



ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ЦЕНТРОВ ВКЛЮЧЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМ РАДИУСОМ

Власов А.Н.¹, Власов Д.А.², Сорокин Г.С.¹, Карнет Ю.Н.¹

¹ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

²ООО «Сигма Тау», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Массовое использование композитов в машиностроении, авиакосмической технике, строительстве, расчеты зданий и сооружений с учетом совместной их работы с грунтами оснований, а также расчеты подземных сооружений и горных выработок совместно с вмещающим их массивом горных пород (грунты и горные породы по существу являются композитами природного образования) ставит задачу надежного, быстрого и удобного способа определения механических характеристик таких композитных материалов. В геомеханике определение механических свойств часто длительное по времени и весьма затратно, а иногда их невозможно определить экспериментальным путём (проблема определения характеристик скальных массивов). Таким образом, можно констатировать, что в настоящее время в инженерной и научной деятельности проблема определения эффективных характеристик композитных материалов является актуальной.

Цель данной работы показать возможность определения тензора жесткости, используя теоретические методы, решая задачу на ячейке периодичности, а не на представительном элементе объема, при условии соблюдения периодичности расположения центров включений.

В работе излагается пять вариантов оценки эффективных характеристик деформационных свойств композитных материалов с периодическим расположением центров включений и случайными значениями их размеров.

Показана применимость предложенного вероятностного подхода к определению эффективного тензора жесткости на ячейке периодичности. Такой подход позволяет получать не только средние значения (эффективный тензор жесткости), но и три основных центральных момента – со 2-го по 4-й порядок, характеризующие случайную природу эффективного тензора жесткости.

Разработанные в статье подходы к оценке эффективных деформационных характеристик композитных материалов с периодическим расположением центров включений, характеризуемых случайной величиной радиусов могут быть практически распространены и на оценку других физико-механических свойств.

Ключевые слова: случайный размер включений; функция распределения радиуса включений; задача на ячейке; эффективный тензор жесткости; эффективные деформационные характеристики композитных материалов

ESTIMATION OF THE EFFECTIVE STRIFFNESS TENSOR OF A COMPOSITE MATERIAL WITH A PERIODIC LOCATION OF THE INCLUSION CENTERS OF WITH A RANDOM RADIUS

Vlasov A.N.¹, Vlasov D.A.², Sorokin G.S.¹, Karnet Yu.N.¹

¹*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
²*Limited Liability Company «Sigma Tau», Moscow, Russia*

ABSTRACT

Massive use of composite materials in mechanical engineering, aerospace engineering, construction, calculations of buildings and structures taking into account their joint work with foundation soils, as well as calculations of underground structures and mine working together with the host rock mass (soils and rocks are essentially composites of natural formation) poses the problem of a reliable, fast and convenient way to determine the mechanical characteristics of such composite materials. In geomechanics, determination of mechanical properties is often time-consuming and very costly, and sometimes they cannot be determined experimentally (the problem of determining the characteristics of rock masses). Thus, it can be stated that currently in engineering and scientific activities the problem of determining the effective characteristics of composite materials is relevant.

The purpose of this work is to show the possibility of determining the stiffness tensor using theoretical methods, solving the problem using a periodicity cell, and not using a representative elementary volume, while taking into account the periodicity of the location of inclusion centers.

In this work five options for estimation of the effective characteristics of the deformation properties of composite materials with a periodic arrangement of inclusion centers and random values of their sizes are presented.

The applicability of the proposed probabilistic approach to determining the effective stiffness tensor on a periodicity cell is shown. This approach allows us to obtain not only average values (effective stiffness tensor), but also three main central moments - from the 2nd to the 4th ordinal, characterizing the random nature of the effective stiffness tensor.

The approaches to the use for the estimation of the effective deformation characteristics of composite materials with a periodic arrangement of inclusion centers, characterized by a random value of radii, developed in the article, could be practically extended to other physical and mechanical properties.

Keywords: random size of inclusions; inclusion radius distribution function; cell problem; effective stiffness tensor; effective deformation characteristics of composite materials

ВВЕДЕНИЕ

Основные работы по определению эффективных характеристик структурно неоднородных сред основанных на усреднении дифференциальных уравнений (операторов) со случайными быстро осциллирующими коэффициентами, как это было указано в работе [1], изложены в статьях [2-14], а также в работах [15-16].

В настоящей работе представлены методы оценки эффективных характеристик деформационных свойств композитных материалов с периодическим расположением центров включений и случайными значениями их радиусов, т.е. приведение композитных материалов к эквивалентным по деформируемости однородным материалам. Предполагается, что область, занимаемую композитом, можно разбить на ячейки равного размера с расположенными в них включениями, которые не выходят за их границы. Процедура усреднения эффективных деформационных характеристик (компонентов тензора жёсткости) композитных материалов реализована в четырёх вариантах:

1. По заданному закону распределения радиуса включения как случайной величины определяется средний их радиус. В результате задача сводится

к нахождению эффективного тензора жёсткости композитного материала периодической структуры. Затем компоненты эффективного тензора жёсткости определяются методом асимптотического усреднения Бахвалова [17,18].

2. Методом асимптотического усреднения определяются значения эффективных компонентов тензора жёсткости в зависимости от радиуса включения. В результате получаем параметрическую зависимость эффективного тензора жёсткости от радиуса включения. При этом следует заметить, что каждому фиксированному радиусу отвечает свой эквивалентный композитный материал периодической структуры, которому соответствует свой эффективный тензор жёсткости. Далее, по заданному закону распределения радиуса включения определяются законы распределения компонентов эффективного тензора жёсткости, а потом уже находятся средние их значения и три их центральных момента – дисперсия, асимметрия и эксцесс.

3. По заданному закону распределения радиуса включения определяется «эффективное» включение, радиус которого равен максимальному размеру из возможных принимаемых включениями значений. Таким образом, композит приводится к эквивалентному композитному материалу периодической структуры. При этом тензор жёсткости «эффективного» включения является функцией его радиуса. Затем, как и в первом варианте, эффективный тензор жёсткости определяется методом асимптотического усреднения Бахвалова.

