

УДК 539.3

EDN ERJDDH (<https://elibrary.ru/erjddh>)

DOI 10.33113/mkmk.ras.2023.29.04.05



ПРОЧНОСТЬ И ЖЁСТКОСТЬ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРУБ ИЗ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИКОВ ПРИ ИЗГИБЕ

Тышкевич В.Н., Светличная В.Б., Саразов А.В.

*Волжский политехнический институт (филиал) ФГБОУ ВО «ВолгГТУ»,
г. Волжский, Россия*

АННОТАЦИЯ

На основании полубезмоментной теории тонких ортотропных оболочек с использованием нелинейных уравнений равновесия при малых деформациях и перемещениях, соизмеримых с толщиной стенки, определено напряжённо-деформированное состояние криволинейных труб при изгибе и внутреннем давлении. Труба представлена в виде тонкостенной торообразной оболочки с переменной толщиной стенки.

Использование для решения нелинейной системы уравнений равновесия дает возможность учесть нелинейные эффекты, в частности влияние нормального давления на деформацию трубы при изгибе. Исходная система уравнений упрощается допущениями полубезмоментной теории оболочек и линеаризуется методом малого параметра. Материал трубы ортотропный с симметричным расположением слоев относительно срединной поверхности подчиняется закону Гука. Толщина стенки трубы в кольцевом направлении переменная.

Проведен параметрический анализ напряженно-деформированного состояния оболочки при варьировании длины и кривизны, при установке фланцев на концах труб. Показана зависимость величины напряжений от переменности толщины стенки сечения труб. Проведены экспериментальные исследования прочности и жесткости криволинейных труб шести типоразмеров, выполненных из стеклопластика, на чистый изгиб. Показана хорошая корреляция теоретических и экспериментальных результатов. Для оценки прочности стеклопластика при плоском напряжённом состоянии использовались феноменологические критерии прочности. Показано, что для оценки прочности криволинейных труб из стеклопластика целесообразно применять модифицированный критерий прочности Мизеса-Хилла или критерий максимальных напряжений. Проведен анализ характера разрушения экспериментальных образцов при чистом изгибе.

Ключевые слова: прочность; жёсткость; криволинейная труба; армированный пластик

STRENGTH AND STIFFNESS OF CURVED PIPES FROM REINFORCED PLASTICS DURING BENDING

Tyshkevich V.N., Svetlichnaja V.B., Sarazov A.V.

*Volzhsky Polytechnical Institute (branch) of the Volgograd State Technical University,
Volzhsky, Russia*

ABSTRACT

Based on the semi-momentless theory of thin orthotropic shells using nonlinear equilibrium equations for small deformations and displacements commensurate with the wall thickness, the stress-strain state of curved pipes under bending and internal pressure is determined. The pipe is presented in the form of a thin-walled toroidal shell with a variable wall thickness.

The use of equilibrium equations to solve a nonlinear system makes it possible to take into account nonlinear effects, in particular the effect of normal pressure on the bending deformation of the pipe. The initial system of equations is simplified by the assumptions of the semi-momentless theory of shells and linearized by the small parameter method. Pipe material is orthotropic with symmetrical arrangement of layers relative to middle surface complies with Hooke's law. Pipe wall thickness in circular direction is variable.

Parametric analysis of the stressed-deformed state of the shell was carried out with varying length and curvature, when flanges were installed at the ends of the pipes. The dependence of the stress value on the variability of the wall thickness of the pipe section is shown. Experimental studies of strength and rigidity of curved pipes of six sizes made of fiberglass for pure bending were carried out. A good correlation of theoretical and experimental results is shown. To assess the strength of fiberglass under flat stress, phenomenological strength criteria were used. It has been shown that to evaluate the strength of curved fiberglass pipes, it is advisable to use a modified Mises-Hill strength criterion or a maximum stress criterion. Analysis of the nature of destruction of experimental samples at pure bending was carried out.

Keywords: strength; rigidity; curved pipe; reinforced plastic

ВВЕДЕНИЕ

Трубопроводы из армированных пластиков (АП) применяются в различных отраслях, но их основные достоинства – высокие удельные прочность и жесткость, особенно важны для конструкций, критерием оптимизации которых является масса конструкции. Это, в первую очередь, – авиационная и космическая техника.

При разработке методов расчёта криволинейных труб на прочность и жёсткость главное внимание обращается на задачу изгиба с учётом воздействия внутреннего давления, именно в этом случае проявляются свойства криволинейной трубы как гибкой оболочки (эффект Кармана, манометрический эффект). Статистика разрушения трубопроводов подтверждает то, что наиболее напряженными и ответственными элементами трубопроводов являются криволинейные элементы.

Аналізу напружено-деформованного станювання криволинейных труб при изгибе посвящены многочисленные исследования, включая работы выдающихся российских и зарубежных механиков Т. Кармана, С.П. Тимошенко, В.И. Феодосьева. Анализ литературы [1-6] показывает, что существующие разработки применимы главным образом к трубам из однородных и изотропных материалов. Исследования с учётом особенностей слоистых анизотропных структур труб из современных АП методом конечных элементов (МКЭ) приведены в [5].

1. РАСЧЁТНАЯ МОДЕЛЬ

1.1. Разрешающие уравнения.

Криволинейная труба рассматривается как часть тороидальной оболочки круглого поперечного сечения с радиусом срединной линии r , начальной кривизной продольной оси $1/\rho_0$, длиной L , с центральным углом (углом гиба) Φ (рис.1). Деформация трубы рассматривается в ортогональных криволинейных координатах $\alpha = x/r$, β и ζ , где x – координата, отсчитываемая вдоль оси трубы (рис.1а). На концах трубы заданы граничные условия, соответствующие определенному виду закрепления, поэтому деформация трубы изменяется вдоль оси трубы (рис.1б). В актуальной конфигурации деформированной оболочки учитывается, что деформация каждого поперечного сечения зависит от продольной кривизны являющейся функцией приложенной нагрузки.

Изменение толщины стенки трубы в кольцевом направлении задается зависимостью

$$h = h_c \frac{1}{1 + S \cos \beta} \approx h_c (1 - S \cos \beta + S^2 \cos^2 \beta - S^3 \cos^3 \beta + \dots) = th_c,$$

где h_c – средняя толщина стенки поперечного сечения трубы, $S = r/\rho_0$, t – параметры переменности толщины стенки (рис.1в).

Труба нагружена поверхностной нагрузкой внутренним давлением p и распределенной по закону плоскости на торцах продольной нагрузкой

$$N_\alpha^0 = E_\alpha h \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{M}{E_\alpha I} r \cos \beta, \quad I = \pi r^3 h_c, \tag{1}$$

статически эквивалентной парам сил с моментом M ($\dim M = \text{Н}\cdot\text{м}$) (см. рис.1б).

Компоненты деформированного состояния трубы представлены в виде двух частей, одна из которых, исходная деформация ε , определяется в предположении недеформируемости поперечных сечений по (1). Вторую часть составляют компоненты, возникающие в результате деформации сечений. Этими компонентами являются отнесённые к радиусу r составляющие перемещения точки срединной поверхности трубы вдоль координатных линий α , β , ζ , обозначенные соответственно через u , v , w (см. рис.1а). Для удобства вычислений введены W , W_y – проекции на плоскость кривизны трубы и ось y суммы перемещений u , w .

