



ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДЛЯ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА*

Козел А.Г.

*Белорусский государственный университет транспорта,
г. Гомель, Республика Беларусь*

АННОТАЦИЯ

Исследован изгиб упругой трехслойной круговой пластины, связанной с двухпараметрическим основанием Пастернака, под действием произвольной осесимметричной нагрузки. Постановка задачи и её решение проводится в цилиндрической системе координат, связанной с срединной плоскостью заполнителя. Для описания кинематики несимметричного по толщине трехслойного пакета введены упрощающие гипотезы. Для тонких несущих слоев пластины используются гипотезы Кирхгофа, согласно которым нормаль остается прямолинейной, перпендикулярной к координатной плоскости и не изменяет свою длину. В легком, не воспринимающем нагрузку в тангенциальном направлении, относительно толстом заполнителе справедлива гипотеза Тимошенко о несжимаемости и прямолинейности деформированной нормали, которая поворачивается на некоторый дополнительный угол. Отсутствие относительного сдвига слоев на контуре пластины обеспечивается установленной жесткой диафрагмой. Краевая задача сведена к определению прогиба пластины, относительного сдвига в заполнителе и радиального перемещения координатной плоскости. Неоднородная система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений равновесия получена с помощью вариационного принципа Лагранжа. Приняты граничные условия шарнирного опирания контура пластины. Для прогиба получено дифференциальное уравнение четвертого порядка, решение которого выписано через функции Бесселя. Относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение выражены через прогиб пластины. Частное аналитическое решение системы уравнений равновесия при произвольной осесимметричной нагрузке получено с помощью ядра Коши. Определены соответствующие граничным условиям константы интегрирования при произвольной осесимметричной нагрузке. Проведен численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния шарнирно опертой трехслойной несимметричной по толщине круговой пластины. Исследована зависимость решения от параметров сжатия и сдвига упругого основания. Выполнен сравнительный анализ результатов при использовании моделей Винклера и Пастернака, показавший существенное влияние сдвиговых свойств основания на деформирование конструкции.

Ключевые слова: трехслойная пластина; упругость; основание Пастернака; осесимметричная нагрузка; ядро Коши

* Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект №Т22М-072).

ON THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM FOR A HINGEDLY SUPPORTED THREE-LAYER PLATE ON PASTERNAK FOUNDATION

Kozel A.G.

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

ABSTRACT

The bending of an elastic three-layer circular plate connected with a two-parameter Pasternak foundation under the action of an arbitrary axisymmetric load is studied. The statement of the problem and its solution is carried out in a cylindrical coordinate system associated with the median plane of the filler. Simplifying hypotheses are introduced to describe the kinematics of a three-layer stack asymmetrical in thickness. For thin carrier layers of the plate, Kirchhoff's hypotheses are used, according to which the normal remains rectilinear, perpendicular to the coordinate plane and does not change its length. In a light, relatively thick filler that does not take a load in the tangential direction, Timoshenko's hypothesis about the incompressibility and straightness of the deformed normal, which rotates through some additional angle, is valid. The absence of a relative shift of the layers on the plate contour is ensured by the installed rigid diaphragm. The boundary value problem is reduced to determining the deflection of the plate, the relative shift in the filler, and the radial displacement of the coordinate plane. An inhomogeneous system of ordinary linear differential equilibrium equations is obtained using the Lagrange variational principle. The relative shear in the core and the radial displacement are expressed in terms of the deflection of the plate. A particular analytical solution of the system of equilibrium equations for an arbitrary axisymmetric load is obtained using the Cauchy kernel. The integration constants corresponding to the boundary conditions are determined for an arbitrary axisymmetric load. A numerical parametric analysis of the stress-strain state of a hinged three-layer circular three-layer plate asymmetrical in thickness is carried out. The dependence of the solution on the compression and shear parameters of the elastic foundation is studied. A comparative analysis of the results using the Winkler and Pasternak models was performed, which showed a significant effect of the shear properties of the base on the deformation of the structure.

Keywords: three-layer plate; elasticity; Pasternak foundation; axisymmetric load; Cauchy kernel

ВВЕДЕНИЕ

Применение композитных материалов в авиастроении, строительстве и технике значительно возросло за последнее время. Благодаря сочетанию различных физических и/или химических свойств компонентов, они обладают большим потенциалом при создании конструкций и деталей, обладающих высокой прочностью, жесткостью и долговечностью при относительно малом весе.

Несмотря на то, что методики расчета композитных материалов и элементов начали разрабатывать ещё в середине прошлого столетия, эта область исследований и сейчас актуальна и продолжает активно развиваться. Большой класс работ посвящен расчету трехслойных композиционных материалов. Трехслойные стержни, пластины и оболочки, в основном, состоят из двух внешних несущих слоев, воспринимающих основную нагрузку, и промежуточного толстого легкого слоя (заполнителя), удерживающего несущие

слои на определенном расстоянии и обеспечивающего совместную работу всего пакета.

Основы теории расчета элементов конструкций из слоистых композиционных материалов изложены в монографиях [1-4]. Решен ряд задач статики и динамики балок, пластин и оболочек при комплексных силовых, тепловых и радиационных воздействиях.

Изгиб упругого трехслойного стержня в температурном поле рассмотрен в работе [5]. Влиянию терморadiационных полей на упругопластические тела посвящена статья [6]. Деформирование трехслойной полосы при нагреве одного внешнего слоя изучено в работе [7].

Задачи о свободных и вынужденных колебаниях трехслойной цилиндрической оболочки, трехслойного стержня и круговой трёхслойной пластины решены в статьях [8-10].

Влияние сжимаемости заполнителя на поперечный изгиб круговых и прямоугольных трехслойных пластин, в том числе с учетом температурных полей, рассмотрено в работах [11,12].

Осесимметричное и неосесимметричное деформирование круговой трехслойной пластины в своей плоскости под действием внешних нагрузок исследовано в статьях [13,14].

Достоинства и недостатки существующих моделей упругого основания, используемых в настоящее время, приведены в статьях [15,16] на примере взаимодействия однослойных прямоугольных пластин с упругими основаниями. Сделан вывод о необходимости применения двухпараметрической модели Пастернака для описания реакции основания. Сопоставление постановок и решений краевых задач с использованием моделей упругого основания Винклера и Пастернака на примере трехслойных круговых пластин выполнено автором в статье [17].