4. Определение эффективного тензора жёсткости композитного материала методом Монте-Карло, где компоненты эффективного тензора жёсткости определяются методом асимптотического усреднения по случайным значениям радиуса включения в ячейке периодичности, который генерируется датчиком псевдослучайных чисел. При использовании этого метода геометрическая модель ячейки многократно обчисляется и на основе полученных данных вычисляются средние значения компоненты эффективного тензора жёсткости и три их центральных момента – дисперсия, асимметрия и эксцесс [19].

5. Определение эффективного тензора жёсткости композитного материала на представительном элементе объёма.

Цель данной работы показать возможность определения тензора жесткости на ячейке, а не на представительном элементе объема, при условии соблюдения условия периодичность расположения центров включений.

Разработанные в статье подходы к оценке эффективных деформационных характеристик композитных материалов с периодическим расположением центров включений, характеризующихся случайной величиной радиусов могут быть практически распространены и на оценку других физико-механических свойств.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим композитные материалы со случайным размером включений, у которых центры образуют периодическую структуру. При этом будем считать, что все включения целиком расположены в ячейках (Π), которые имеют один и тот же фиксированный размер и плотно прилегают друг к другу. Геометрия таких материалов определяется ячейкой периодичности Π с расположенным в ней включением случайного размера (рис.1). Для простоты будем предполагать, что включения имеют форму шара, либо цилиндра, либо слоя (в случае слоистых сред с фиксированным размером пакета слоев). Такое предположение не меняет сам подход к решению задачи усреднения уравнений теории упругости

со случайными быстро осциллирующими коэффициентами и оценки свойств композитных материалов со случайным размером рассматриваемых включений, а также принципиально не влияет на его общность.

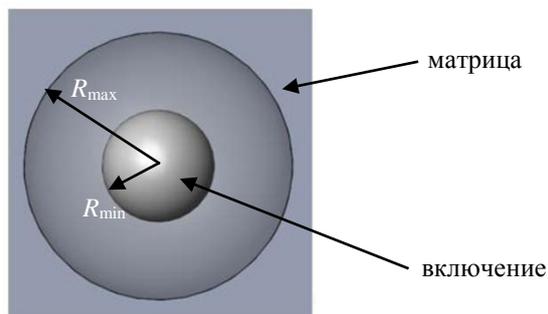


Рис.1. Ячейка Π композитного материала с включением

Будем решать задачу приведения такого композитного материала к эквивалентному однородному. Ее решение сводится к определению эффективных свойств этого материала (в решаемой нами задаче – к определению эффективного тензора жесткости).

Предположим, что область, занимаемая композитным материалом, имеет характерный размер L и составлена из структурных ячеек Π размером l_{cell} , в которых расположены включения со случайными значениями радиуса R , где $2R < l_{cell}$, которые во всех ячейках Π имеют одну и ту же функцию распределения. При этом также считаем, что значение радиуса включения в одной ячейке не влияет на их значения в других ячейках, т.е. радиусы включений в ячейках как случайные величины попарно независимы. Таким образом, коэффициент корреляции между ними равен нулю и, следовательно, исследование вероятностных характеристик в таких композитных материалах сводится к их определению на одной ячейке Π .

В ячейках Π фазы композитного материала контактируют по границе раздела, определяемым радиусом включения. При этом коэффициенты дифференциальных уравнений теории упругости для каждой фазы определяются их тензорами жесткости и на каждой фазе предполагаются постоянными. Далее также будем считать, что на границе раздела фаз реализуются условия идеального контакта.

Приведем четыре метода оценки эффективного тензора жесткости рассматриваемого композитного материала. Для этого решим следующие задачи:
Задача 1 – Простейший метод оценки механических свойств композитных материалов со случайным размером включений, у которых центры образуют периодическую структуру.

Задача 2 – Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала со случайным размером включений, которая определяется с использованием зависимости эффективного тензора жесткости от радиуса включения для композитных материалов периодической структуры (радиус включения R в каждой реализации композита фиксирован).

Задача 3 – Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала со случайным размером включений, которая строится на определении зависимости среднего значения тензора жесткости на ячейке по реализациям

радиуса включения с последующим применением метода асимптотического усреднения.

Задача 4 – Оценка эффективного тензора жёсткости композитного материала со случайным размером включений, а также его дисперсии, асимметрии и эксцесса методом Монте-Карло.

Задача 5 – Оценка эффективного тензора жёсткости композитного материала со случайным размером включений на представительном элементе объёма.

1. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ ПО СРЕДНЕМУ ЗНАЧЕНИЮ РАДИУСА ВКЛЮЧЕНИЯ. ЗАДАЧА 1

Этот метод оценки эффективного тензора жесткости состоит в определении среднего радиуса включения по известному закону его распределения с последующим применением метода асимптотического усреднения.

Средний радиус включения (математическое ожидание) определяется по формуле

$$M[R] = \bar{R} = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} r \cdot f(r) dr, \quad (1)$$

где r – случайная величина (радиус), принимающая значения на отрезке $r \in [R_{\min}, R_{\max}]$ по закону распределения с плотностью вероятности $f(r)$.

Таким образом, определив средний радиус включения, мы свели задачу по оценке эффективного тензора жесткости к задаче определения эффективного тензора жесткости композитного материала с периодической структурой и радиусом включений \bar{R} . Её решение находится из решения периодической задачи на ячейке Π по быстрой переменной ξ [18]

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(A_{ij}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} (N_i(\xi) + \xi_i E) \right) = 0, \quad (2)$$

$$\left[N_i \right]_{\xi \in \Sigma} = \left[n_i A_{ij}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} (N_i(\xi) + \xi_i E) \right]_{\xi \in \Sigma} = 0, \quad (3)$$

где $A_{ij} = \|c_{ijkl}\|$ – матрицы-функции, составленные из компонент тензора жёсткости четвертого ранга c_{ijkl} , ($i, j, k, l = 1, 2, 3$); $N_i(\xi)$ – периодические по быстрой переменной ξ матрицы-функции, представляющие собой решение задачи (2), (3), а $i = 1, 2, 3$; E – единичная матрица; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор нормали; Σ – граница контакта матрица-включение.