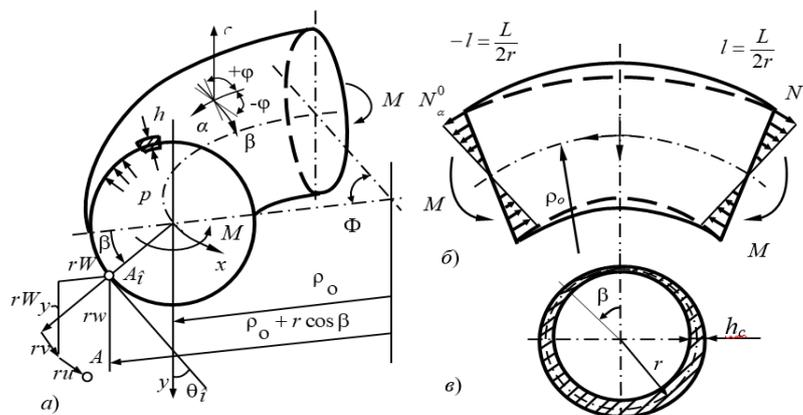


Рис.1. Выделенный элемент трубы (а), характер деформации трубы с фланцами на концах (б) и форма поперечного сечения трубы (в).

Компоненты второй части определяются на основании соотношений теории оболочек, которые составляются для трубы с кривизной продольной оси

$$1/\rho = 1/\rho_0 + M/(E_\alpha I) \quad (2)$$

и относительными удлинениями (1).

В связи с этим рассматриваются нелинейные уравнения равновесия срединной поверхности оболочки, находящейся в деформированном состоянии, при малых деформациях и перемещениях, соизмеримых с толщиной стенки [1,2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 N_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 N_{\beta\alpha}) + N_{\alpha\beta} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} - N_\beta \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} + \\ + A_1 A_2 \left(\frac{Q_\alpha}{R_1^*} + \varkappa_{\alpha\beta} Q_\beta \right) = 0 \quad (1, 2), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 Q_\beta) - A_1 A_2 \left(\frac{N_\alpha}{R_1^*} + \frac{N_\beta}{R_2^*} + N_{\alpha\beta} \varkappa_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha} \varkappa_{\alpha\beta} - p \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 M_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 M_{\beta\alpha}) + M_{\alpha\beta} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} - M_\beta \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} - A_1 A_2 Q_\alpha = 0 \quad (1, 2),$$

где индексами 1,2 обозначены параметры, соответствующие ортогональным криволинейным координатам α и β . Символ (1,2) после уравнения означает, что из записанного соотношения можно получить еще одно заменой индексов 1 на 2, 2 на 1, α на β , β на α .

В систему уравнений (3) входят усилия и моменты, приложенные на единицу длины соответствующего сечения: $N_{\alpha,\beta}$ – нормальные силы, $Q_{\alpha,\beta}$ – перерезывающие силы, $N_{\alpha\beta,\beta\alpha}$ – сдвигающие усилия, $M_{\alpha,\beta}$ – изгибающие моменты, $M_{\alpha\beta,\beta\alpha}$ – крутящие моменты. Главные радиусы кривизны R_1^* и R_2^* определяют измененную в результате деформации форму срединной поверхности

$$\frac{1}{R_1^*} = \frac{1}{R_1} + \varkappa_\alpha = \frac{\cos \theta}{\rho} + \varkappa_\alpha, \quad \frac{1}{R_2^*} = \frac{1}{R_2} + \varkappa_\beta = \frac{1}{r} + \varkappa_\beta, \quad (4)$$

$$\cos \theta = \cos \beta + \vartheta_2 \sin \beta, \quad \sin \theta = \sin \beta - \vartheta_2 \cos \beta.$$

Параметры Ламе деформированной срединной поверхности трубы определяются выражениями

$$A_1 = r \left(1 + \frac{r}{\rho} \cos \beta \right), \quad A_2 = r.$$

Использование для решения нелинейной системы уравнений (3) дает возможность учесть нелинейные эффекты, в частности влияние нормального давления на деформацию трубы при изгибе.

Соотношения между деформациями и перемещениями срединной поверхности в деформированном состоянии запишутся (введено обозначение $\delta = r/\rho$):

– относительные удлинения и сдвиг

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha = \frac{1}{1 + \delta \cos \beta} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\delta \sin \beta}{1 + \delta \cos \beta} v + w \delta \cos \beta + \varepsilon, \quad \varepsilon_\beta = \frac{\partial v}{\partial \beta} + w, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{1 + \delta \cos \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\delta \sin \beta}{1 + \delta \cos \beta} u + \frac{\partial u}{\partial \beta}; \end{aligned} \quad (5)$$

– приращение кривизны и кручение

$$\begin{aligned} \alpha_\alpha &= -\frac{1}{1+\delta \cos \beta} \left[\frac{1}{r(1+\cos \beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \delta \frac{\cos \beta}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right] + \\ &+ \frac{\delta \sin \beta}{1+\delta \cos \beta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{r} \right), \\ \alpha_\beta &= -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{\partial v}{\partial \beta} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{1+\delta \cos \beta} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\delta \sin \beta}{1+\delta \cos \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] + \delta \cos \beta \times \\ &\times \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\delta \sin \beta}{r(1+\delta \cos \beta)} u \right) + \frac{1}{r(1+\delta \cos \beta)} \frac{\partial v}{\partial \alpha}; \end{aligned}$$

– углы поворота касательной к координатным линиям α и β

$$\vartheta_1 = \frac{1}{1+\delta \cos \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \delta u \cos \beta, \quad \vartheta_2 = \frac{\partial w}{\partial \beta} - v. \quad (7)$$

Выражение (5) для продольной деформации ε_α содержит исходную деформацию ε , определяемую по (1).

Материал трубы ортотропный с симметричным расположением слоев относительно срединной поверхности подчиняется закону Гука. Физические соотношения с учетом допущений полубезмоментной теории оболочек имеют вид

$$\varepsilon_\alpha = \frac{N_\alpha}{E_\alpha h} - \frac{\nu_{\beta\alpha} N_\beta}{E_\beta h} \approx \frac{N_\alpha}{E_\alpha h}, \quad \varepsilon_\beta = \frac{N_\beta}{E_\beta h} - \frac{\nu_{\alpha\beta} N_\alpha}{E_\alpha h} = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{C_{33}} = 0, \quad (8)$$

$$M_\beta = D_{22} \alpha_\beta + D_{21} \alpha_\alpha \approx D_{22} \alpha_\beta, \quad \alpha_\alpha = 0, \quad M_\alpha = D_{12} \alpha_\beta, \quad M_{\alpha\beta} = D_{33} \alpha_{\alpha\beta}$$

Здесь мембранные и изгибные жесткости для переменной толщины стенки запишутся в виде

$$C_{mn} = 2t \sum_{i=1}^{k/2} B_{mn}^{(i)} h_c^{(i)}, \quad D_{mn} = \frac{2t^3}{3} \sum_{i=1}^{k/2} B_{mn}^{(i)} \left[\left(\zeta_c^{(i)} \right)^3 - \left(\zeta_c^{(i-1)} \right)^3 \right],$$

где k – число слоев; $h_c^{(i)}$, $\zeta_c^{(i)}$ – толщина и координата i -го слоя при $\beta = \pm \pi/2$; $B_{mn}^{(i)}$, E_α , E_β – характеристики упругости слоя и эффективные модули упругости всего пакета материала в главных направлениях ортотропии. Полную систему уравнений составляют соотношения (3), (5), (6), (7), (8) с учётом допущений полубезмоментной теории оболочек.