Деформирование однослойных графеновых листов, лежащих на упругом основании Пастернака, в температурном поле рассмотрено в работе [18]. Геометрически нелинейное деформирование функционально-градиентной кольцевой пластины с двумя пьезоэлектрическими слоями на основании Пастернака исследовано в работе [19]. Термосиловой изгиб функционально-градиентных пластин, опирающихся на упругое основание Пастернака, описан в статье [20].

Нелинейные колебания сэндвич-пластин, связанных с двухпараметрическим основанием Пастернака, с учетом теплой среды рассмотрены в статье [21]. Исследованию изгибных волн в пластине, связанной с двухпараметрическим упругим основанием, посвящена работа [22].

Ряд задач изгиба несимметричных по толщине упругих и упругопластических круговых трехслойных пластин, связанных с основанием Пастернака, под действием осесимметричной поперечной равномерно распределенной нагрузки решен автором в работах [23,24], в том числе с учетом температурного воздействия [25,26]. Случай сэндвич-пластины описан в статье [27].

В предлагаемой работе, в отличие от предыдущих публикаций автора, рассмотрен случай изгиба произвольной поперечной осесимметричной нагрузкой упругой круговой трехслойной пластины, при шарнирном опирании её контура, на основании Пастернака.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается изгиб круговой трехслойной пластины под действием поперечной произвольной осесимметричной нагрузки интенсивностью $q=q_0(r)$. Для обеспечения отсутствия относительного сдвига слоев на контуре устанавливается жесткая диафрагма.

При разработке теории расчета необходимо не только учитывать особенности работы конструкции под нагрузкой, но и сводить постановку задачи к достаточно простым разрешающим уравнениям. Получение такой компромиссной теории достигается введением ряда упрощающих гипотез: для несущих слоев пластины используются гипотезы Кирхгофа, для несжимаемого в поперечном направлении легкого толстого заполнителя – модель Тимошенко.

Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя. Задача сводится к определению прогиба пластины $w(r)$, относительного сдвига в заполнителе ψ и радиального перемещения координатной плоскости $u(r)$ (рис.1).

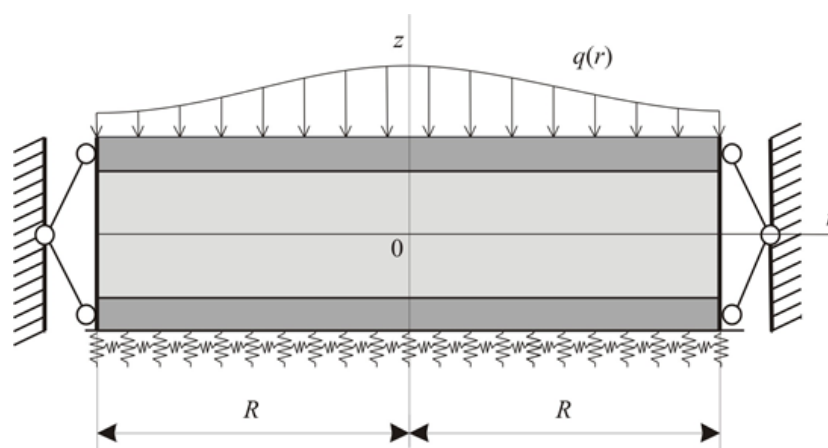


Рис.1.

Для моделирования воздействия распределенной по нижнему несущему слою реакции основания применяется модель основания Пастернака [28]

$$q_r(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (1)$$

где κ_0 , t_f – коэффициенты сжатия и сдвига основания, Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат

$$\Delta w = w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r}.$$

Система уравнения равновесия в перемещениях, с учетом (1), получена автором с помощью вариационного принципа Лагранжа в статье [23]

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w &= -q_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; a_n – коэффициенты, определяемые через модули упругости материалов и геометрические параметры слоев

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c \left(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+ \right), \quad a_3 = h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+, \\ a_4 &= c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right), \\ a_5 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\ a_6 &= h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ K_k^+ &\equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k, \end{aligned}$$

где h_k – толщина k -го слоя ($k=1, 2, 3$; $h_3=2c$), G_k, K_k – модули сдвига и объёмного деформирования; L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r} (r g) \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Краевая задача по определению прогиба рассматриваемой пластины замыкается присоединением к системе дифференциальных уравнений (2) граничных условий на контуре при его шарнирном опирании ($r=R$, R – радиус пластины)

$$u = 0, \quad \psi = 0, \quad w = 0, \quad M_r = 0, \quad (3)$$

где внутренний момент M_r выражается через искомые перемещения

$$\begin{aligned} M_r &= \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \\ &+ \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\ &+ \left[c K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\ &+ \left[c K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\ &- \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\ &- \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}. \end{aligned}$$

Граничные условия (3) служат для определения констант интегрирования, полученных при решении системы линейных дифференциальных уравнений (2).

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

В силу линейности системы дифференциальных уравнений (2), с помощью первых двух уравнений в третьем уравнении обнуляем коэффициенты перед функциями u и ψ . В результате получим радиальное перемещение координатной плоскости и сдвиг в заполнителе через прогиб, который удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \\ \psi &= b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} - t_f D \left(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) + \kappa_0 D w = q_0 D,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – константы интегрирования; коэффициенты

$$b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

В связи с ограниченностью предполагаемого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо положить $C_2 = C_4 = 0$.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее третьему уравнению в системе (4), и введем в нем замену переменной $x = \kappa r$

$$w_{,xxxx} + \frac{2}{x} w_{,xxx} - \frac{1}{x^2} w_{,xx} + \frac{1}{x^3} w_{,x} - 2t_0^2 \left(w_{,xx} + \frac{1}{r} w_{,x} \right) + w = 0, \quad (5)$$

где $\kappa^4 = \kappa_0 D$, $2t_0^2 = t_{f1}/\kappa^2$, $t_{f1} = t_f D$.

Подробное решение уравнения (5) расписано автором в статье [23]

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a}x) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}}x) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x) + w_p, \quad (6)$$

где $J_0(\sqrt{a}x)$ и $J_0(\sqrt{\bar{a}}x)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, комплексных аргументов $\sqrt{a}x$ и $\sqrt{\bar{a}}x$; $H_0^{(1)}(\sqrt{a}x)$ и $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов; $a = -t_0^2 + i\sqrt{1 - (t_0^2)^2}$, $\bar{a} = -t_0^2 - i\sqrt{1 - (t_0^2)^2}$ – корни характеристического уравнения, полученные в [23]; w_p – частное решение рассматриваемого уравнения.

