. Grishanina T.V., Rybkina N.M. *K raschetu flattera pryamogo kryla bol'shogo udlineniya v neshhimaemom potoke s ispol'zovaniem nestatsionarnoj aehrodinamicheskoy teorii [To calculate the flutter of a straight wing of large*

elongation in an incompressible flow using nonstationary aerodynamic theory]
Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.2,
Pp.43-57.

Поступила в редакцию 31 октября 2023 года.

Сведения об авторах:

Гонц Дарья Андреевна – асп. Кафедры 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: gonts.dasha@mail.ru

Гришанина Татьяна Витальевна – д.ф.-м.н., проф., проф. Кафедры 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: grishaninatat@list.ru

Русских Сергей Владимирович – д.ф.-м.н., доц., проф. Кафедры 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: sergey.russkih@rambler.ru