Исходная система уравнений упрощается допущениями полубезмоментной теории оболочек и линеаризуется методом малого параметра. Компоненты напряженно-деформированного состояния представляются в виде разложений по степеням параметра $\delta = r/\rho$. Задача решается в перемещениях. Линеаризованное уравнение для n -го приближения метода малого параметра имеет вид

$$\begin{aligned} t \frac{\partial^3 u_n}{\partial \alpha^3} + t \frac{r}{\rho} \frac{\partial^2 W_n}{\partial \alpha^2} + \frac{r}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(t \frac{\partial u_n}{\partial \alpha} \cos \beta \right) + \frac{r^2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (t W_n \cos \beta) - t W_n \sin \beta \right] + \\ + \frac{r}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left[\varepsilon t \left(\cos \beta + \vartheta_{2n} \sin \beta + \frac{\partial \vartheta_{2n}}{\partial \beta} \cos \beta \right) \right] - \frac{r}{\rho} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(t \frac{\partial u_n}{\partial \alpha} \sin \beta \right) - \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(t \frac{\partial^2 w_n}{\partial \alpha^2} \varepsilon t \right) + h_*^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(t^3 \frac{\partial \vartheta_{2n}}{\partial \beta} \right) + t^3 \frac{\partial \vartheta_{2n}}{\partial \beta} \right] + \frac{r}{\rho} \frac{\partial}{\partial \beta} (\varepsilon t \vartheta_{2n} \cos \beta) \delta_{1n} - \frac{pr}{E_\alpha h_c} \frac{\partial^3 \vartheta_{2n}}{\partial \beta^3} \delta_{1n} = \Phi_n \quad (9)$$

$$(p, \varepsilon, t, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, \vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \dots, \vartheta_{2, n-1}).$$

В правой части полученного уравнения стоит известная функция нагрузки и перемещений, найденных из решения задачи в приближениях, предшествовавших данному. Здесь h_* , C_v – безразмерные параметры толщины стенки и ортотропии трубы

$$h_* = \frac{h_c}{r C_v}, \quad C_v = h_c \sqrt{\frac{E_\alpha h_c}{D_{22}^c}},$$

где E_α , D_{22}^c – модуль упругости материала трубы вдоль оси α и изгибная жесткость в направлении оси β для толщины h_c .

Система разрешающих уравнений задачи включает уравнение (9) и соотношения

$$\frac{\partial v_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_n}{\partial \beta} + \varepsilon_{\alpha\beta, n}^0 = 0, \quad \frac{\partial v_n}{\partial \beta} + w_n = 0,$$

$$W_n = w_n \cos \beta - v_n \sin \beta - W^0, \quad \vartheta_{2n} = \frac{\partial w_n}{\partial \beta} - v_n.$$

Члены с индексом «0» определяются из решения задачи при $(n-1)$ членах разложения метода малого параметра.

Перемещения представляются в виде тригонометрических рядов по координате β , при этом прогиб, через который выражаются все перемещения, представляется в виде

$$w_n = \sum_m f_{mn}(\alpha) \cos m\beta. \quad (10)$$

Задача сводится к определению неизвестных функций $f_{mn}(\alpha)$, удовлетворяющих заданным граничным условиям на концах трубы. Разрешающая система неоднородных дифференциальных уравнений для определения $f_{mn}(\alpha)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} & 0 & 0 & \dots \\ L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} & L_{36} & 0 & \dots \\ L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} & L_{46} & L_{47} & \dots \\ L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} & L_{56} & L_{57} & \dots \\ 0 & L_{63} & L_{64} & L_{65} & L_{66} & L_{67} & \dots \\ 0 & L_{73} & L_{74} & L_{75} & L_{76} & L_{77} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{2n} \\ f_{3n} \\ f_{4n} \\ f_{5n} \\ f_{6n} \\ f_{7n} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{2n} \\ P_{3n} \\ P_{4n} \\ P_{5n} \\ P_{6n} \\ P_{7n} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где L_{ij} – линейные операторы, определяющие дифференциальные и алгебраические операции над функциями f_{mn}

$$\begin{aligned}
 L_{m,n} &= \frac{d^4(\cdot)}{d\alpha^4} + a_{m,m}^* \frac{d^2(\cdot)}{d\alpha^2} + a_{m,m}(\cdot), \\
 L_{m,m\pm 1} &= a_{m,m\pm 1}^{**} \frac{d^4(\cdot)}{d\alpha^4} + a_{m,m\pm 1}^* \frac{d^2(\cdot)}{d\alpha^2} + a_{m,m\pm 1}(\cdot), \\
 L_{m,m\pm 2} &= a_{m,m\pm 2}^* \frac{d^2(\cdot)}{d\alpha^2} + a_{m,m\pm 2}(\cdot), \quad L_{m,m\pm 3} = a_{m,m\pm 3}(\cdot),
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

где a_{ij}^* , a_{ij} – постоянные коэффициенты, зависящие от номера члена разложения и безразмерных параметров кривизны (μ), момента (M^*), давления (p^*), переменности толщины стенки (t)

$$\mu = C_v \frac{r^2}{\rho h_c}, \quad M^* = C_v \frac{M}{E_\alpha I h_c}, \quad p^* = C_v^2 \frac{p}{E_\alpha} \left(\frac{r}{h_c} \right)^3.
 \tag{13}$$

Правая часть системы (11) зависит от нагрузки и значений функций $f_{m,n-j}$ и их производных, найденных в приближениях, предшествовавших данному.

Система (11) преобразуется методом А.И. Лурье и получается линейное дифференциальное уравнение порядка $4N$ с постоянными коэффициентами, где N – число удерживаемых в решении членов разложения (10)

$$\left[q_1 \frac{d^{4N}}{d\alpha_0^{4N}} + q_2 \frac{d^{4N-2}}{d\alpha_0^{4N-2}} + q_3 \frac{d^{4(N-1)}}{d\alpha_0^{4(N-1)}} + \dots + q_{2N} \frac{d^2}{d\alpha_0^2} + q_{2N+1} \right] \varphi_n^{(k)} = P_{mn}. \tag{14}$$

Все решения уравнений (14) для каждого приближения n можно представить в виде суммы общего решения φ соответствующего однородного уравнения, которое будет единым для всех k уравнений (14), и частных решений $\varphi_{0n}^{(k)}$ неоднородных уравнений: $\varphi_n^{(k)} = \varphi + \varphi_{0n}^{(k)}$. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий. При подкреплении концевых сечений трубы фланцами жёсткими в своей плоскости и не обладающими жёсткостью из плоскости граничные условия на концах трубы: $\alpha_0 = \pm \ell_0$, $v|_{\alpha_0=\pm \ell_0} = 0$, $\varepsilon_\alpha|_{\alpha_0=\pm \ell_0} = \varepsilon$, или через f_{mn} : $f_{mn}(\pm \ell_0) = 0$; $f_{mn}''(\pm \ell_0) = 0$, где

$$\ell_0 = \sqrt{h_*} \frac{L}{2r}.$$

Напряжённо-деформированное состояние труб выражается через функции f_{mn} . Коэффициент гибкости трубы, имеющий на концах определенный вид закрепления, определяется по формуле [2]

$$K = 1 - \frac{3}{4} \frac{\mu}{M^* l_0} \sum_{j=1}^n \delta^{j-1} \int_0^{l_0} f_{2j}(\alpha_0) d\alpha_0. \tag{15}$$

Продольные σ_α и поперечные σ_β напряжения складываются из равномерно распределенных по толщине стенки цепных напряжений $\sigma_{N\alpha}$, $\sigma_{N\beta}$ и распределенных по линейному закону изгибных напряжений $\sigma_{M\alpha}$, $\sigma_{M\beta}$. Введены безразмерные параметры напряжений

$$\sigma_{Ni}^* = \frac{\sigma_{Ni}}{E_\alpha h_*}, \quad \sigma_{Mi}^* = \frac{\sigma_{Mi}}{E_\alpha h_*} \quad (i = \alpha, \beta),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{N\alpha}^* &= M^* \cos \beta + \sum_{j=1}^n \sum_{m=2}^{N+1} \delta^{j-1} \left[\frac{1}{m^2} (f_{m,j-1}'' \cos \beta - f_{mj}'') + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu}{2} \left(f_{m+1,j} \frac{m+2}{m+1} + f_{m-1,j} \frac{m-2}{m-1} \right) \right] \times \cos m\beta + C_v \left(\frac{r}{h_c} \right)^2 \frac{p}{2E_\alpha t}; \\
\sigma_{M\alpha}^* &= \pm v_{\beta\alpha} t \frac{6}{C_v} \sum_{j=1}^n \sum_{m=2}^{N+1} \delta^{j-1} (m^2 - 1) f_{mj} \cos m\beta; \\
\sigma_{N\beta}^* &= -\mu h_* \sigma_{N\alpha}^* \cos \beta + C_v \left(\frac{r}{h_c} \right)^2 \frac{p}{E_\alpha t} \frac{2\rho + r \cos \beta}{\rho + r \cos \beta}; \quad \sigma_{M\beta}^* = \frac{1}{v_{\beta\alpha}} \sigma_{M\alpha}^*.
\end{aligned} \tag{16}$$