Учитывая, что прогиб в центре пластины должен быть конечным, а функции Ханкеля $H_0^{(1)}(\sqrt{a}x)$ и $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)$ в начале координат уходят в бесконечность, то в решении (6) для сплошных пластин необходимо положить $C_6 = C_8 = 0$.

Полное решение поставленной задачи выпишем в общем виде

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r, \\ \psi &= b_2 w_{,r} + C_3 r, \\ w &= C_5 J_0(\sqrt{a}\kappa r) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa r) + w_p. \end{aligned} \quad (7)$$

Общее решение (7) можно использовать для исследования любого случая симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины, при опирании

её на упругое основание. При этом конкретная задача сводится к определению постоянных интегрирования C_1, C_3, C_5, C_7 из соответствующих граничных условий и условий равновесия пластины.

3. СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ

Частное решение w_p дифференциального уравнения (5), входящее в (6), можно построить, используя ядро Коши [29, с.122]. В этом случае его можно представить в виде

$$w_p = \int_0^r K(r, s) q_1(s) ds, \quad (8)$$

где $q_1 = q_0 D$ – правая часть третьего уравнения системы (4), $K(r, s)$ – ядро Коши.

Ядро Коши вычисляется через фундаментальные решения

$$K(r, s) = B_1^{(1)}(s) J_0(\sqrt{a} \kappa r) + B_2^{(1)}(s) H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r) + \\ + B_3^{(1)}(s) J_0(\sqrt{a} \kappa r) + B_4^{(1)}(s) H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa r), \quad (9)$$

Функции $B_i^{(1)}(s)$ – являются решением следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} B_1^{(1)} J_0(\sqrt{a} \kappa s) + B_2^{(1)} H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa s) + B_3^{(1)} J_0(\sqrt{a} \kappa s) + B_4^{(1)} H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa s) = 0, \\ B_1^{(1)} J_0'(\sqrt{a} \kappa s) + B_2^{(1)} H_0^{(1)'}(\sqrt{a} \kappa s) + B_3^{(1)} J_0'(\sqrt{a} \kappa s) + B_4^{(1)} H_0^{(2)'}(\sqrt{a} \kappa s) = 0, \\ B_1^{(1)} J_0''(\sqrt{a} \kappa s) + B_2^{(1)} H_0^{(1)''}(\sqrt{a} \kappa s) + B_3^{(1)} J_0''(\sqrt{a} \kappa s) + B_4^{(1)} H_0^{(2)''}(\sqrt{a} \kappa s) = 0, \\ B_1^{(1)} J_0'''(\sqrt{a} \kappa s) + B_2^{(1)} H_0^{(1)'''}(\sqrt{a} \kappa s) + B_3^{(1)} J_0'''(\sqrt{a} \kappa s) + B_4^{(1)} H_0^{(2)'''}(\sqrt{a} \kappa s) = 1, \end{cases} \quad (10)$$

где операции дифференцирования по параметру s обозначены штрихами.

Производные функций, входящих в систему (10), будут

$$J_0'(\sqrt{a} \kappa s) = -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa s),$$

$$J_0''(\sqrt{a} \kappa s) = a \kappa^2 \left[\frac{J_1(\sqrt{a} \kappa s)}{s \sqrt{a} \kappa} - J_0(\sqrt{a} \kappa s) \right],$$

$$J_0'''(\sqrt{a} \kappa s) = a \kappa^2 \left[\sqrt{a} \kappa J_1(\sqrt{a} \kappa s) + \frac{J_0(\sqrt{a} \kappa s) - \frac{J_1(\sqrt{a} \kappa s)}{\sqrt{a} \kappa s}}{s} - \frac{J_1(\sqrt{a} \kappa s)}{\sqrt{a} \kappa s^2} \right],$$

$$J_0'(\sqrt{a} \kappa s) = -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa s),$$

$$J_0''(\sqrt{a} \kappa s) = a \kappa^2 \left[\frac{J_1(\sqrt{a} \kappa s)}{s \sqrt{a} \kappa} - J_0(\sqrt{a} \kappa s) \right],$$

$$\begin{aligned}
 J_0'''(\sqrt{a}\kappa s) &= \bar{a}\kappa^2 \left[\sqrt{a}\kappa J_1(\sqrt{a}\kappa s) + \frac{J_0(\sqrt{a}\kappa s) - \frac{J_1(\sqrt{a}\kappa s)}{\sqrt{a}\kappa s}}{s} - \frac{J_1(\sqrt{a}\kappa s)}{\sqrt{a}\kappa s^2} \right], \\
 H_0^{(1)'}(\sqrt{a}\kappa s) &= -\kappa\sqrt{a}H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa s), \\
 H_0^{(1)''}(\sqrt{a}\kappa s) &= a\kappa^2 \left[\frac{H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa s)}{s\sqrt{a}\kappa} - H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa s) \right], \\
 H_0^{(1)'''}(\sqrt{a}\kappa s) &= a\kappa^2 \left[\sqrt{a}\kappa H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa s) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa s) - \frac{H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa s)}{\sqrt{a}\kappa s}}{s} - \frac{H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa s)}{\sqrt{a}\kappa s^2} \right], \\
 H_0^{(2)'}(\sqrt{a}\kappa s) &= -\kappa\sqrt{a}H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa s), \\
 H_0^{(2)''}(\sqrt{a}\kappa s) &= \bar{a}\kappa^2 \left[\frac{H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa s)}{s\sqrt{a}\kappa} - H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa s) \right], \\
 H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}\kappa s) &= \bar{a}\kappa^2 \left[\sqrt{a}\kappa H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa s) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa s) - \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa s)}{\sqrt{a}\kappa s}}{s} - \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa s)}{\sqrt{a}\kappa s^2} \right].
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

В результате, выражения для функций, составляющих ядро Коши, можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 B_1^{(1)}(s) &= \frac{W_1^{(1)}(s)}{W^{(1)}(s)}, \quad B_2^{(1)}(s) = \frac{W_2^{(1)}(s)}{W^{(1)}(s)}, \\
 B_3^{(1)}(s) &= \frac{W_3^{(1)}(s)}{W^{(1)}(s)}, \quad B_4^{(1)}(s) = \frac{W_4^{(1)}(s)}{W^{(1)}(s)},
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