Затем, эффективный тензор жесткости определяется, как среднее значение по ячейке периодичности решения задачи (1), (2)

$$\hat{A}_{ij} = \frac{1}{|\Pi|} \int_{\Pi} \left(A_{ik} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (N_j(\xi) + \xi_j E) \right) dv = \left\langle A_{ik} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (N_j(\xi) + \xi_j E) \right\rangle. \quad (4)$$

Дисперсия (второй центральный момент) радиуса включения определяется по формуле

$$D[R] = \sigma^2 = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} (R - \bar{R})^2 f(r) dr, \quad (5)$$

где σ – среднеквадратическое отклонение.

В рамках рассматриваемого подхода среднеквадратическое отклонение позволяет оценить возможные отклонения значений эффективного тензора жесткости от его среднего значения \hat{A}_{ij} при вариации радиуса включения относительно его среднего значения \bar{R} .

2. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ ПО ЗАВИСИМОСТИ ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ ОТ РАДИУСА ВКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ. ЗАДАЧА 2

Для решения второй задачи вначале необходимо решить периодические задачи (2), (3), где $A_{ij}(r)$ есть матрицы-функции, составленные из компонент тензора жёсткости и параметрически зависящие от радиуса, где радиус принимает значения на отрезке $R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$. Как результат решения такой задачи получаем зависимость эффективного тензора жесткости от радиуса включения R

$$\bar{A}_{ij}(R) = \left\langle A_{ik}(R) \frac{\partial}{\partial \xi_k} (N_j(\xi) + \xi_j E) \right\rangle, \quad (6)$$

а также его минимальные и максимальные значения равные соответственно $\bar{A}_{ij}^{\min} = \min(\bar{A}_{ij}(R_{\min}), \bar{A}_{ij}(R_{\max}))$ и $\bar{A}_{ij}^{\max} = \max(\bar{A}_{ij}(R_{\min}), \bar{A}_{ij}(R_{\max}))$.

Далее считая, что радиус включения r является случайной величиной распределенной по закону с плотностью вероятности $f(r)$, находим закон распределения компонентов тензора жесткости, который будет иметь следующий вид

$$F(\bar{c}_{ijkl}) = F(C_{ijkl} \leq \bar{c}_{ijkl}(r)) = F(R \leq r) = \int_{R_{\min}}^r f(R) dR. \quad (7)$$

При этом плотность вероятности распределения компонентов тензора напряжений будет определяться как производная от функции закона распределения по соответствующим компонентам тензора жесткости C_{ijkl} т.е.

$$g(\bar{c}_{ijkl}) = \frac{d}{d\bar{c}_{ijkl}} F(\bar{c}_{ijkl}). \quad (8)$$

Зная функции распределения компонентов эффективного тензора жёсткости \bar{c}_{ijkl} , четыре основных их первых момента (начальный момент первого порядка и три центральных момента – со 2-го по 4-й порядок, соответственно) будут определяться по следующим формулам:

- Первый момент (математическое ожидание) – среднее значение (компоненты эффективного тензора жёсткости)

$$M[\bar{c}_{ijkl}] = \hat{c}_{ijkl} = \int_{\bar{c}_{ijkl}^{\min}}^{\bar{c}_{ijkl}^{\max}} \bar{c}_{ijkl} \frac{d}{d\bar{c}_{ijkl}} F(\bar{c}_{ijkl}) d\bar{c}_{ijkl}. \quad (9)$$

- Второй центральный момент – дисперсия

$$D[\bar{c}_{ijkl}] = \sigma^2 = \int_{\bar{c}_{ijkl}^{\min}}^{\bar{c}_{ijkl}^{\max}} (\bar{c}_{ijkl} - \hat{c}_{ijkl})^2 \frac{d}{d\bar{c}_{ijkl}} F(\bar{c}_{ijkl}) d\bar{c}_{ijkl}. \quad (10)$$

- Третий центральный момент

$$\mu_3 = \int_{\bar{c}_{ijkl}^{\min}}^{\bar{c}_{ijkl}^{\max}} (\bar{c}_{ijkl} - \hat{c}_{ijkl})^3 \frac{d}{d\bar{c}_{ijkl}} F(\bar{c}_{ijkl}) d\bar{c}_{ijkl}. \quad (11)$$

- Четвёртый центральный момент

$$\mu_4 = \int_{\bar{c}_{ijkl}^{\min}}^{\bar{c}_{ijkl}^{\max}} (\bar{c}_{ijkl} - \hat{c}_{ijkl})^4 \frac{d}{d\bar{c}_{ijkl}} F(\bar{c}_{ijkl}) d\bar{c}_{ijkl}. \quad (12)$$

По третьему и четвёртому моментам определяются два важных показателя функций распределения случайных величин. Это асимметрия и эксцесс, соответственно

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (13)$$

Асимметрия Sk является показателем отклонения закона распределения случайной величины от симметричного распределения. Если закон распределения симметричный, то асимметрия $Sk = 0$. Положительная величина коэффициента асимметрии указывает на наличие правосторонней асимметрии. Это означает, что правая ветвь плотности вероятности относительно максимальной ординаты вытянута больше, чем левая. Отрицательный знак коэффициента асимметрии свидетельствует о наличии левосторонней асимметрии и при этом левая ветвь плотности вероятности вытянута больше относительно максимальной ординаты.

Эксцесс Ex , определяемый для симметричных законов распределения, является показателем островершинности по отношению к нормальному закону распределения. В случае нормального закона распределения эксцесс $Ex = 0$. Положительная величина эксцесса указывает на то, что плотность вероятности случайной величины более островершинное по сравнению с плотностью вероятности нормального закона распределения. Если величина эксцесса отрицательная, то плотность вероятности случайной величины плосковершинное по сравнению с плотностью вероятности нормального закона распределения.

Зная функции распределения компонентов эффективного тензора жёсткости \bar{c}_{ijkl} , четыре основных их первых момента (начальный момент первого порядка и три центральных момента – со 2-го по 4-й порядок, соответственно) могут быть легко определены, по приведённым выше формулам.