Коэффициент гибкости K характеризует увеличение податливости криволинейной трубы при изгибе с учетом действия внутреннего давления по сравнению с прямолинейной трубой тех же размеров. Для определения напряжений используются коэффициенты интенсификации напряжений

$$m_{1,n}^* = \frac{(\sigma_{N\alpha}^* + \sigma_{M\alpha}^*)_{\max}}{M^*}, \quad m_{2,n}^* = \frac{(\sigma_{N\beta}^* + \sigma_{M\beta}^*)_{\max}}{M^*},$$

показывающие во сколько раз максимальные напряжения на поверхности криволинейной трубы больше значений σ_{\max} в соответствующей прямолинейной трубе при равных условиях.

1.2. Напряжённо-деформированное состояние труб с различными параметрами длины и кривизны.

Напряженно-деформированное состояние (НДС) криволинейных труб существенно зависит от параметров длины и кривизны труб. Классификация криволинейных труб по длине, как и в [1], производится по параметру приведенной длины ℓ_1 , зависящему от геометрических параметров трубы и наименьшей абсолютной величины корня β_1 характеристического уравнения для (14)

$$\ell_1 = \sqrt[4]{|\beta_1|/4} \sqrt{h_*} \frac{L}{2r}.$$

Для коротких труб ($\ell_1 < 0,5$) деформация поперечного сечения по всей длине значительно стеснена и их НДС определяется по формулам стержневой теории

$$\sigma_{\alpha \max} = \frac{M}{\pi r^2 h_c}, \quad \Delta\Phi = \Phi^* - \Phi = \frac{M L}{\pi r^3 h_c}.$$

Для труб средней длины ($0,5 \leq \ell_1 \leq 2,5$) необходимо учитывать влияние закреплений концевых сечений (рис.2). На рисунке приведено решение задачи для трубы с жесткими фланцами на концах. Величина максимальных радиальных перемещений в среднем сечении трубы $w(0, \pi)$ уменьшается до нуля при уменьшении параметра приведенной длины ℓ_1 и приближается к постоянной величине, соответствующей трубе с условиями на концах по Сен-Венану, при $\ell_1 > 2,5$.

Фланцы в трубах средней длины уменьшают напряжения в среднем

по длине сечения и приводят к их некоторому перераспределению по сечению трубы (рис.3). На рис.2,3 показано значительное влияние переменной толщины стенки на НДС трубы.

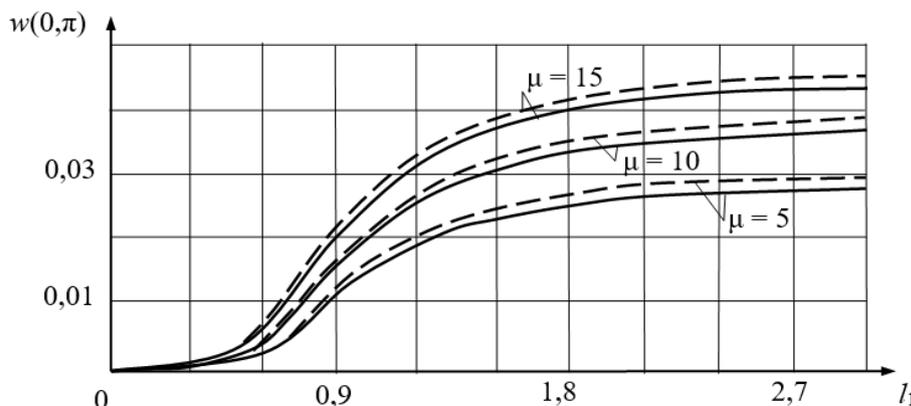


Рис.2. Перемещения $w(0, \pi)$ в среднем сечении трубы при $\alpha = 0, \beta = \pi, M^* = 0,1; p^* = 0$ в зависимости от параметра длины l_1 для труб переменной при $S = 0,5$ (сплошные линии) и постоянной толщины $S = 0$ (штриховые линии).

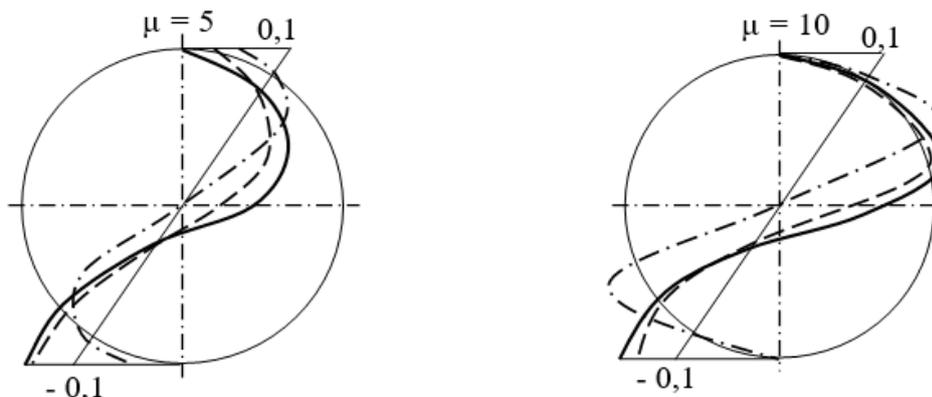


Рис.3. Распределение продольных цепных напряжений $\sigma_{N\alpha}$ по сечению трубы с $l_1 = 1,0$ при $M^* = 0,1$ и $p^* = 0$ (сплошные линии – $S = 0,5$; штриховые – $S = 0$; и жесткие фланцы на концах; штрих-пунктирные линии – для длинной трубы при $S = 0$; сплошные тонкие линии – по стержневой теории).

Для длинных труб ($l_1 > 2,5$) влиянием закрепления концов на деформацию поперечных сечений можно пренебречь и решение задачи существенно упрощается, так как из системы неоднородных дифференциальных уравнений (11) получим систему линейных алгебраических уравнений с семидиагональной матрицей коэффициентов для трубы с переменной толщиной стенки и с трехдиагональной – для труб с постоянной толщиной. Переменность толщины стенки обуславливает появление нечетных членов разложения (10) и несимметричной деформации поперечного сечения. Влияние переменной толщины стенки поперечного сечения и кривизны на величины коэффициентов гибкости K и интенсификации напряжений m_1^*, m_2^* показано на рис.4. Расчеты

приведены для труб с условиями на концах по Сен-Венану, изготовленных из стеклопластика с характеристиками $E_\alpha = 17658$ МПа, $\nu_{\alpha\beta} = 0,081$; $\nu_{\beta\alpha} = 0,133$; $V = 1,65$ для трубы с геометрическими характеристиками $h_c = 1,91$ мм; $r = 41,59$ мм.