где определители выражаются через функции Бесселя и их производные (11)

$$W^{(1)}(s) = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a}\kappa s) & H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa s) & J_0(\sqrt{a}\kappa s) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa s) \\ J_0'(\sqrt{a}\kappa s) & H_0^{(1)'}(\sqrt{a}\kappa s) & J_0'(\sqrt{a}\kappa s) & H_0^{(2)'}(\sqrt{a}\kappa s) \\ J_0''(\sqrt{a}\kappa s) & H_0^{(1)''}(\sqrt{a}\kappa s) & J_0''(\sqrt{a}\kappa s) & H_0^{(2)''}(\sqrt{a}\kappa s) \\ J_0'''(\sqrt{a}\kappa s) & H_0^{(1)'''}(\sqrt{a}\kappa s) & J_0'''(\sqrt{a}\kappa s) & H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}\kappa s) \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
W_1^{(1)}(s) &= \begin{vmatrix} 0 & H_0^{(1)}(\sqrt{aks}) & J_0(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}ks) \\ 0 & H_0^{(1)'}(\sqrt{aks}) & J_0'(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'}(\sqrt{a}ks) \\ 0 & H_0^{(1)''}(\sqrt{aks}) & J_0''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)''}(\sqrt{a}ks) \\ 1 & H_0^{(1)'''}(\sqrt{aks}) & J_0'''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}ks) \end{vmatrix}, \\
W_2^{(1)}(s) &= \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{aks}) & 0 & J_0(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}ks) \\ J_0'(\sqrt{aks}) & 0 & J_0'(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'}(\sqrt{a}ks) \\ J_0''(\sqrt{aks}) & 0 & J_0''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)''}(\sqrt{a}ks) \\ J_0'''(\sqrt{aks}) & 1 & J_0'''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}ks) \end{vmatrix}, \\
W_3^{(1)}(s) &= \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{aks}) & H_0^{(1)}(\sqrt{aks}) & 0 & H_0^{(2)}(\sqrt{a}ks) \\ J_0'(\sqrt{aks}) & H_0^{(1)'}(\sqrt{aks}) & 0 & H_0^{(2)'}(\sqrt{a}ks) \\ J_0''(\sqrt{aks}) & H_0^{(1)''}(\sqrt{aks}) & 0 & H_0^{(2)''}(\sqrt{a}ks) \\ J_0'''(\sqrt{aks}) & H_0^{(1)'''}(\sqrt{aks}) & 1 & H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}ks) \end{vmatrix}, \\
W_4^{(1)}(s) &= \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{aks}) & H_0^{(1)}(\sqrt{aks}) & J_0(\sqrt{a}ks) & 0 \\ J_0'(\sqrt{aks}) & H_0^{(1)'}(\sqrt{aks}) & J_0'(\sqrt{a}ks) & 0 \\ J_0''(\sqrt{aks}) & H_0^{(1)''}(\sqrt{aks}) & J_0''(\sqrt{a}ks) & 0 \\ J_0'''(\sqrt{aks}) & H_0^{(1)'''}(\sqrt{aks}) & J_0'''(\sqrt{a}ks) & 1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Частное решение (8) и ядро Коши удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
w_p(0) = w_p'(0) = w_p''(0) = w_p'''(0) = 0, \\
K(s, s) = K'(s, s) = K''(s, s) = 0, \quad K'''(s, s) = 1,
\end{aligned} \tag{13}$$

что в ряде случаев удобно при получении констант интегрирования.

Частное решение (8) удобно еще и тем, что интеграл в нем определенный и включает нагрузку в явном виде, которая не входит при этом в ядро Коши (9). Это позволит в дальнейшем рассматривать осесимметричную нагрузку произвольного вида как равномерно распределенную, так и локально приложенную – круговую, кольцевую, погонную и т.д.

Для определения констант интегрирования систему уравнений (7) подставим в граничные условия (3), получим

$$\begin{aligned}
u(R) = b_1 w_{,r}(R) + C_1 R = 0, \\
\psi(R) = b_2 w_{,r}(R) + C_3 R = 0, \\
w(R) = C_5 J_0(\sqrt{a}kR) + C_7 J_0(\sqrt{a}kR) + w_p(R) = 0, \\
M_r(R) = a_3 u_{,r}(R) + a_5 \psi_{,r}(R) - a_6 w_{,rr}(R) - a_{12} \frac{w_{,r}(R)}{R} = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь при нахождении четвертого уравнения в выражении для $M_r(R)$ (3) использовано условие $u = \psi = 0$ при $r = R$.

Значения производных от радиального перемещения и относительного сдвига на контуре $u_{,r}(R)$, $\psi_{,r}(R)$, входящие в четвертое уравнение системы (14), выразим через производные от прогиба с помощью первых двух соотношений из систем (7) и (14). В результате

$$\begin{aligned} u_{,r}(R) &= b_1 w_{,rr}(R) + C_1 = b_1 \left[w_{,rr}(R) - \frac{w_{,r}(R)}{R} \right], \\ \psi_{,r}(R) &= b_2 w_{,rr}(R) + C_3 = b_2 \left[w_{,rr}(R) - \frac{w_{,r}(R)}{R} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Значение первой производной от прогиба на контуре пластины имеет вид

$$\begin{aligned} w_{,r}(R) &= -\kappa \left[\sqrt{a} C_5 J_1(\sqrt{a\kappa R}) + \sqrt{\bar{a}} C_7 J_1(\sqrt{\bar{a}\kappa R}) \right] + w_{p,r}(R) = \\ &= C_5 b_3 + C_7 b_4 + w_{p,r}(R), \end{aligned} \quad (16)$$

где $b_3 = -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a\kappa R})$, $b_4 = -\kappa \sqrt{\bar{a}} J_1(\sqrt{\bar{a}\kappa R})$, $w_{p,r}(R)$ – производная от частного решения (8).

