УДК 539.3
EDN VMAPFK (https://elibrary.ru/vmapfk)
DOI 10.33113/mkmk.ras.2023.29.04.08

О ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРИИ ПЛАСТИН N-ГО ПОРЯДКА К ЗАДАЧАМ О ДИСПЕРСИИ ВОЛН В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ ВОЛНОВОДЕ С ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ*

Жаворонок С.И.[1,2], Курбатов А.С.[1]

[1]*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*
[2]*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Рассмотрено приложение теории пластин N-го порядка к решению задачи о дисперсии нормальных волн в трансверсально-неоднородном волноводе. Модель N-го порядка пластины в рамках вариационного формализма иерархической теории является лагранжевой континуальной системой, определенной на реперной плоскости конфигурационным пространством, являющимся линейной оболочкой множества переменных поля, и функционалом Лагранжа. Переменные поля первого рода являются коэффициентами разложения компонентов пространственного поля вектора перемещения по некоторой биортогональной системе функций безразмерной нормальной к реперной плоскости координаты, образующей базис в пространстве функций, интегрируемых с квадратом. Поверхностная и контурная плотность функционала Лагранжа порождаются редукцией пространственной размерности объемной и граничной плотностей функционала Лагранжа, соответствующие трехмерной вариационной постановки задачи динамики упругого неоднородного тела. Уравнения движения теории N-го порядка являются обобщенными уравнениями Лагранжа второго рода двумерной континуальной системы. На основе теории пластин N-го порядка поставлена задача о дисперсии нормальных волн в плоском трансверсально-неоднородном функционально-градиентном упругом слое со степенным распределением объемных долей структурных составляющих материала и локальным отклонением от степенного распределения (моделью дефекта структуры), заданным функцией с разрывом первой производной. Задача о дисперсии волн сведена к проблеме собственных значений для пары симметрических матриц. Решение задачи построено с использованием в качестве базиса как ортогональных полиномов, так и кусочно-линейных финитных функций типа «разбиение единицы». Показана зависимость дисперсионных кривых распространяющихся мод нормальных волн от наличия дефекта. Исследована сходимость решения по частотам запирания нормальных мод и показано, что применение ортогональных полиномов приводит в задачах о волноводах с локальной неоднородностью к большей скорости сходимости решения спектральной задачи.

Ключевые слова: волны нормальные; материалы функционально-градиентные; дефекты; теория пластин *N*-го порядка; полиномы ортогональные; функции кусочно-линейные; разбиение единицы; частоты фазовые; сходимость

* *Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №22-21-00800).*

ON THE APPLICATION OF THE PLATE THEORY OF N-TH ORDER TO THE PROBLEM OF WAVE DIPERSION IN FUNCTIONALLY GRADED WAVEGUIDE WITH LOCAL HETEROGENEITY

Zhavoronok Sergey I.[1,2], Kurbatov Alexey S.[1]

[1]*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[2]*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

ABSTRACT

Consider the application of the plate theory of N-th order to the problem of dispersion of normal waves in transversely inhomogeneous waveguides. The plate model of N-th order is interpreted within the variational formalism of hierarchical theory as a Lagrangian continuum system defined on the reference plane by a configuration space being a linear capsule of a field variables set, and a Lagrange functional. Field variables of the first kind are defined by the expansion factors of the spatial displacement vector field with respect to some biorthogonal system of functions of dimensionless coordinate normal to the reference plane; this system forms a basis in the space of square integrable functions. The surface and contour densities of the Lagrangian are resultsd by reducing the spatial dimension of the volumetric and boundary densities of the Lagrangian corresponding to the three-dimensional variational formulation of the elastodynamics problem for an inhomogeneous body. The dynamic equations of the N-th order theory are derived as generalized Lagrange equations of the second kind of a two-dimensional continuum system. The problem of normal wave dispersion in a plane transversally inhomogeneous functionally gradient elastic layer with power-law distribution of volume fractions of structural constituents and a local deviation from the power-law distribution (i.e. a model of a structural defect) given by a function with a discontinuity of the first derivative, is formulated on the basis of the plate theory of N-th order. The problem of wave dispersion is reduced to the problem of eigenvalues for a pair of symmetric matrices. The solution of the dispersion problem is constructed using both orthogonal polynomials and piecewise linear finite functions of the partition of unity type as a base system. The dependence of the dispersion curves of the propagating modes of normal waves on the defect presence is shown. The solution convergence with respect to the locking frequencies of normal modes is investigated. It is shown that the use of orthogonal polynomials leads to a higher convergence rate of the solution of the spectral problem in problems of waveguides with local inhomogeneity.