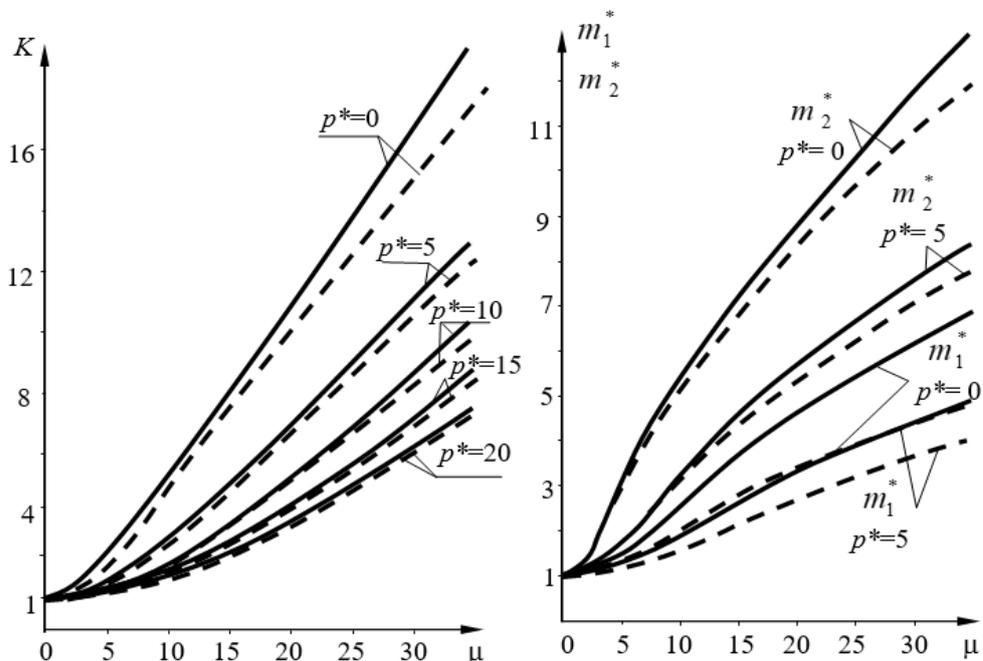


Рис.4. Зависимости коэффициента гибкости K и коэффициентов интенсификации напряжений m_1^* , m_2^* от μ при различных p^* для труб переменной ($S = 0,5$, сплошные линии) и постоянной толщины $S = 0$ (штриховые линии).

Для труб с переменной толщиной стенки ($S = 0,5$) при $\mu = 30$ и отсутствии внутреннего давления по результатам вычислений отмечено увеличение по сравнению с трубами постоянной толщины: коэффициента гибкости – на 10%, m_2^* – на 8%, m_1^* – на 45%. С увеличением внутреннего давления и уменьшением кривизны труб влияние переменной толщины стенки уменьшается.

В расчетах можно применять приближенный параметр длины, полученный на основании анализа корней характеристического уравнения для (14)

$$L^* = \frac{\Phi r^2}{h_c} \left(\frac{8C_v^2}{\mu^2} + 1 \right),$$

где Φ – центральный угол трубы в радианах. При $L^* \geq 100$ можно не учитывать влияния закрепления концов.

По параметру кривизны μ трубы разделяют на трубы малой кривизны $\mu \leq 10$ и большой кривизны $\mu > 10$. Исследование сходимости метода малого параметра показало, что при расчете труб малой кривизны достаточно одного приближения метода малого параметра и двух членов разложения (10), для труб большой кривизны достаточно двух приближений метода малого параметра и девяти членов разложения (10).

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1. Исследование жёсткости криволинейных стеклопластиковых труб.

Для подтверждения представленной методики определения жесткости и НДС криволинейных труб из АП были проведены испытания на чистый изгиб образцов труб по схеме (рис.5) [6-8].

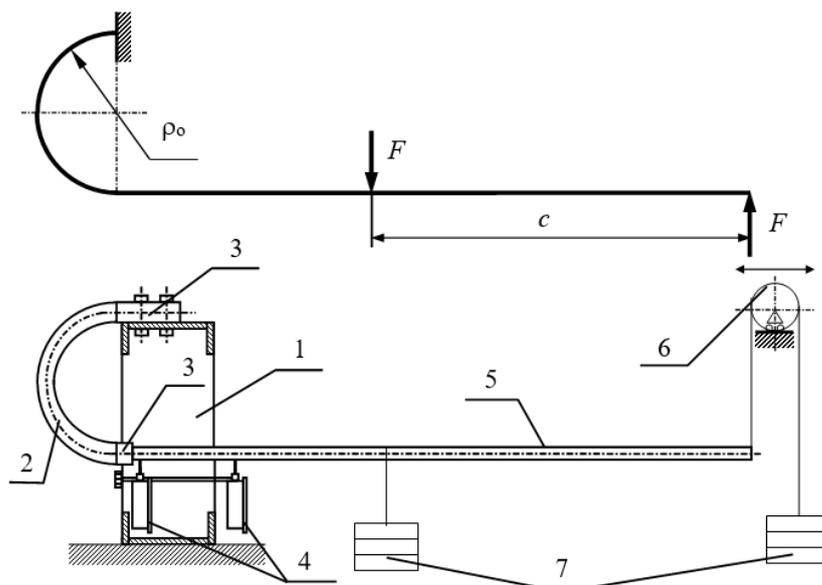


Рис.5. Схема испытаний криволинейных труб на изгиб. 1 – станина; 2 – образец-труба; 3 – законцовки; 4 – индикаторы линейных размеров часового типа; 5 – труба-рычаг; 6 - подвижный блок; 7 – грузы.

Испытывались образцы шести типоразмеров (рис.6а) по 3-4 образца каждого типоразмера. Параметры образцов труб указаны в таблице 1.

Таблица 1.

Параметры		Типоразмер труб-образцов					
		1	2	3	4	5	6
Радиус кривизны, ρ_0 , мм		80	90	80	120	90	112,5
Радиус поперечного сечения, r , мм		41,59	31,17	21,31	21,93	16,55	16,57
Длина, L , мм		251,3	282,7	261,3	377,0	282,7	353,4
Средняя толщина, h_c , мм		1,91	1,79	1,72	1,63	1,63	1,60
Угол намотки ленты, φ , град.		85,60	83,45	79,77	78,89	75,50	75,08
Параметр кривизны, μ		30,38	16,19	8,86	6,61	5,02	4,09
Коэффициент гибкости	$K_{\text{экс.}}$	14,29	8,13	4,94	3,25	2,32	1,94
	$K_{\text{теор.}}$	15,20	8,65	4,67	3,30	2,47	2,02
	$K_{\text{МКЭ}} [4,10]$	12,5	6,7	3,1	2,3	-	-
$(K_{\text{теор.}} - K_{\text{экс.}})100 / K_{\text{теор.}}$, %		5,99	6,01	5,78	1,52	6,07	3,96
$(K_{\text{теор.}} - K_{\text{МКЭ}})100 / K_{\text{теор.}}$, %		17,7	22,5	33,6	30,3	-	-
Предельный момент $M_{\text{пред.}}^{\text{экс.}}$, Нм $\times 10^{-3}$		258,7	235,1	121,4	161,0	106,8	102,2

Образцы изготавливались на пустотелых гипсовых оправках перекрёстной намоткой стеклолент из ткани Т-10 шириной 30 мм и связующем УПЭ-22-27

при вакуумном формовании в термопечах [9]. Для передачи нагрузки в образцы вклеивались металлические законцовки (рис.6б).



Рис.6. Исследуемые криволинейные трубы-образцы. Типоразмер труб (а), трубы с вклеенными металлическими законцовками (б).

Экспериментальное увеличение диаметра среднего по длине поперечного сечения $2wr(0, \pi/2)$ замерялось с помощью микрометра, отмечено хорошее соответствие экспериментальных и теоретических результатов (рис.7).

Большая нелинейность экспериментальных зависимостей обусловлена влиянием деформаций сдвига.