Вторая производная от прогиба на контуре принимает вид

$$\begin{aligned} w_{,rr}(R) &= C_5 \left[\frac{\kappa \sqrt{a}}{r} J_1(\sqrt{a\kappa R}) - a \kappa^2 J_0(\sqrt{a\kappa R}) \right] + \\ &+ C_7 \left[\frac{\kappa \sqrt{\bar{a}}}{r} J_1(\sqrt{\bar{a}\kappa R}) - \bar{a} \kappa^2 J_0(\sqrt{\bar{a}\kappa R}) \right] + w_{p,rr}(R) = \\ &= C_5 b_5 + C_7 b_6 + w_{p,rr}(R), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$b_5 = \frac{\kappa \sqrt{a}}{R} J_1(\sqrt{a\kappa R}) - a \kappa^2 J_0(\sqrt{a\kappa R}),$$

$$b_6 = \frac{\kappa \sqrt{\bar{a}}}{R} J_1(\sqrt{\bar{a}\kappa R}) - \bar{a} \kappa^2 J_0(\sqrt{\bar{a}\kappa R}),$$

$$w_{p,rr}(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\int_0^r \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} q_1(s) ds \right] = \int_0^r \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r^2} q_1(s) ds + \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} q_1(s) \Big|_{s=r}.$$

Учитывая условия (13), получаем вторую производную от частного решения (8) и ее значение на контуре

$$\begin{aligned} w_{p,rr}(r) &= \int_0^r \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r^2} q_1(s) ds, \\ w_{p,rr}(R) &= \int_0^R \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r^2} q_1(s) ds \Big|_{r=R}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив выражения (15)-(18) в четвертое уравнение системы (14), получим

$$C_5 \left((a_3 b_1 + a_5 b_2) \left(b_5 + \frac{b_3}{R} \right) - b_5 a_6 - \frac{a_{12}}{R} b_3 \right) + C_7 \left((a_3 b_1 + a_5 b_2) \left(b_6 + \frac{b_4}{R} \right) - b_6 a_6 - \frac{a_{12}}{R} b_4 \right) = w_p^*(R)$$

или

$$C_5 b_7 + C_7 b_8 = w_p^*(R), \quad (19)$$

где

$$b_7 = (a_3 b_1 + a_5 b_2) \left(b_5 + \frac{b_3}{R} \right) - b_5 a_6 - \frac{a_{12}}{R} b_3,$$

$$b_8 = (a_3 b_1 + a_5 b_2) \left(b_6 + \frac{b_4}{R} \right) - b_6 a_6 - \frac{a_{12}}{R} b_4,$$

$$w_p^*(R) = \frac{w_{p,r}(R)}{R} (a_{12} - a_3 b_1 - a_5 b_2) + w_{p,rr}(R) (a_6 - a_3 b_1 - a_5 b_2).$$

Добавив к итоговому уравнению (19) третье из системы уравнений (14), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения C_5 , C_7

$$\begin{aligned} C_5 b_7 + C_7 b_8 &= w_p^*(R), \\ C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa R) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa R) &= -w_p(R). \end{aligned} \quad (20)$$

В результате решения систем (14) и (20) имеем следующие константы интегрирования

$$\begin{aligned} C_1 &= -b_1 \frac{w_{,r}(R)}{R}, \quad C_3 = -b_2 \frac{w_{,r}(R)}{R}, \quad C_5 = \frac{b_8 w_p(R) + w_p^*(R) J_0(\sqrt{a} \kappa R)}{J_0(\sqrt{a} \kappa R) b_7 - J_0(\sqrt{a} \kappa R) b_8}, \\ C_7 &= \frac{w_p(R) b_7 + w_p^*(R) J_0(\sqrt{a} \kappa R)}{J_0(\sqrt{a} \kappa R) b_8 - J_0(\sqrt{a} \kappa R) b_7}. \end{aligned} \quad (21)$$

Решение (7) с константами интегрирования (21) описывает перемещения в упругой круговой трехслойной пластине с шарнирно опертым контуром, связанной с двухпараметрическим основанием Пастернака.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Численные результаты получены с помощью системы компьютерной алгебры Maple. Исследовано деформирование шарнирно опертой пластины единичного радиуса $R = 1$ м. Величина интенсивности поверхностной равномерно распределенной нагрузки взята $q_0 = -1$ МПа. Механические характеристики материалов заимствованы из [3]: сплав Д16-Т для внешних несущих слоев – $G = 0,267 \cdot 10^5$ МПа, $K = 0,8 \cdot 10^5$ МПа; фторопласта-4 для срединного слоя – $G_3 = 90$ МПа, $K_3 = 345$ МПа. Приняты следующие толщины слоёв пластины: $h_1 = 0,02$ м, $h_2 = 0,06$ м, $h_3 = 0,4$ м. Коэффициент сжатия основания принят постоянным, равным $\kappa_0 = 100$ МПа/м, что соответствует грунту песчано-глинистому, искусственно уплотненному [30]. Значения коэффициентов сдвига принимались согласно рекомендациям Пастернака $t_f / \kappa_0 < 1$ м² [28].

На рис.2а-в показано влияние учета коэффициента сдвига основания t_f , МПа·м, на прогиб w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной плоскости u вдоль радиуса пластины: 1 – $t_f = 0$, 2 – $t_f = 1$, 3 – $t_f = 10$. Решение при отсутствии коэффициента сдвига $t_f = 0$ (кривая 1) соответствует модели основания Винклера. Сравнительные расчеты показали преимущество моделей, не смотря на различный аналитический вид решений (в случае модели Винклера решение получено в функциях Кельвина [17]).