Keywords: normal waves; functionally graded materials; defects; plate theory of Nth order, orthogonal polynomials; finite piecewise-linear functions; partition of unity; phase frequencies; convergence

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое описание дисперсии нормальных волн в тонкостенных неоднородных волноводах опирается на различные подходы [1,2], которые можно условно подразделить на два класса: методы, приводящие задачу о дисперсии к решению некоторого трансцендентного характеристического уравнения, корнями которого являются фазовые частоты $\omega(\kappa)$, зависящие от волнового числа κ, и методы, приводящие дисперсионную задачу к проблеме собственных значений (в общем случае обобщенной) для двух матричных операторов. К первой группе относятся, в первую очередь, различные варианты матричного подхода [3-5] – методы передаточных [6], рассеивающих [7], реверберационных

[8,9] и глобальных матриц [10,11], применимые в том числе в классе задач о дисперсии в неоднородных [12-14] и анизотропных телах [15]. Преимуществом метода является независимость размерности матрицы от числа слоев (реальных либо приближенно моделирующих функционально-градиентный материал – ФГМ), ключевым недостатком – вычислительная неустойчивость, связанная с ростом произведения $\omega h c^{-1}$, где h – толщина слоя, c – скорость распространения волн [16], устраняемая при вычислениях с мантиссой до ~50…1000 десятичных разрядов [17], либо модификацией метода; так, метод реверберационных матриц устойчив в области высоких частот, но неустойчив при низких [9]. Также к данной группе относятся методы на основе разложения неизвестных задачи в степенные ряды по нормальной («толщинной») координаты [18-22]. Общий недостаток методов первой группы – необходимость численного решения трансцендентного характеристического уравнения, связанного с возможностью потери части корней. Ко второй группе относятся методы, основанные на разложении неизвестных (как правило, компонентов вектора перемещения) в обобщенные ряды Фурье по полиномам Лежандра [23-28], или конечно-элементной дискретизации волновода в плоскости, ортогональной направлению распространения волны [29-33]; задача о дисперсии сводится таким образом к обобщенной спектральной задаче, решение которой в большинстве случаев устойчиво и не приводит к потере фазовых частот. Методы на базе разложений Фурье допускают приложение к волноводам со сложными свойствами [26,28], притом обеспечивает повышение точности построения матричных операторов путем аналитического интегрирования при реализации проекционного метода Галеркина [25,26]. Данный подход также обеспечивает вычисление фазовых частот для неоднородных волноводов; для слоистых структур с существенно различными физическими константами слоев, однако, требуется переход к послойному моделированию для исключения эффекта Гиббса при построении собственных форм нормальных волн и распределения напряжений [34,35]. Решение задачи данного класса полуаналитическим методом конечных элементов (ПА МКЭ) [30] показано в работе [33].