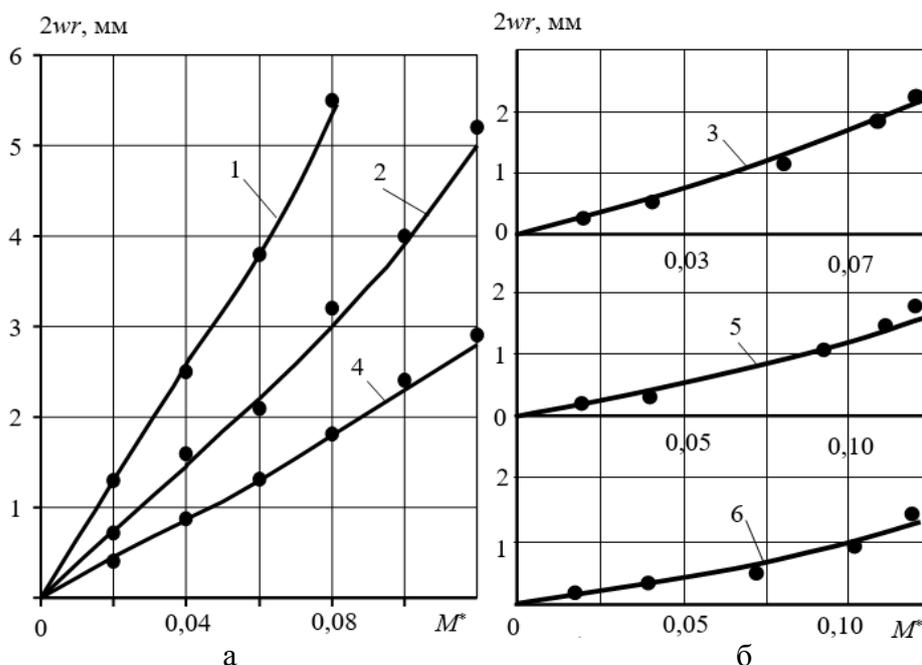


Рис.7. Увеличение диаметра среднего по длине сечения труб при действии изгибающего момента: а) для труб типоразмера №1, 2, 4; б) для труб типоразмера №3, 5, 6; точки – эксперимент.

Для определения изменения центрального угла $\Delta\Phi$ труб при изгибе использовались индикаторы линейных размеров часового типа (см. рис.5).

По результатам измерения $\Delta\Phi$ определялся экспериментальный коэффициент гибкости по формуле: $K_{\text{эксп.}} = \Delta\Phi_{\text{эксп.}} / \Delta\Phi_{\text{т}}^{\text{II}}$, где $\Delta\Phi_{\text{т}}^{\text{II}} = ML / (E_{\alpha} I)$ – изменение центрального угла прямой трубы тех же геометрических размеров.

Сопоставление с теоретическими значениями коэффициентов гибкости приведено в таблице 1. Разница в теоретических и экспериментальных величинах

коэффициентов гибкости не превышает 7%. Расхождение с расчетами МКЭ [4,10]

Трубы типоразмеров №2-6 относятся к классу длинных ($L^* > 100$) и их напряжённо-деформированное состояние и жёсткость определяется без учёта влияния условий закрепления концов. Для труб первого типоразмера учитывалось подкрепление концов трубы фланцами.

2.2. Оценка прочности криволинейных стеклопластиковых труб.

Для оценки прочности стеклопластика при плоском напряжённом состоянии использовались феноменологические критерии прочности. За основной элемент принимается ортотропная полоска [6]. Направление осей координатной системы совпадает с осями упругой симметрии материала 1, 2. Направление 1 совпадает с направлением основы ткани, 2 – с направлением утка. При рассмотрении плоской задачи для ортотропного материала остаются пять упругих констант, из которых четыре являются независимыми. Закон Гука в этом случае записывается так

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E_1 - \nu_{21}\sigma_2/E_2, \quad \varepsilon_2 = \sigma_2/E_2 - \nu_{12}\sigma_1/E_1, \quad \gamma_{12} = \tau_{12}/G_{12}$$

при выполнении условия: $E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}$.

Для исследуемого стеклопластика экспериментально получен комплекс прочностных и упругих характеристик на трубчатых и плоских образцах-свидетелях [5]. Модули нормальной упругости, сдвига и коэффициент Пуассона равны: $E_1 = 29400$ МПа; $E_2 = 17800$ МПа; $G_{12} = 3010$ МПа; $\nu_{12} = 0,123$. Пределы прочности при растяжении и сжатии в направлениях 1, 2: $\sigma_{e1}^+ = 508$ МПа; $\sigma_{e1}^- = 209$ МПа; $\sigma_{e2}^+ = 246$ МПа; $\sigma_{e2}^- = 117$ МПа; предел прочности при чистом сдвиге по площадкам симметрии $\tau_{e12} = 43$ МПа; пределы прочности при положительном и отрицательном чистых сдвигах по площадкам наклонённым под углом 45° к осям симметрии материала: $\tau_{e45}^+ = 130$ МПа; $\tau_{e45}^- = 160$ МПа.

Анализировались следующие критерии прочности:

1. Критерий Гольденבלата-Копнова [12]

$$p_{11}\sigma_1 + p_{22}\sigma_2 + (p_{1111}\sigma_1^2 + p_{2222}\sigma_2^2 + 2p_{1122}\sigma_1\sigma_2 + 4p_{1212}\tau_{12}^2)^{1/2} = 1, \quad (17)$$

где компоненты тензора поверхности прочности для исследуемого материала равны

$$p_{1111} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma_{e1}^- + \sigma_{e1}^+}{\sigma_{e1}^+ \sigma_{e1}^-} \right)^2 = 1,141 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-2},$$

$$p_{2222} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma_{e2}^- + \sigma_{e2}^+}{\sigma_{e2}^+ \sigma_{e2}^-} \right)^2 = 3,98 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-2},$$

$$p_{1122} = \frac{1}{8} \left[\left(\frac{1}{\sigma_{e1}^+} + \frac{1}{\sigma_{e1}^-} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_{e2}^+} + \frac{1}{\sigma_{e2}^-} \right)^2 - \left(\frac{1}{\tau_{e45}^+} + \frac{1}{\tau_{e45}^-} \right)^2 \right] = 1,31 \times 10^{-6} \text{ МПа}^{-2},$$

$$p_{1212} = \frac{1}{4\tau_{e12}^2} = 1,34 \times 10^{-4} \text{ МПа}^{-2},$$

$$p_{11} = \frac{\sigma_{e1}^- - \sigma_{e1}^+}{2\sigma_{e1}^+ \sigma_{e1}^-} = -1,408 \times 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}, \quad p_{22} = \frac{\sigma_{e2}^- - \sigma_{e2}^+}{2\sigma_{e2}^+ \sigma_{e2}^-} = -2,241 \times 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}.$$

И критерий (17) для исследуемого материала запишется в виде

$$-1,408\sigma_1 - 2,241\sigma_2 + (11,41\sigma_1^2 + 39,80\sigma_2^2 + 2,620\sigma_1\sigma_2 + 536\tau_{12}^2)^{1/2} = 10^3,$$

где напряжения – в МПа.

Условие совместности констант прочности для исследуемого материала выполняется.

2. Модифицированный критерий Мизеса-Хилла [13]

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{\epsilon 1}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_{\epsilon 1}\sigma_{\epsilon 2}}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{\epsilon 2}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{\epsilon 12}}\right)^2 = 1, \quad (18)$$

во втором ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$) и третьем ($\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$) квадрантах имеет вид, соответственно

$$3,88\sigma_1^2 + 72,8\sigma_2^2 + 536\tau_{12}^2 - 16,8\sigma_1\sigma_2 = 10^6,$$

$$22,9\sigma_1^2 + 72,8\sigma_2^2 + 536\tau_{12}^2 - 40,8\sigma_1\sigma_2 = 10^6.$$

3. Критерий максимальных напряжений [14]

$$(\sigma_1 - \sigma_{\alpha 1}^+)(\sigma_1 + \sigma_{\alpha 1}^-)(\sigma_2 - \sigma_{\alpha 2}^+)(\sigma_2 + \sigma_{\alpha 2}^-)(\tau_{12}^2 - \tau_{\alpha 12}^2) = 0. \quad (19)$$

Критерии (17), (18) определяют поверхности прочности в виде эллипсоидов, а (19) – параллелепипеда (рис.8).