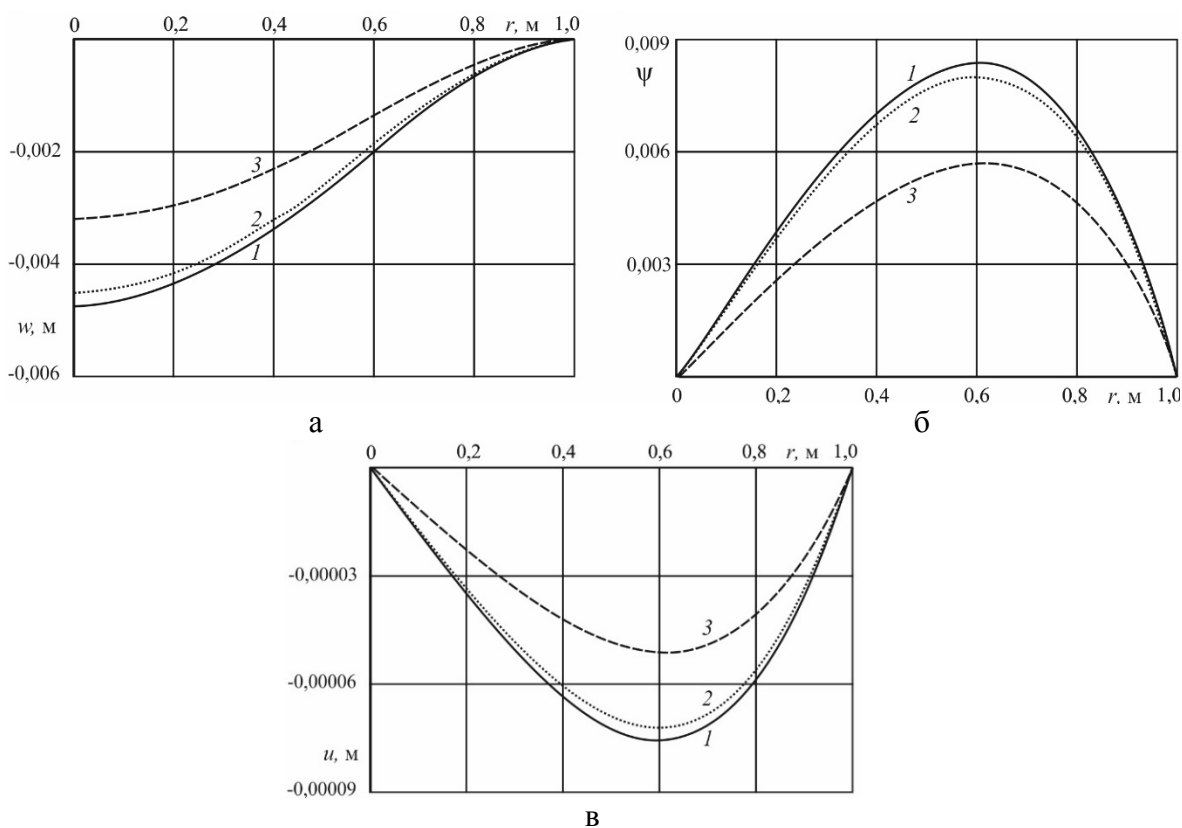


Рис.2.

При значениях коэффициента сдвига $t_f < 1$ МПа·м изменения искомых величин не существенное и в инженерных расчетах можно не учитывать. С ростом коэффициента t_f до 1 МПа·м (кривая 2) уменьшаются максимумы перемещений на 4,4%, при $t_f = 10$ МПа·м (кривая 3) – на 32,5%. В силу малости значений радиального перемещения не всегда целесообразно проводить его численное исследование.

Рис.3 иллюстрирует изменение радиальных напряжений $\sigma_r(z)$ по толщине рассматриваемой упругой трехслойной пластины с шарнирно опертым контуром на контуре (а) и в центре (б) в зависимости от величины коэффициента сдвига t_f , МПа·м: 1 – $t_f = 0$, 2 – $t_f = 10$. На контуре пластины верхние части несущих слоев растянуты, заполнителя – сжаты, в центре – противоположная картина.

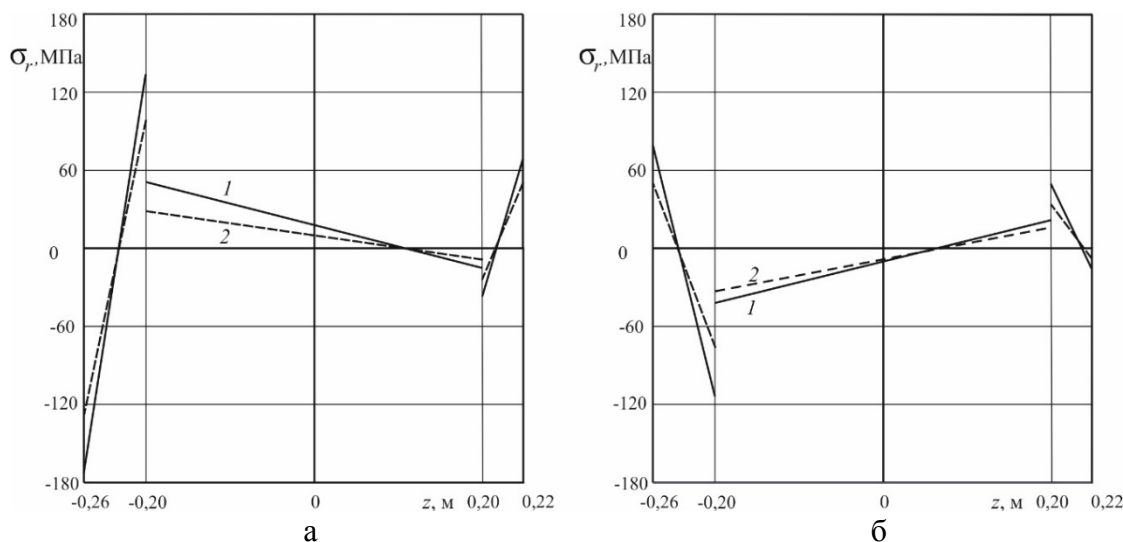


Рис.3.

В склейках слоев напряжения имеют одинаковые знаки, но терпят разрыв из-за различных упругих характеристик материалов слоев. При учете коэффициента сдвига $t_f = 10$ МПа·м напряжения уменьшаются, на контуре пластины до 28,7%, в центре – на 39,2%. Радиальные напряжения в заполнителе визуально увеличены в 100 раз.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Механико-математическая модель, общее и частное решения краевой задачи позволяют исследовать симметричный изгиб трёхслойной круговой пластины при ее взаимодействии с упругим основанием Пастернака. Это дает возможность рассматривать осесимметричную нагрузку произвольного вида как равномерно распределенную, так и локально приложенную – круговую, кольцевую, погонную и т.д. Численное исследование параметров напряженно-деформированного состояния при действии равномерно распределенной нагрузки показало качественную и количественную зависимость перемещений и напряжений от коэффициентов сжатия и сдвига основания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б. *Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузжениях*. – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023 – 381 с.
2. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. – CRC Press, 2003. – 856 p.
3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций*. – М.: Физматлит, 2005. – 576 с.
4. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. – Academic Press, 2016. – 410 p.

5. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Деформирование трехслойного стержня в температурном поле* // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – №1(22). – С.31-35.
6. Pronina P.F., Tushavina O.V., Starovoitov E.I. *Study of the radiation situation in moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects* // Periodic o Tche Quimica. – 2020. – Vol.17. – No.35. – Pp.753-764.
7. Мовчан А.А. *Трехслойная полоса с тонкими внешними слоями из сплава с памятью формы и вязкоупругим внутренним слоем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №4. – С.465-487.
8. Vakhneev S., Starovoitov E. *Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation* // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol.18(4). – Pp.699-704.
9. Леоненко Д.В., Старовойтов Э.И. *Собственные колебания трехслойного стержня на упругом основании* // Прикладная механика. – 2016. – Т.52. – №4. – С.37-46.
10. Маркова М.В. *Вынужденные колебания круговой трёхслойной пластины ступенчато-переменной толщины, побуждаемые ударным воздействием* // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – №3(52). – С.28-36.
11. Захарчук Ю.В. *Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем* // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – №4 (33). – С.53-57.
12. Зеленая А.С. *Цилиндрический изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в температурном поле* // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – №1(38). – С.45-49.
13. Нестерович А.В. *Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости* // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – №3(48). – С.24-29.
14. Старовойтов Э.И., Нестерович А.В. *Неосесимметричное деформирование свободно опертой трехслойной пластины в своей плоскости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – №1(27). – С.17-30.
15. Большаков А.А. *Прямоугольная пластина на двухпараметрическом упругом основании: аналитическое решение* // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2011. – №8(89). – С.128-133.
16. Комлев А.А., Макеев С.А. *Расчет прямоугольных пластин на упругом основании методом конечных разностей* // Динамика систем, механизмов и машин. – 2017. – Т.5. – №1. – С.29-34.
17. Козел А.Г. *Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака* // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – №1(54). – С. 30-37.
18. Zenkour A.M., Sobhy M. *Nonlocal elasticity theory for thermal buckling of nanoplates lying on Winkler–Pasternak elastic substrate medium* // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. – 2013. – Vol.53. – Pp.251-259.
19. Arefi M., Allam M.N.M. *Nonlinear responses of an arbitrary FGP circular plate resting on the Winkler-Pasternak foundation* // Smart Structures and Sestems. – 2015. – Vol.16. – No.1. – Pp.81-100.

20. Boudierba B., Houari M.S.A., Tounsi A. *Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations* // Steel and Composite Structures. – 2013. – Vol.14(1). – Pp.85-104.
21. Li Q., Wu D., Gao W., Tin-Loi F. *Size-dependent instability of organic solar cell resting on Winkler–Pasternak elastic foundation based on the modified strain gradient theory* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2020. – Vol.177. – 105306.
22. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. *Дисперсионные и энергетические характеристики изгибных волн в пластине, лежащей на двухпараметрическом упругом основании* // Акустический журнал. – 2023. – Т.69. – №3. – С.277-283.
23. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. *Изгиб упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №3. – С.392-406.
24. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. *Влияние жесткости основания Пастернака на деформирование круговой трёхслойной пластины* // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2019. – №2. – С.107-114.
25. Козел А.Г. *Термоупругий изгиб круговой трехслойной пластины, связанной с основанием Пастернака* // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – №2(51). – С.31-37.
26. Козел А.Г. *Термоупругопластический изгиб трехслойной круговой пластины на основании Пастернака* // Механика. Исследования и инновации: международный сборник научных трудов. – 2022. – Вып.15. – С.100-108.
27. Козел А.Г. *Нелинейный изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака* // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. – 2020. – Вып.35. – С.106-113.
28. Пастернак П.Л. *Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели*. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 55 с.
29. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. *Курс высшей математики и математической физики. Дифференциальные уравнения*. – М.: Наука, 1980. – 231 с.
30. Саргсян А.Е., Демченко А.Т., Дворянчиков Н.В., Джинчвелашвили Г.А. *Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов: учебник. 2-е изд., испр. и доп.* – М.: Высшая школа, 2000. – 416 с.

REFERENCES

1. Abdusattarov A., Starovojtov E.I., Ruzieva N.B. *Deformirovanie i povrezhdaemost' uprugoplasticheskikh ehlementov konstruksij pri tsiklicheskikh nagruzheniyakh [Deformation and damage of elastoplastic structural elements under cyclic loading]*. Tashkent, "IDEAL PRESS", 2023, 381 p.
2. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. CRC Press, 2003, 856 p.
3. Gorshkov A.G., Starovojtov E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistyykh vyazkouprugoplasticheskikh ehlementov konstruksij [Mechanics of layered viscoelastoplastic structural elements]*. Moskva, Fizmatlit, 2005, 576 p.

4. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. Academic Press, 2016, 410 p.
5. Starovojtov E.I., Leonenko D.V. *Deformirovanie trekhslojnogo sterzhnya v temperaturnom pole [Deformation of a three-layer rod in a temperature field]*. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov, 2013, No.1(22), Pp.31-35.
6. Pronina P.F., Tushavina O.V., Starovoitov E.I. *Study of the radiation situation in moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects*. Periodic o Tche Quimica, 2020, Vol.17, No.35, Pp.753-764.
7. Movchan A.A. *Trekhslojnaya poloska s tonkimi vneshnimi sloyami iz splava s pamyat'yu formy i vyazkouprugim vnutrennim sloem [Three-layer strip with thin outer layers of shape memory alloy and a viscoelastic inner layer]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2022, Vol.28, No.4, Pp.465-487.
8. Vakhneev S., Starovoitov E. *Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation*. Journal of Applied Engineering Science, 2020, No.18(4), Pp.699-704.
9. Leonenko D.V., Starovojtov E.I. *Sobstvennye kolebaniya trekhslojnogo sterzhnya na uprugom osnovanii [Natural vibrations of a three-layer rod on an elastic foundation]*. Prikladnaya mekhanika, 2016, Vol.52, No.4, Pp.37-46.
10. Markova M.V. *Vynuzhdennye kolebaniya krugovoj tryokhslojnoj plastiny stupenchato-peremennoj tolshhiny, pobuzhdaemye udarnym vozdejstviem [Forced vibrations of a circular three-layer plate of stepwise variable thickness, stimulated by impact]*. Problemy fiziki, matematiki i tekhniki, 2022, No.3(52), Pp.28-36.
11. Zaharchuk Yu.V. *Deformirovanie krugovoj trekhslojnoj plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Deformation of a circular three-layer plate with a compressible filler]*. Problemy fiziki, matematiki i tekhniki, 2017, No.4(33), Pp.53-57.
12. Zelenaya A.S. *Tsilindricheskij izgib uprugoplasticheskoy pryamougol'noj trekhslojnoj plastiny so szhimaemym zapolnitelem v temperaturnom pole [Cylindrical bending of an elastoplastic rectangular three-layer plate with a compressible filler in a temperature field]*. Problemy fiziki, matematiki i tekhniki, 2019, No.1(38), Pp.45-49.
13. Nesterovich A.V. *Osesimmetrichnoe nagruzhenie krugloj fizicheski nelinejnoj trekhslojnoj plastiny v svoej ploskosti [Axisymmetric loading of a circular physically nonlinear three-layer plate in its plane]*. Problemy fiziki, matematiki i tekhniki, 2021, No.3(48), Pp.24-29.
14. Starovojtov E.I., Nesterovich A.V. *Neosesimmetrichnoe deformirovanie svobodno opertoj trekhslojnoj plastiny v svoej ploskosti [Non-axisymmetric deformation of a simply supported three-layer plate in its plane]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2021, Vol.27, No.1, Pp.17-30.
15. Bolshakov A.A. *Pryamougol'naya plastina na dvukhparametricheskom uprugom osnovanii: analiticheskoe reshenie [Rectangular plate on a two-parameter elastic foundation: analytical solution]*. Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya, 2011, No.8(89), Pp.128-133.
16. Komlev A.A., Makeev S.A. *Raschet pryamougol'nykh plastin na uprugom osnovanii metodom konechnykh raznostej [Calculation of rectangular plates on an elastic foundation by the finite difference method]*. Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin, 2017, Vol.5, No.1, Pp.29-34.
17. Kozel A.G. *Sravnenie reshenij zadach izgiba trekhslojnykh plastin na osnovaniyakh Vinklera i Pasternaka [Comparison of solutions to problems*

- of bending three-layer plates on Winkler and Pasternak foundation*]. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov, 2021, No.1(54), Pp.30-37.
18. Zenkour A.M., Sobhy M. *Nonlocal elasticity theory for thermal buckling of nanoplates lying on Winkler–Pasternak elastic substrate medium*. Physica E, Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2013, Vol.53, Pp.251-259.
 19. Arefi M., Allam M.N.M. *Nonlinear responses of an arbitrary FGP circular plate resting on the Winkler-Pasternak foundation*. Smart Structures and Sestems, 2015, Vol.16, No.1, Pp.81-100.
 20. Boudierba B., Houari M.S.A., Tounsi A. *Thermomechanical bending response of FGM thick plates rest-ing on Winkler-Pasternak elastic foundations*. Steel and Composite Structures, 2013, Vol.14(1), Pp.85-104.
 21. Li Q., Wu D., Gao W., Tin-Loi F. *Size-dependent instability of organic solar cell resting on Winkler–Pasternak elastic foundation based on the modified strain gradient theory*. International Journal of Mechanical Sciences, 2020, Vol.177, 105306.
 22. Erofeev V.I., Lisenkova E.E. *Dispersionnyye i ehnergeticheskie kharakteristiki izgibnykh voln v plastine, lezhashhej na dvukhparametricheskom uprugom osnovanii [Dispersion and energy characteristics of bending waves in a plate lying on a two-parameter elastic foundation]*. Akusticheskij zhurnal, 2023, Vol.69, No.3, Pp.277-283.
 23. Starovojtov E.I., Kozel A.G. *Izgib uprugoj tryokhslojnoj krugovoj plastiny na osnovanii Pasternaka [Bending of an elastic three-layer round plate on the Pasternak foundation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.3, Pp.392-406.
 24. Starovojtov E.I., Kozel A.G. *Vliyanie zhestkosti osnovaniya Pasternaka na deformirovanie krugovoj tryokhslojnoj plastiny [The influence of the rigidity of Pasternak foundztion on the deformation of a circular three-layer plate]*. Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii, 2019, No.2, Pp.107-114.
 25. Kozel A.G. *Termouprugij izgib krugovoj trekhslojnoj plastiny, svyazannoj s osnovaniem Pasternaka [Thermoelastic bending of a circular three-layer plate connected to the Pasternak foundation]*. Problemy fiziki, matematiki i tekhniki, 2022, No.2(51), Pp.31-37.
 26. Kozel A.G. *Termouprugoplasticheskij izgib trekhslojnoj krugovoj plastiny na osnovanii Pasternaka [Thermoelastic-plastic bending of a three-layer circular plate on Pasternak foundation]*. Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii: mezhdunarodnyj sbornik nauchnykh trudov, 2022, Iss.15, Pp.100-108.
 27. Kozel A.G. *Nelinejnyj izgib sehndvich-plastiny na osnovanii Pasternaka [Nonlinear bending of a sandwich plate on Pasternak foundation]*. Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika: mezhdunarodnyj nauchno-tekhnicheskij sbornik, 2020, Iss.35, Pp.106-113.
 28. Pasternak P.L. *Osnovy novogo metoda raschyota fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshhi dvukh koehffitsientov posteli [Basics of a new method for calculating foundations on an elastic foundation using two bed coefficients]*. Moskva, Gosudarstvennoe izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu i arkhitekture, 1954, 55 p.
 29. Tihonov A.N., Vasileva A.B., Sveshnikov A.G. *Kurs vysshej matematiki i matematicheskoy fiziki. Differentsial'nye uravneniya [Basics of new Course of higher mathematics and mathematical physics. Differential equations.]*. Moskva, Nauka, 1980, 231 p.

30. Sargsyan A.E., Demchenko A.T., Dvoryanchikov N.V., Dzhinchvelashvili G.A. *Stroitel'naya mekhanika. Osnovy teorii s primerami raschetov: uchebnik [Structural mechanics. Basic theory with examples of calculations]*. Moskva, Vysshaya shkola, 2000, 416 p.

Поступила в редакцию 23 октября 2023 года.

Сведения об авторе:

Козел Анастасия Григорьевна – к.ф.-м.н., доц. каф. «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: kostjaschka2009@mail.ru