Как степенной метод, так и метод рядов Фурье, и метод полуаналитических конечных элементов являются, вообще говоря, приложением различных вариантов общей теории нетонких оболочек, трактуемых, как континуально-дискретные системы [36], к стационарным задачам волновой динамики. В частности, метод степенных рядов может трактоваться как приложение теории оболочек, основанной на разложениях неизвестных в тензорные степенные ряды [36]. С другой стороны, метод рядов Фурье представляет собой приложение к волновым задачам различных вариантов теории оболочек И.Н. Векуа [37-43]. Дальнейшее развитие теории толстостенных оболочек [40] как двумерных континуальных Лагранжевых систем [44-47], основанное на биортогональных разложениях компонентов вектора перемещения, допускает введение не только полиномиальных, но и кусочно-линейных функций типа «разбиение единицы» [48], т.е. переход при постановке задачи о дисперсии волн как к методу ортогональных полиномов [23], так и к методу полуаналитических конечных элементов [31] на базе единого вариационного формализма Лагранжева типа [46]. Сходимость решения задач о дисперсии волн, полученного на базе общей теории оболочек, к точному решению для однородного материала волновода показана в [49] на частотах запирания для полиномиальных, а в [50] – для финитных кусочно-линейных базисных функций. В [51] приведен анализ сходимости форм распространяющихся нормальных волн по норме гильбертова пространства на частотах запирания, а в [52-55] – при различных ненулевых значениях волнового числа. В работах [56,57] описано приложение расширенной теории оболочек как двумерных Лагранжевых систем, обеспечивающей точное удовлетворение краевых условий на лицевых поверхностях, введенных в вариационную формулировку теории в форме связей [58-60]. В [57,61,62] изучена сходимость решений в случае функционально-градиентного волновода при полиномиальных, а в [63] – при финитных кусочно-линейных базисных функциях. В данной работе на базе теории пластин *N*-го порядка построено приближенное решение задачи о дисперсии распространяющихся мод нормальных волн в плоском функционально-градиентном слое с локальным дефектом распределения объемных долей структурных составляющих по толщине, описываемом функцией с разрывной первой производной, и проведен сравнительный анализ сходимости решений на базе ортогональных и конечно-элементных разложений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ДИСПЕРСИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ ВОЛНОВОДЕ НА БАЗЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИН *N*-ГО ПОРЯДКА

1.1. Вариационная формулировка теории пластин *N*-го порядка.

В соответствии с концепцией построения иерархии теорий оболочек и пластин различного порядка [44,45,46,58] на базе Лагранжева вариационного формализма аналитической динамики, распространяемого на континуальные системы в соответствии с [64], модель пластины определена на реперной плоскости S с контуром $\Gamma = \partial S$ и определенной на ней системой координат $\xi^\alpha \in D_\xi \subseteq \mathbb{R}^2$ конфигурационным пространством $\Omega_N = \{u_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)}\}_{k\in[0,N]\cap\mathbb{Z}}$ – линейной оболочкой переменных поля I рода $u_\alpha^{(k)}$, $u_3^{(k)}$, функционалом Лагранжа $\mathrm{L}:\Omega_N \to \mathbb{R}_+$ [46] и (в случае расширенной теории [58-60]) – уравнениями связей $f_\pm^\alpha = 0$, $f_\pm^3 = 0$, следующими из краевых условий на лицевых поверхностях $S_\pm$. Теория *N*-го порядка порождается редукцией размерности трехмерной задачи [37-40,42,43] путем разложения компонентов поля вектора перемещения $\mathbf{u}(\xi^\beta,\zeta,t) = u_\alpha(\xi^\beta,\zeta,t)\mathbf{r}^\alpha(\xi^\beta) + u_3(\xi^\alpha,\zeta,t)\mathbf{n}$ по системе функций $\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)$ безразмерной нормальной координаты $\zeta\in[-1,1]$, образующей базис в пространстве $L^2[-1,1]$

$$
\begin{aligned}
&u_\alpha(\xi^\beta,\zeta,t) = u_\alpha^{(k)}(\xi^\beta,t)\,\mathrm{p}_{(k)}(\zeta) + u_\alpha^N(\xi^\beta,\zeta,t),\\
&u_3(\xi^\beta,\zeta,t) = u_3^{(k)}(\xi^\beta,t)\,\mathrm{p}_{(k)}(\zeta) + u_3^N(\xi^\beta,\zeta,t),\\
&u_\alpha^N, u_3^N \in L^2[-1,1]\setminus\left\{\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)\right\}_{k\in[0,N]\cap\mathbb{Z}}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь и далее $\mathbf{r}_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{r}$ – базисные векторы на S, $\mathbf{r}$ – вектор-радиус, $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial\xi^\alpha$, $\mathbf{n} = (a)^{-1/2}\,\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2$ – единичная нормаль к S, $a = |a_{\alpha\beta}|$, $a_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta$ – ковариантные компоненты метрического тензора; «$\cdot$», «$\wedge$» обозначают скалярное и векторное произведения. В отличие от работ [37-40,42,43], где всюду $\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)$ в (1.1) –