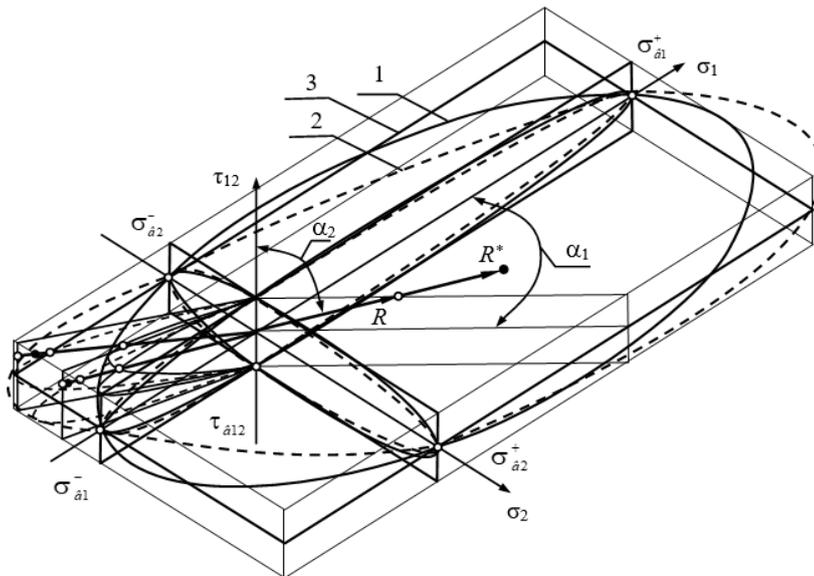


Рис.8. Сечения координатными плоскостями поверхностей прочности по критериям прочности: 1 – Гольденבלата-Копнова; 2 – модифицированному Мизеса-Хилла; 3 – максимальных напряжений; • – результаты эксперимента; ° – по критериям.

Проверка работоспособности критериев прочности по результатам испытаний труб-образцов при чистом изгибе производится в сферической системе координат (рис.8). Величины экспериментальных разрушающих изгибающих моментов $M_{пред.}^{эксп.}$ для труб-образцов приведены в таблице 1. По величинам этих моментов вычисляются напряжения в наиболее напряжённых слоях в координатах трубы $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$, а затем пересчитываются в систему координат слоя $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \tau_{12}^*$.

Величины экспериментальных предельных радиус-векторов вычисляются по формуле

$$R^* = \sqrt{(\sigma_1^*)^2 + (\sigma_2^*)^2 + (\tau_{12}^*)^2}.$$

Конкретный путь нагружения задаётся двумя углами: α_1, α_2 , которые определяются отношениями экспериментальных разрушающих напряжений в слое: $\operatorname{tg}\alpha_1 = \sigma_2^*/\sigma_1^*$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \sigma_1^*(\tau_{12}^* \cos \alpha_1)^{-1}$. Величина радиус-вектора, соответствующего предельному напряженному состоянию по критерию прочности, соединяющего начало координат с точкой на поверхности прочности, определяется по формуле

$$R = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \tau_{12}^2},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ – компоненты тензора поверхности прочности, определяемые теоретически из соответствующих уравнений критериев прочности по известному пути нагружения (таблица 2) [6].

Для количественной оценки работоспособности критериев используется относительное отклонение X_i экспериментальных данных от теоретических по критерию, определяемое по формуле

$$X_i = \frac{R_i^* - R_i}{R_i^*},$$

где R_i^* – i -й экспериментальный результат, соответствующий разрушению; R_i – теоретический радиус-вектор предельного состояния по критерию прочности для i -й траектории нагружения. На рис.8 показаны пути нагружения и радиус-векторы для труб-образцов третьего и шестого типоразмеров. В таблице 2 приведены результаты анализа работоспособности критериев прочности для труб-образцов шести типоразмеров.

Таким образом, для оценки прочности криволинейных участков труб из исследуемого стеклопластика рекомендуется использовать критерии максимальных напряжений или модифицированный критерий Мизеса-Хилла с меньшими величинами средних относительных отклонений X .

Таблица 2.

Результаты экспериментов			Результаты количественной оценки критериев прочности					
α_1 , град.	α_2 , град.	R^* , МПа	Критерий максимальных напряжений		Критерий Гольденבלата-Копнова		Критерий Мизеса-Хилла	
			R , МПа	$ X \times 100\%$	R , МПа	$ X \times 100\%$	R , МПа	$ X \times 100\%$
168,7	82,0	275,0	215,1	21,8	179,9	34,58	167,2	39,20
161,6	81,5	257,5	222,5	13,6	183,0	28,93	161,9	37,14
194,1	82,6	212,6	217,2	2,16	151,6	28,71	202,9	4,56
198,4	81,2	228,8	222,7	2,69	139,5	39,02	193,4	15,48
208,6	82,9	220,0	239,5	8,84	136,1	38,13	207,5	5,68
206,6	74,8	170,0	182,4	7,30	109,9	35,34	147,0	12,97
Среднее относительное отклонение			9,39		34,12		19,17	

Напряжения в системе координат слоя подставляются в критерий прочности и определяются опасные точки. На рис.9 показано распределение величины критериальной функции прочности (левой части критерия прочности (17)) по среднему по длине трубы поперечному сечению ($\alpha = 0$) для трубы-образца пятого типоразмера.

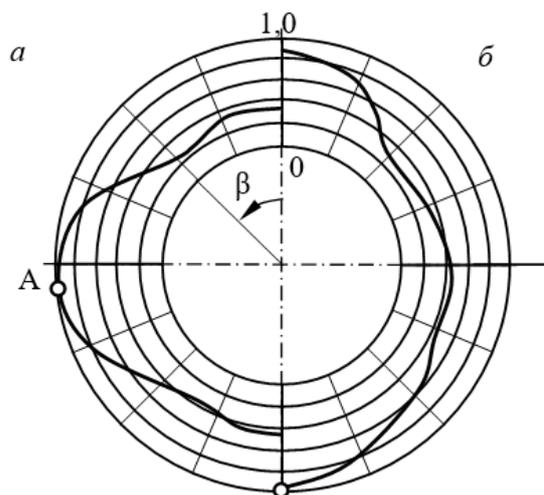


Рис.9. Распределение величины критериальной функции прочности по поперечному сечению трубы во внутреннем (а) и наружном (б) слоях стеклопластика по критерию (17).

Характер разрушения образцов (рис.10) подтверждает положение опасных точек (точка А на рис.9).

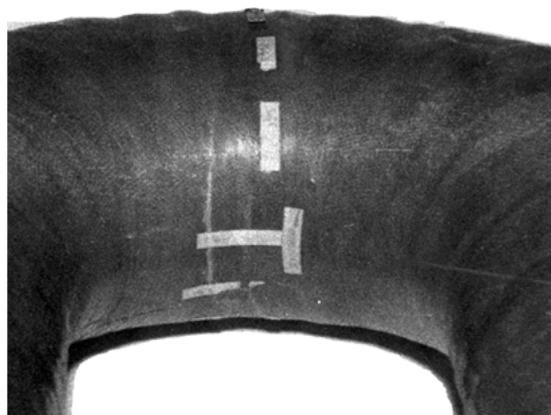


Рис.10. Характер разрушения труб-образцов.

Наиболее напряжёнными являются внутренний и наружный слои, при этом наиболее напряжённые точки для различных критериев прочности практически совпадают.