Изложенная методика позволяет определять среднее значение эффективного тензора жёсткости \hat{A}_{ij} , его возможные минимальные и максимальные значения \hat{A}_{ij}^{\min} и \hat{A}_{ij}^{\max} , среднее квадратическое отклонение σ и, если необходимо, то асимметрию Sk и эксцесс Ex для композитных материалов с периодическим расположением центров включений, размер которых является случайной величиной.

3. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ ПО ЗАВИСИМОСТИ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ НА ЯЧЕЙКЕ. ЗАДАЧА 3

При подходе, сформулированном в постановке задачи 3, вначале определяется среднее значения тензора жесткости материала на ячейке как функции быстрой переменной $\bar{A}_{ij}(\xi)$ в композитном материале периодической структуры, а затем вычисляется эффективный тензор жесткости композитного материала с использованием метода асимптотического усреднения.

Пусть радиус включения R , являющийся случайной величиной, распределен по закону с плотностью вероятности $f(r)$. Найдём усреднённый тензор жёсткости (математическое ожидание) $\bar{A}_{ij}(\xi)$ как функцию быстрой переменной тензора жесткости со случайным значением радиуса $A_{ij}(\xi, R)$. Усреднённая функция $\bar{A}_{ij}(\xi)$ будет определяться в общем случае следующим образом

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij}(\xi) &= M[A_{ij}(\xi, r)] = A_{ij}^{inc} P(\xi) + A_{ij}^m (1 - P(\xi)) = \\ &= A_{ij}^m + (A_{ij}^{inc} - A_{ij}^m) P(\xi). \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь в (14) и (4) A_{ij}^m, A_{ij}^{inc} – матрицы, составленные из компонент тензоров жесткости матрицы и включений, соответственно; $P(\xi)$ – вероятность того, что точка с координатами ξ будет принадлежать включению.

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение в этом случае, как функции быстрой переменной ξ , будут находиться в соответствии с формулой

$$D[A_{ij}(\xi, r)] = \sigma^2 = (A_{ij}^{inc} - \bar{A}_{ij}(\xi))^2 P(\xi) + (A_{ij}^m - \bar{A}_{ij}(\xi))^2 (1 - P(\xi)). \tag{15}$$

Определим закон распределения $P(\xi)$ тензора жёсткости на ячейке. Очевидно, что вероятность $P(\xi) = 0$, если значение быстрой переменной ξ лежит за пределами области максимального радиуса, который может реализоваться для включения R_{max} , а в случае, когда ξ принадлежит области, соответствующей минимальному значению радиуса включения R_{min} вероятность $P(\xi) = 1$. Если же ξ лежит на сфере радиуса R , где $R \in [R_{min}, R_{max}]$, то вероятность того, что ξ будет принадлежать включению, т.е. $A_{ij}(\xi) = A_{ij}^{inc}$, очевидно будет равна

$$P\{\xi\} = \int_R^{R_{max}} f(r) dr. \tag{16}$$

Из вышесказанного следует, что среднее значение тензора жёсткости на ячейке, в соответствии с (14) и (16), будет определяться следующим образом

$$\bar{A}_{ij}(\xi) = \begin{cases} A_{ij}^{inc}, & \text{где } |\xi| \in [0, R_{min}] \\ A_{ij}^m + (A_{ij}^{inc} - A_{ij}^m) \int_R^{R_{max}} f(r) dr, & \text{где } |\xi| \in [R_{min}, R_{max}] \\ A_{ij}^m, & \text{где } |\xi| \in [R_{max}, l_{cell}/2] \end{cases} \tag{17}$$

а дисперсия (квадрат среднеквадратического отклонения) – следующим образом

$$\sigma^2 = \begin{cases} 0, & \text{где } |\xi| \in [0, R_{min}] \\ \left[\begin{aligned} &(A_{ij}^m - \bar{A}_{ij}(\xi))^2 + \\ &+ (A_{ij}^{inc} - A_{ij}^m)(A_{ij}^{inc} + A_{ij}^m - 2\bar{A}_{ij}(\xi)) \int_R^{R_{max}} f(r) dr \end{aligned} \right], & \text{где } |\xi| \in [R_{min}, R_{max}] \\ 0, & \text{где } |\xi| \in [R_{max}, l_{cell}/2] \end{cases} \tag{18}$$

Здесь $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ для сферических включений, $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ для цилиндрических включений и $|\xi| = |\xi_1|$ для слоя-включения.

Далее, в соответствии методом асимптотического усреднения эффективные деформационные характеристики композитного материала с периодической структурой, будут из решения периодической задачи (2), (3) по формуле

$$\hat{A}_{ij} = \left\langle \bar{A}_{ik}(\xi) \frac{\partial(N_j + \xi_j E)}{\partial \xi_k} \right\rangle = \left\langle \bar{A}_{ij}(\xi) + \bar{A}_{ik}(\xi) \frac{\partial N_j}{\partial \xi_k} \right\rangle. \quad (19)$$

Заметим, что в (18) тензор жёсткости $\bar{A}_{ik}(\xi)$ заданный на ячейке периодичности в матричной форме представляет собой непрерывные по координате ξ матрицы-функции класса C^0 , в то время как в (4) и (6) такой тензор определяется кусочно-непрерывными функциями.

4. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО. ЗАДАЧА 4

Определение эффективного тензора жёсткости композитного материала со случайным размером включений, а также его дисперсии, асимметрии и эксцесса методом Монте-Карло заключается в следующем:

1. С помощью датчика случайных чисел генерируются псевдослучайные значения радиуса включения.

2. Для каждого значения радиуса включения из решения задачи на ячейке вычисляются компоненты эффективного тензора жёсткости.

3. Затем проводится статистическая обработка полученных результатов имитационного моделирования компонентов эффективного тензора жёсткости.

Обработка «экспериментов» по имитационному моделированию эффективных деформационных свойств проводится по формулам:

• Первый момент (математическое ожидание) – компоненты эффективного тензора жёсткости

$$M[\bar{c}_{ijkl}] = \hat{c}_{ijkl} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{c}_{ijkl}(r_n). \quad (20)$$

• Второй центральный момент – дисперсия

$$D[\bar{c}_{ijkl}] = \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\bar{c}_{ijkl}(r_n) - M)^2. \quad (21)$$

• Третий центральный момент

$$\mu_3 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\bar{c}_{ijkl}(r_n) - M)^3. \quad (22)$$

• Четвёртый центральный момент

$$\mu_4 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\bar{c}_{ijkl}(r_n) - M)^4. \quad (23)$$

Затем симметрия и эксцесс, определяются по формулам (12).