ортогональные полиномы, в [44-46,58] введено разложение по биортогональной системе функций $\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)$, $\mathrm{p}^{(m)}(\zeta)$

$$\left(\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}^{(m)}\right)_1 \equiv \int_{-1}^{1} \mathrm{p}_{(k)}(\zeta)\,\mathrm{p}^{(m)}(\zeta)\,d\zeta = \delta_{(k)}^{(m)}; \quad G_{(km)} = \left(\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}_{(m)}\right)_1; \tag{1.2}$$

$\delta_{(k)}^{(m)}$ – дельта Кронекера. Ниже всюду подразумевается правило суммирования по повторяющемуся индексу, причем греческие индексы пробегают значения 1, 2; латинские индексы – значения 1,2,3; латинские индексы, заключенные в круглые скобки – значения 1,2,…*N*. Вариационная формулировка трехмерной задачи динамики упругого тела, занимающего область $\left\{V : \xi^{\alpha} \in D_{\xi}, 2h\zeta \in [-h,h]\right\}$, ограниченного лицевыми плоскостями $\zeta = \pm 1$ и боковой поверхностью $S_B = \Gamma \times [-h,h]$, определяется принципом Гамильтона в форме (1.3) [65]

$$\delta \mathrm{H} = 0, \quad \mathrm{H} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_V \mathcal{L}_V\left(\mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u}, \nabla \otimes \mathbf{u}\right) dV + \int_{\partial V} \mathcal{L}_{\partial V}\left(\mathbf{u}\right) dS \right] \tag{1.3}$$

с начальными условиями $\mathbf{u}(t = t_0) = \mathbf{u}_0$, $\partial_t \mathbf{u}|_{t=t_0} = \mathbf{v}_0$. Здесь H – действие по Гамильтону, $\mathcal{L}_V$, $\mathcal{L}_{\partial V}$ – объемная и граничная плотности лагранжиана [65]

$$\mathcal{L}_V = \tfrac{1}{2}\rho \partial_t \mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{u} - \tfrac{1}{2}\left(\nabla \otimes \mathbf{u}\right)^T : \mathbf{C} : \left(\nabla \otimes \mathbf{u}\right) + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}; \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L}_{\partial V} = \mathbf{q}_{\pm} \cdot \mathbf{u}\big|_{M \in S_{\pm}} + \mathbf{q}_B \cdot \mathbf{u}\big|_{M \in S_B}; \tag{1.5}$$

ρ – плотность, $\mathbf{C}$ – симметрический тензор упругих постоянных, $\mathbf{F}$ – главный вектор массовых сил, $\mathbf{q}_B$, $\mathbf{q}_{\pm}$ – главные векторы сил на боковой поверхности S_B и лицевых поверхностях $S_{\pm}$, «$\otimes$» обозначает прямое произведение. С учетом (1.1) определения скалярного произведения на $L^2[-1,1]$ (1.2), представления интегралов, входящих в (1.3), в виде (1.6),

$$\int_V dV = \int_S h dS \int_{-1}^{1} d\zeta, \quad \int_{S_{\pm}} dS_{\pm} = \int_S dS, \quad \int_{S_B} dS_B = \int_{\Gamma} h d\Gamma \int_{-1}^{1} d\zeta \tag{1.6}$$

трехмерная задача динамики упругого тела (1.3) аппроксимируется двумерной моделью пластины *N*-го порядка (1.7) [45,46,65]

$$\delta \mathrm{H} = 0, \quad H = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{L} dt; \quad \mathbf{u}^{(k)}(t_0) = \mathbf{u}_0^{(k)}, \quad \partial_t \mathbf{u}^{(k)}\Big|_{t=t_0} = \mathbf{v}_0^{(k)}, \tag{1.7}$$