Разрушение начинается с внутреннего слоя в области $\beta = \pi/2$, а затем разрушается наружный слой в области $\beta = 120-240^\circ$. Положение опасных точек зависит от параметра кривизны труб. Трубы малой кривизны разрушаются без предварительного разрушения внутреннего слоя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Представлена расчётная модель для тонкостенной криволинейной трубы с переменной толщиной стенки из ортотропного слоистого материала с симметричным расположением слоёв относительно срединной поверхности с учётом реальных условий закрепления концевых сечений. Для вывода расчётных соотношений используются уравнения в геометрически нелинейной постановке и допущения полубезмоментной теории тонких оболочек.

2. Исследовано влияние параметров длины, кривизны, переменности толщины стенки, условий закрепления концов труб на жёсткость и НДС криволинейных труб из стеклопластика при чистом изгибе.

3. Приведены результаты экспериментального исследования прочности и жёсткости серии многослойных криволинейных труб из перекрёстно армированного стеклопластика.

4. Проведён сопоставительный анализ теоретических и экспериментальных величин коэффициентов гибкости, увеличения диаметра среднего по длине поперечного сечения трубы в зависимости от нагрузки. Величины коэффициентов гибкости сопоставлены с результатами известного решения МКЭ. Получено удовлетворительное соответствие теоретических и экспериментальных результатов.

5. По результатам эксперимента подобран феноменологический критерий прочности для оценки прочности криволинейных труб из стеклопластика в условиях плоского напряжённого состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксельрад Э.Л. *Гибкие оболочки*. – М.: Наука, 1976. – 376 с.
2. Аксельрад Э.Л., Ильин В.П. *Расчёт трубопроводов*. – Л.: Машиностроение, 1972. – 239 с.
3. Костовецкий Д.Л. *Прочность трубопроводных систем энергетических установок*. – Л.: Энергия, 1973. – 264 с.
4. Стасенко И.В. *Расчет трубопроводов на ползучесть*. – М.: Машиностроение, 1986. – 256 с.
5. Куликов Ю.А., Лоскутов Ю.В. *Механика трубопроводов из армированных пластиков: Монография*. – Йошкар-Ола: Издательство МарГТУ, 2004. – 156 с.
6. Багмутов В.П., Тышкевич В.Н., Светличная В.Б. *Расчёт и рациональное проектирование криволинейных труб из армированных пластиков: Монография*. – Волгоград: Издательство ВолгГТУ, 2008. – 157 с.
7. Зайцев Г.П., Тышкевич В.Н. *Рациональное проектирование криволинейных перекрёстно армированных труб из стеклопластика // Механика композитных материалов*. – 1992. – №4. – С.470-475.
8. Тышкевич В.Н. *Испытание стеклопластиковых криволинейных труб при чистом изгибе / XXX Уральский семинар УрО РАН «Неоднородные конструкции»*. Труды семинара. – Екатеринбург, 2000. – С.66-73.
9. Багмутов В.П., Тышкевич В.Н., Светличная В.Б. *Несущая способность криволинейных труб из армированных пластиков при статическом нагружении // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*. – 2004. – №4. – С.71-73.
10. Тышкевич В.Н. *Изготовление и расчёт криволинейных труб из армированных пластиков // Авиационная промышленность*. – 2010. – №4. – С.40-43.

11. Лоскутов Ю.В., Куликов Ю.А. *Прочность и жёсткость криволинейных многослойных композитных труб при чистом изгибе* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т.14. – №2. – С.157-166.
12. Гольденблат И.И., Копнов В.А. *Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов.* – М.: Машиностроение, 1968. – 192 с.
13. Ву Э.М. *Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред. Композиционные материалы. Т.2.* – М.: Мир, 1978. – С.401-491.

REFERENCES

1. Akselrad E.L. *Gibkie obolochki [Flexible shells].* Moskva, Nauka, 1976, 376 p.
2. Akselrad E.L., Ilin V.P. *Raschyot truboprovodov [Calculation of pipelines].* Leningrad, Mashinostroenie, 1972, 239 p.
3. Kostovetskiy D.L. *Prochnost' truboprovodnykh sistem ehnergeticheskikh ustanovok [Strength of pipeline systems of power plants].* Leningrad, Ehnergiya, 1973, 264 p.
4. Stasenko I.V. *Raschet truboprovodov na polzuchest' [Calculation of pipelines for creep].* Moskva, Mashinostroenie, 1986, 256 p.
5. Kulikov Yu.A., Loskutov Yu.V. *Mekhanika truboprovodov iz armirovannykh plastikov: Monografiya [Mechanics of reinforced plastic pipelines].* Joshkar-Ola, Izdatel'stvo MarGTU, 2004, 156 p.
6. Bagmutov V.P., Tyshkevich V.N., Svetlichnaya V.B. *Raschyot i ratsional'noe proektirovanie krivolineynykh trub iz armirovannykh plastikov: Monografiya [Calculation and rational design of curved pipes made of reinforced plastics].* Volgograd, Izdatel'stvo VolgGTU, 2008, 157 p.
7. Zaytsev G.P., Tyshkevich V.N. *Ratsional'noe proektirovanie krivolineynykh perekryostno armirovannykh trub iz stekloplastika [Rational design of curved cross-reinforced fiberglass pipes].* Mekhanika kompozitnykh materialov, 1992, No.4, Pp.470-475.
8. Tyshkevich V.N. *Ispytanie stekloplastikovyykh krivolineynykh trub pri chistom izgibe [Testing of fiberglass curved pipes with a clean bend].* XXX Ural'skiy seminar UrO RAN "Neodnorodnye konstruksii". Trudy seminar, Ekaterinburg, 2000, Pp.66-73.
9. Bagmutov V.P., Tyshkevich V.N., Svetlichnaya V.B. *Nesushhaya sposobnost' krivolineynykh trub iz armirovannykh plastikov pri staticheskom nagruzhении [Bearing capacity of curved pipes made of reinforced plastics under static loading].* Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Aviatsionnaya tekhnika, 2004, No.4, Pp.71-73.
10. Tyshkevich V.N. *Izgotovlenie i raschyot krivolineynykh trub iz armirovannykh plastikov [Manufacture and calculation of curved pipes made of reinforced plastics].* Aviatsionnaya promyshlennost', 2010, No.4, Pp.40-43.
11. Loskutov Yu.V., Kulikov Yu.A. *Prochnost' i zhyostkost' krivolineynykh mnogoslajnykh kompozitnykh trub pri chistom izgibe [Strength and rigidity of curved multilayer composite pipes with pure bending].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2008, Vol.14, No.2, Pp.157-166.
12. Goldenblat I.I., Kopnov V.A. *Kriterii prochnosti i plastichnosti konstruksionnykh materialov [Criteria of strength and plasticity of structural materials],* Moskva, Mashinostroenie, 1968, 192 p.

13. Vu E.M. *Fenomenologicheskie kriterii razrusheniya anizotropnykh sred. Kompozitsionnye materialy. Tom 2. [Phenomenological criteria for the destruction of anisotropic media]*. Moskva, Mir, 1978, Pp.401-491.

Поступила в редакцию 19 мая 2023 года.

Сведения об авторах:

Тышкевич Владимир Николаевич – к.т.н., доц. каф. Механики, физики и математики, Волжский политехнический институт (филиал) ФГБОУ ВО «ВолГТУ», г. Волжский, Россия; e-mail: tubem@mail.ru

Светличная Виктория Борисовна – к.т.н., доц. каф. Механики, физики и математики, Волжский политехнический институт (филиал) ФГБОУ ВО «ВолГТУ», г. Волжский, Россия
Саразов Александр Васильевич – к.т.н., доц., и.о. зав. каф. Механики, физики и математики, Волжский политехнический институт (филиал) ФГБОУ ВО «ВолГТУ», г. Волжский, Россия