5. ОЦЕНКА ДЕФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК (ПРИМЕР РАСЧЕТОВ)

Для начала заметим, что если размер включений в композитных материалах принимает значения R_{\min} до R_{\max} , то для них область возможных значений эффективного тензора жесткости будет варьироваться в пределах от $\bar{A}_{ij}^{\min} = \min(\bar{A}_{ij}(R_{\min}), \bar{A}_{ij}(R_{\max}))$ и до $\bar{A}_{ij}^{\max} = \max(\bar{A}_{ij}(R_{\min}), \bar{A}_{ij}(R_{\max}))$.

Получаемые средние значения для эффективного тензора жёсткости \hat{A}_{ij} , среднеквадратическое отклонение σ и, если необходимо, асимметрия Sk и эксцесс Ex можно рассматривать как оценки соответствующих характеристик эффективного тензора жесткости композитных материалов со случайным размером включений, у которых центры образуют периодическую структуру.

Далее оценим эффективные деформационные характеристики слоистой среды, состоящей из переслаивания двух материалов, где один из них выполняет роль матрицы, а другой роль включения со случайным размером, при этом будем считать, что слои ортогональны оси $x_1(\xi_1)$ (рис.2).

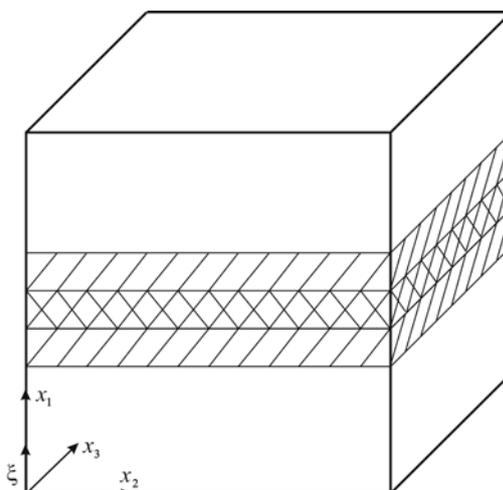


Рис.2. Модель слоистой среды.

В этом случае задача на ячейке (2), (3) упрощается и принимает следующий вид [20]

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(A_{i1}(\xi) \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + A_{ij}(\xi) \right) = 0, \quad \xi \notin \Sigma, \tag{24}$$

$$\left[N_j \right]_{\xi \in \Sigma} = \left[\left(A_{i1}(\xi) \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + A_{ij}(\xi) \right) n_i \right]_{\xi \in \Sigma} = 0, \tag{25}$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = (1, 0, 0)$ вектор внешней нормали к границе раздела слоёв равен; $\xi = \xi_1$; $i, j = 1, 2, 3$.

Решение периодической задачи на ячейке (24), (25) можно представить в матричном виде следующим образом [20]

$$\hat{A}_{ij} = \langle A_{ij} \rangle + \langle A_{i1} A_{11}^{-1} \rangle \langle A_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle A_{11}^{-1} A_{1j} \rangle - \langle A_{i1} A_{11}^{-1} A_{1j} \rangle \tag{26}$$

или покомпонентной записи [19,20]

$$\hat{c}_{kij} = \langle c_{kij} \rangle + \langle c_{kim} c_{mln}^{-1} \rangle \langle c_{n1p1}^{-1} \rangle^{-1} \langle c_{p1q1}^{-1} c_{q1lj} \rangle - \langle c_{kim} c_{mln}^{-1} c_{n1lj} \rangle. \quad (27)$$

Здесь под c_{n1p1}^{-1} понимается элемент матрицы A_{11}^{-1} обратной к матрице жёсткости A_{11} .

Далее будем полагать, что слои изотропны. Тогда компоненты тензоров модулей упругости слоёв, как известно, характеризуются двумя независимыми постоянными – модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона, которые определяются в стандартных экспериментальных исследованиях. В этом случае компоненты тензора жёсткости четвёртого ранга c_{ijkl} выражаются через независимые деформационные характеристики E и ν следующим образом [21]

$$c_{ijkl} = \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right), \quad (28)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$).

В условиях принятых предположений слоистая среда ведёт себя как макроскопически трансверсально-изотропная среда с плоскостью изотропии параллельной плоскости напластования. Компоненты эффективного тензора жёсткости при этом, как это следует из (26)-(28), определяются по формулам [20,21]

$$\begin{aligned} \hat{c}_{1111} &= \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle^{-1}; \quad \hat{c}_{1122} = \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle^{-1}; \\ \hat{c}_{2222} &= \left\langle \frac{E}{1-\nu^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle^2 \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle^{-1}; \\ \hat{c}_{2233} &= \left\langle \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle^2 \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle^{-1}; \\ \hat{c}_{1212} &= \hat{c}_{1313} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1+\nu}{E} \right\rangle^{-1} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{G} \right\rangle^{-1}; \\ \hat{c}_{2323} &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle = \frac{1}{2} (\hat{c}_{2222} - \hat{c}_{2233}). \end{aligned} \quad (29)$$

В качестве примера рассмотрим расчеты по определению эффективного тензора жесткости слоистой среды (см. рис.2), которая представляет собой переслаивание песчаника (матрица) и алевролита (включение). В расчётах будем предполагать, что мощность алевролита лежит в пределах от 0.2 м до 0.3 м, а размер пакета слоёв равен $l_{cell} = 1.1$ м. Такие значения характеристик имеют слоистые горные породы, залегающие, например, в основании плотины на р. Белая (Агидель).

Рассмотрим три варианта распределения по возможным принимаемым значениям мощности алевролита в пакете слоёв: равномерное распределение, нормальное распределение и распределение Вейбулла.