где $\mathrm{L} : \Omega_N \to \mathbb{R}_+$ – двумерное приближение функционала Лагранжа [45,46]

$$\mathrm{L} = \int_S \mathcal{L}_S\left(\mathbf{u}^{(k)}, \partial_t \mathbf{u}, \nabla \otimes \mathbf{u}^{(k)}\right) dS + \int_{\Gamma} \mathcal{L}_{\partial S}\left(\mathbf{u}^{(k)}\right) d\Gamma. \tag{1.8}$$

Поверхностная $\mathcal{L}_S$ и контурная $\mathcal{L}_{\Gamma}$ плотности лагранжиана (1.8) теории *N*-го порядка неоднородных изотропных пластин имеют вид (1.9), (1.10) [65]

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_S\left(u_{\alpha}^{(k)}, u_3^{(k)}, \dot{u}_{\alpha}^{(k)}, \dot{u}_3^{(k)}, \nabla_{\beta} u_{\alpha}^{(k)}, \nabla_{\beta} u_3^{(k)}\right) = \tfrac{1}{2}\rho_{(km)}\left(\dot{u}_{\alpha}^{(k)} \dot{u}^{\alpha(m)} + \dot{u}_3^{(k)} \dot{u}_3^{(m)}\right) - \\ - \tfrac{1}{2}\Big\{\nu(1-2\nu)^{-1}(1+\nu)^{-1}\Big[E_{(km)} \nabla_{\alpha} u^{\alpha(k)} \nabla_{\beta} u^{\beta(m)} + \\ + 2h^{-1} D_{(km)}^{1E} \nabla_{\alpha} u^{\alpha(k)} u_3^{(m)} + h^{-2} \nu^{-1}(1-\nu) D_{(km)}^{2E} u_3^{(k)} u_3^{(m)}\Big] +\end{gathered} \tag{1.9}$$

$$+\tfrac{1}{2}(1+\nu)^{-1}\Big[a^{\alpha\beta}E_{(km)}\Big(\nabla_\beta u^{\gamma(m)}\nabla_\alpha u_\gamma^{(k)}+\nabla_\beta u^{\alpha(k)}\nabla_\alpha u^{\beta(m)}+\nabla_\alpha u_3^{(k)}\nabla_\beta u_3^{(m)}\Big)+$$

$$+2h^{-1}D_{(km)}^{1E}u^{\beta(k)}\nabla_\beta u_3^{(m)}+h^{-2}D_{(km)}^{2E}u^{\alpha(k)}u_\alpha^{(m)}\Big]\Big\}+\bar{F}_{(k)}^{\alpha}u_\alpha^{(k)}+\bar{F}_{(k)}^{3}u_3^{(k)},$$

$$\mathcal{L}_\Gamma\left(u_\alpha^{(k)},u_3^{(k)}\right)=q_{B(k)}^{\alpha}\,u_\alpha^{(k)}\Big|_\Gamma+q_{B(k)}^{3}\,u_3^{(k)}\Big|_\Gamma. \qquad (1.10)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\rho_{(km)}=h\Big(\rho(\zeta)\,\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}_{(m)}\Big)_1;\quad E_{(km)}=h\Big(E(\zeta)\,\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}_{(m)}\Big)_1;$$

$$D_{(km)}^{1E}=h\Big(E(\zeta)\tfrac{d}{dz}\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}_{(m)}\Big);\quad D_{(km)}^{2E}=h\Big(E(\zeta)\tfrac{d}{dz}\mathrm{p}_{(k)},\tfrac{d}{dz}\mathrm{p}_{(m)}\Big);$$

$$\bar{F}_{(k)}^{\alpha}=h\Big(\rho F^{\alpha},\mathrm{p}_{(k)}\Big)_1+q_+^{\alpha}\Big|_{S_+}\mathrm{p}_{(k)}(1)-q_-^{\alpha}\Big|_{S_-}\mathrm{p}_{(k)}(-1); \qquad (1.11)$$

$$\bar{F}_{(k)}^{3}=h\Big(\rho F^{3},\mathrm{p}_{(k)}\Big)_1+q_+^{3}\Big|_{S_+}\mathrm{p}_{(k)}(1)-q_-^{3}\Big|_{S_-}\mathrm{p}_{(k)}(-1);$$

$$q_{B(k)}^{\alpha}=h\Big(q_B^{\alpha},\mathrm{p}_{(k)}\Big)_1,\quad q_{B(k)}^{3}=h\Big(q_B^{3},\mathrm{p}_{(k)}\Big)_1.$$