Для равномерного закона распределения, где плотность распределения мощности алевролита описывается функцией $f(l_m) = \frac{1}{l_{max} - l_{min}}$, среднее значение

толщины слоя алевролита $M[l_m] = 0.25$ м, а среднеквадратическое отклонение – $\sigma[l_m] = 0.01/12$ м. При этом коэффициент асимметрии равен $Sk = 0$, а коэффициент эксцесса – $Ex = -6/5$.

При нормальном распределении, где плотность распределения имеет вид $f(l_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(l-m)^2}{2\sigma^2}\right)$, математическое ожидание мощности слоя аргиллита $M[l_m] = m = 0.25$ м, а среднеквадратическое отклонение, определяемое правилом 3-х сигм на возможных значениях толщины слоя аргиллита, а именно, $[l_{\min} = m - 3\sigma \leq l_m \leq l_{\max} = m + 3\sigma]$, будет равно $\sigma[l_m] = 0.05/3$ м. При этом коэффициент асимметрии равен и эксцесса равны $Sk = 0$, $Ex = 0$, соответственно.

В случае же закона распределения Вейбулла плотность распределения мощности алевролита описывается функцией $f(r) = \frac{p}{\lambda} \left(\frac{r-\mu}{\lambda}\right)^{p-1} \exp\left(-\frac{r-\mu}{\lambda}\right)^p$, а сама функция распределения имеет вид $F(r) = 1 - \exp\left(-\frac{r-\mu}{\lambda}\right)^p$. Здесь $\mu = l_{\min}$ – параметр сдвига, p – параметр формы кривой распределения, λ – параметр масштаба. Параметры p и λ находились из решения нелинейной системы уравнений, определяемой средним значением толщины слоя алевролита и модой, а именно

$$\begin{cases} M[l] = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) = (l_{\max} - l_{\min})/2 = 0.25 \\ F(l) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\lambda(\ln 2)^{1/p} - \mu}{\lambda}\right)^p\right) = 0.5 \end{cases} \quad (30)$$

В результате решения системы (30) были получены следующие значения параметров распределения Вейбулла: $p = 0.277$, $\lambda = 1.492$.

При расчёте эффективного тензора жёсткости в Задаче 3 использовался равномерный закон распределения мощности слоя-включения, а в Задаче 4 (метод Монте-Карло) нормальный закон распределения.

Значения деформационных характеристик песчаника и аргиллита примем следующими: модуль общей деформации $E_s = 6000$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu_s = 0.15$ у песчаника, и, соответственно, модуль общей деформации $E_m = 800$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu_m = 0.15$ у алевролита. Такие значения характеристик имеют слоистые горные породы, залегающие в основании плотины на р. Белая (Агидель), где по результатам полевых испытаний модуль общей деформации поперёк напластования принимался равным $E_1 = E_{\perp} = 2453$ МПа.

Результаты расчётов максимальных и минимальных возможных значений компонентов эффективного тензора жёсткости слоистой среды, представлены в таблице 1, а компонентов эффективного тензора жёсткости слоистой среды и их вероятностные характеристики – в таблице 2.

Таблица 1.

Максимальные и минимальные значения компонентов эффективного тензора жёсткости.

	\hat{c}_{1111} , МПа	\hat{c}_{2222} , МПа	\hat{c}_{1122} , МПа	\hat{c}_{2233} , МПа	$\hat{c}_{1212} = G_{\perp}$, МПа
max	2904	5261	512.4	866.1	1196
min	2285	4758	403.2	774.2	940.8

Таблица 2.

Значения компонентов эффективного тензора жёсткости.

№ задачи	Вероятностные параметры	\hat{c}_{1111} , МПа	\hat{c}_{2222} , МПа	\hat{c}_{1122} , МПа	\hat{c}_{2233} , МПа	$\hat{c}_{1212} = G_{\perp}$, МПа
1	M	2557	5009	451.3	819.0	1053
2.1	M	2572	5011	454.0	819.8	1059
	σ	178.3	145.4	31.47	26.52	73.43
	Sk	0.138	-0.018	0.138	0.010	0.138
	Ex	-1.197	-1.220	-1.197	-1.219	-1.197
2.2	M	2558	5006	451.5	818.7	1053
	σ	99.97	82.56	17.54	15.03	41.16
	Sk	0.07	-0.149	0.070	-0.110	0.07
	Ex	-0.05	-0.035	-0.05	-0.046	-0.05
2.3	M	2590	5025	457.1	822.4	1067
	σ	184.7	149.6	32.62	27.33	76.12
	Sk	0.042	-0.098	0.042	-0.073	0.042
	Ex	-1.331	-1.312	-1.331	-1.318	-1.331
3	M	2814	5017	496.6	827.0	1159
4	M	2560	5010	451.8	819.3	1054
	σ	52.33	42.96	9.234	7.829	21.55
	Sk	0.161	0.041	0.161	0.062	0.161
	Ex	0.063	0.027	0.063	0.030	0.063

Из таблицы 2 видно, что соответствующие средние значения эффективного тензора жесткости, полученные расчетом с использованием вышеописанных 4-х методов оценки рассматриваемой слоистой среды достаточно близки. Максимальное расхождение между ними не превышало 10%. Следует отметить, что максимальное расхождение наблюдалось со значениями, полученными по 3-у методу, где эффективные характеристики определялись с использованием функциональной зависимости, описывающей усредненное значение изменения тензора жесткости на ячейке. Между другими методами расхождение значений не превышало 3%.

Также из таблицы 2 видно, что из трех рассмотренных функций распределения мощности слоёв минимальный разброс относительно среднего значения эффективного тензора жёсткости наблюдался в случае нормального распределения мощности слоя. Расхождения возможных значений соответствующих эффективных характеристик при этом не превышали 10% при условии, что мощность слоя относительно среднего его значения лежала в пределах 3-х σ .

Из таблицы 2 также следует, что значения эффективных компонентов тензора жёсткости, полученные расчетом по среднему значению мощности слоя

и в случае, когда мощность слоя подчинялась нормальному закону распределения, были практически идентичными. Также отметим, что применение метода Монте-Карло не позволило достичь приемлемой точности определения среднеквадратического отклонения компонентов эффективного тензора жёсткости от их среднего значения, даже при 1000-е испытаний. Ещё хуже обстояло дело с определением асимметрии и эксцесса. Это и следовало ожидать, т.к. в методе Монте-Карло точность определения моментов с повышением их порядка уменьшается.

Сравнение модуля общей деформации слоистого основания Иштугановского гидроузла на р. Белая, полученного по результатам полевых испытаний с результатами, полученными расчётным путём с пересчетом по значениям эффективного тензора жёсткости (таблица 2), представлены в таблице 3.

Таблица 3.

Значения модуля общей деформации ($E_1 = E_{\perp}$, МПа) слоистой среды поперек напластования (р. Белая)

Полевые испытания	Расчетные варианты					
	1	2.1	2.2	2.3	3	4
2453	2487	2501	2488	2519	2730	2490

Из этой таблицы следует, что лучше всего результатам экспериментальных определений соответствуют значения, полученные расчетом по среднему значению мощности слоя и в случае, когда величина мощности слоя подчинялась нормальному закону распределения. При этом расхождение в значениях было менее 1.51%.

6. ПРЕДСТАВИТЕЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ОБЪЕМА И ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ СЛОИСТОГО МАТЕРИАЛА

Представительный элемент объема слоистой среды строится последовательным наращиванием ячеек со случайным размером мощности слоя, который определялся с использованием генераторов псевдослучайных чисел. При этом для каждого пакета, состоящего из набора ячеек, по формулам (29) определяются тензоры жёсткости. Далее за представительный элемент объема принимается объём пакета слоёв, состоящий из минимального набора ячеек, для которого разница в значениях компонентов тензора жёсткости по сравнению с предыдущим пакетом слоёв меньше необходимой заданной точности (обычно задаётся в %%), которая определяется решаемой задачей.

В рассматриваемых в статье случаях использовались генераторы псевдослучайных чисел с равномерным, нормальным распределениями и распределением Вейбулла.

Были проведены расчёты, где пакет слоёв наращивался до тех пор, пока определяемые на них значения тензора жёсткости практически не менялись. Результаты этих расчётов представлены в таблице 4.

Из сравнения значений компонентов эффективных тензоров жёсткости, полученных расчетом при решении задач 1 и 2.1-2.3, представленных в таблице 2 с соответствующими значениями из таблицы 4 видно, что полученные значения идентичны. Это говорит о возможной применимости предложенного метода оценки эффективного тензора жёсткости для случая, когда размер включения в ячейке принимает случайные значения.

Таблица 4.

Расчётные значения компонентов эффективных тензоров жесткости.

Закон распределения	C1111	C2222	C1122	C2233	C1212
Равномерный	2563	5013	452,3	819,9	1055
Нормальный	2557	5008	451.2	818.9	1053
Вейбулла	2598	5039	458.4	824.7	1070

Далее, если ограничится точностью 3%, то за размер представительного элемента объёма в рассматриваемых случаях можно будет принять: для равномерного закона распределения 4 ячейки, для нормального закона распределения 3 ячейки, для закона Вейбулла 10 ячеек.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены четыре метода оценки эффективных характеристик деформационных свойств композитных материалов с периодическим расположением центров включений и случайными значениями их радиусов, т.е. четыре метода сведения композитных материалов к эквивалентным однородным по деформируемости материалам.

Из сравнения результатов представленных в таблицах 2-4 следует вывод о применимости предложенного вероятностного подхода к определению эффективного тензора жёсткости на ячейке периодичности. Такой подход позволяет получать не только средние значения (эффективный тензор жёсткости), но и три основных центральных момента – со 2-го по 4-й порядок, характеризующие случайную природу эффективного тензора жёсткости.

Отметим также, что методика, представленная в задаче 3, дает оценку сверху для эффективных механических характеристик.

Также следует отметить, что метод Монте-Карло не позволил достичь приемлемой точности определения среднеквадратического отклонения компонентов эффективного тензора жёсткости от их среднего значения, даже при 1000-е испытаний. Ещё хуже обстоит дело с определением асимметрии и эксцесса следовало ожидать, т.к. в методе Монте-Карло точность определения моментов с повышением их порядка уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А.Н. *Сведение уравнения теории упругости со случайными коэффициентами на области с периодической структурой к усредненному уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами. Эффективный тензор жесткости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №3. – С.309-322.
2. Козлов С.М. *Осреднение дифференциальных операторов с почти-периодическими быстро осциллирующими коэффициентами* // Матем. сб. – 1978. – Т.107(149). – №2(10). – С.199-217.
3. Козлов С.М. *Осреднение случайных структур* // Доклады АН СССР. – 1978. – Т.241. – №5. – С.1016-1019.
4. Козлов С.М. *Проводимость двумерных случайных сред* // УМН. – 1979. – Т.34.

- №4(208). – С.193-194.
5. Козлов С.М. *Осреднение случайных операторов* // Матем. сб. – 1979. – Т.109(151). – №2(6). – С.188-202.
 6. Клепцына М.Л., Пятницкий А.Л. *Усреднение случайной нестационарной задачи конвекции-диффузии* // УМН. – 2002. – Т.57. – №4(346). – С.95-118.
 7. Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. – М.: Мир, 1982. – 336 с.
 8. Паньков А.А. *Статистическая механика пьезокомпозитов*. – Пермь: Издательство Пермского государственного технического университета, 2009. – 480 с.
 9. Паньков А.А. *Механика пьезокомпозитов. Электро- и магнитоупругость неоднородных сред*. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 476 с.
 10. Eshelby J.D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems* // Proc. R.Soc. Lond. A. – 1957. – Vol.241. – Pp.376-396.
 11. Frisch U. *Wave Propagation in Random Media* / In book: Probabilistic Methods in Applied Mathematics. Vol.1. – New York, Academic Press, 1968. Pp.75-198.
 12. Kleptsyna M., Piatnitski A., Popier A. *Homogenization of random parabolic operators. Diffusion approximation* // Stochastic Processes and their Applications. – 2014. – 25 p.
 13. Mohammed M., Sango M. *Homogenization of Linear Hyperbolic Stochastic Partial Differential Equation with Rapidly Oscillating Coefficients: The Two Scale Convergence Method* // Asymptotic Anal. – 2015. – Vol.91. – No.3-4. – P.341-371.
 14. Wei Wang, Daomin Cao, Jinqiao Duan. *Effective Macroscopic Dynamics of Stochastic Partial Differential Equations in Perforated Domains* // SIAM J. Math. Anal. – 2007. – Vol.38. – No.5. – 1508.
 15. Беран М.Дж. *Применение статистических теорий для определения тепловых, электрических и магнитных свойств неоднородных материалов* / В книге: Композиционные материалы. Т.2. Механика композиционных материалов. – М.: Мир, 1978. – 568 с.
 16. Беляев А.Ю. *Усреднение в задачах теории фильтрации*. – М.: Наука, 2004. – 200 с.
 17. Бахвалов Н.С. *Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами* // Доклады АН СССР. – 1975. – Т.221. – №3. – С.516-519.
 18. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
 19. Соболев И.М. *Метод Монте-Карло*. – М.: Наука, 1968. – 64 с.
 20. Власов А.Н., Мерзляков В.П. *Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород*. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.
 21. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. – М.: Издательство Московского университета, 1984. – 336 с.

REFERENCES

1. Vlasov A.N. *Svedenie uravneniya teorii uprugosti so sluchajnymi koehffitsientami na oblasti s periodicheskoj strukturoj k usrednennomu uravneniyu teorii uprugosti s postoyannymi koehffitsientami. Ehffektivnyj tenzor zhestkosti [Reduction of the equation of elasticity theory with random coefficients on a periodical position of centers of includes with a random radius to the average equation with*

- constant coefficients. Effective stiffness tensor*]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2021, Vol.27, No.3, Pp.309-322.
2. Kozlov S.M. *Averaging differential operators with almost periodic, rapidly oscillating coefficients*. Math. USSR-Sb., 1979, Vol.35, No.4, Pp.481-498.
 3. Kozlov S.M. *Osrednenie sluchajnykh struktur [Averaging of random structures]*. Doklady AN SSSR, 1978, Vol.241, No.5, Pp.1016-1019.
 4. Kozlov M. *Conductivity of two-dimensional random media*. Russian Math. Surveys, 1979, Vol.34, No.4, Pp.168-169.
 5. Kozlov S.M. *Averaging of random operators*. Math. USSR-Sb., 1980, Vol.37, No.2, Pp.167-180.
 6. Klepcyna M.L., Pyatniczkij A.L. *Homogenization of a random non-stationary convection-diffusion problem*. Russian Mathematical Surveys, 2002, Vol.57, No.4, Pp.729-751.
 7. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, Wiley, 1979, 348 p.
 8. Pan'kov A.A. *Statisticheskaya mekhanika p'ezokompozitov [Statistical mechanics of piezocomposites]*. Perm', Izdatel'stvo Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2009, 480 p.
 9. Pan'kov A.A. *Mekhanika p'ezokompozitov. Ehlektro- i magnitouprugost' neodnorodnykh sred [Mechanics of piezocomposites. Electro-and magnetoelasticity of inhomogeneous media]*. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011, 476 p.
 10. Eshelby J.D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems*. Proc. R.Soc. Lond. A, 1957, Vol.241, Pp.376-396.
 11. Frisch U. *Wave Propagation in Random Media*. Probabilistic Methods in Applied Mathematics, Vol.1, New York, Academic Press, 1968. Pp.75-198.
 12. Kleptsyna M., Piatnitski A., Popier A. *Homogenization of random parabolic operators. Diffusion approximation*. Stochastic Processes and their Applications, 2014, 25 p.
 13. Mohammed M., Sango M. *Homogenization of Linear Hyperbolic Stochastic Partial Differential Equation with Rapidly Oscillating Coefficients: The Two Scale Convergence Method*. Asymptotic Anal., 2015, Vol.91, No.3-4, Pp.341-371.
 14. Wei Wang, Daomin Cao, Jinqiao Duan. *Effective Macroscopic Dynamics of Stochastic Partial Differential Equations in Perforated Domains*. SIAM J. Math. Anal., 2007, Vol.38, No.5, 1508.
 15. Beran M.Dzh. *Primenenie statisticheskikh teorij dlya opredeleniya teplovykh, ehlektricheskikh i magnitnykh svojstv neodnorodnykh materialov [Application of statistical theories to determine thermal, electrical and magnetic properties of inhomogeneous materials]*. V knige: Kompozitsionnye materialy. T.2. Mekhanika kompozitsionnykh materialov. Moskva, Mir, 1978, 568 p.
 16. Belyaev A.Yu. *Usrednenie v zadachakh teorii fil'tratsii [Homogenization in the problems of groundwater flows]*. Moskva, Nauka, 2004, 200 p.
 17. Bakhvalov N.S. *Osrednenie differentsial'nykh uravnenij s chastnymi proizvodnymi s bystro ostsiliruyushhimi koehffitsientami [Averaging of partial differential equations with rapidly oscillating coefficients]*. Doklady AN SSSR, 1975, Vol.221, No.3, Pp.516-519.
 18. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh [Averaging of Processes in Periodic Media]*. Moskva, Nauka, 1984, 352 p.
 19. Sobol' I.M. *Metod Monte-Karlo [The Monte-Carlo method]*. Moskva, Nauka, 1968, 64 p.

20. Vlasov A.N., Merzliakov V.P. *Usrednenie deformatsionnykh i prochnostnykh svoystv v mekhanike skal'nykh porod [Homogenization of deformation and strength properties in rock mechanics]*. Moskva, Izdatel'stvo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2009, 208 p.
21. Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1984, 336 p.

Поступила в редакцию 5 сентября 2023 года.

Сведения об авторах:

Власов Александр Николаевич – д.т.н., зав. отд., дир., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: bah1955@ya.ru

Власов Даниил Александрович – к.т.н., гл. спец., ООО «Сигма Тау», г. Москва, Россия; e-mail: vlasov.daniil1944@gmail.com

Сорокин Георгий Сергеевич – асп., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: gersorokin@gmail.com

Карнет Юлия Николаевна – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: iam@iam.ras.ru