Скалярные произведения, входящие в (1.11), могут быть вычислены аналитически с помощью систем компьютерной алгебры (в данном случае использован модуль Sympy языка Python).

1.2. Постановка задачи о дисперсии нормальных волн на базе теории пластин *N*-го порядка.

Рассмотрим плоский неоднородный изотропный слой, отнесенный к декартовой системе координат $Ox^1x^2x^3$: $x^1,x^2\in\mathbb{R}^2$, $x^3=h\zeta$, $\zeta\in[-1,1]$. Массовые и поверхностные силы отсутствуют, т. е. $F^{\alpha}\equiv 0$, $F^3\equiv 0$, $q_\pm^{\alpha}\equiv 0$, $q_\pm^3\equiv 0$. Модель пластины *N*-го порядка определена на срединной поверхности слоя $\zeta=0$. Материал слоя – двухкомпонентный ФГМ с модулем $E(\zeta)$ и плотностью $\rho(\zeta)$

$$E(\zeta)=E_C\left[\tilde{E}+q(\zeta)\Delta\tilde{E}\right],\quad \rho(\zeta)=\rho_C\left[\tilde{\rho}+q(\zeta)\Delta\tilde{\rho}\right],$$
$$\tilde{E}=E_M/E_C,\quad \Delta\tilde{E}=1-\tilde{E},\quad \tilde{\rho}=\rho_M/\rho_C,\quad \Delta\tilde{\rho}=1-\tilde{\rho}, \qquad (1.12)$$

E_M, E_C, ρ_M, ρ_C – модули упругости и плотности структурных составляющих.

Пусть в слое в направлении оси Ox^1 распространяется нормальная волна

$$u_\alpha^{(k)}=h\tilde{U}_\alpha^{(k)}\exp\left[i(\kappa\xi-\omega\tau)\right],\quad u_3^{(k)}=h\tilde{U}_3^{(k)}\exp\left[i(\kappa\xi-\omega\tau)\right], \qquad (1.13)$$

$\tilde{U}_\alpha^{(k)}=h^{-1}U_\alpha^{(k)}$, $\tilde{U}_3^{(k)}=h^{-1}U_3^{(k)}$ – безразмерные амплитуды, $\kappa=kh$ – безразмерное волновое число, $\varpi=\omega h/c_2$ – безразмерная фазовая частота (далее рассматриваются безразмерные величины, тильда условно опущена), $\xi=h^{-1}x^1$, $\tau=tc_2h^{-1}$ – безразмерные координата и время [50,57], $c_2=\sqrt{E_C/\left[2\rho_C(1+\nu)\right]}$ – скорость волны сдвига в материале с модулем E_C и плотностью ρ_C, $i=\sqrt{-1}$. Условием $\delta\mathrm{H}=0$ (1.7) являются обобщенные уравнения Лагранжа II рода двумерной континуальной системы [44-46], в случае (1.9) при учете (1.13) сводящиеся к однородному линейному алгебраическому уравнению

$$\left(\mathbf{A}(\kappa)-\omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{U}=\mathbf{0},\quad \mathbf{U}=\left(U_1^{(0)}\ldots\quad U_1^{(N)}\quad U_3^{(0)}\ldots\quad U_3^{(N)}\right), \tag{1.14}$$

$$\mathbf{A}(\kappa)=\begin{pmatrix} 4\kappa^2\left(1-\beta^2\right)\bar{E}_{(km)}+\bar{D}^{2E}_{(km)} & i\kappa\left[\bar{D}^{1E}_{(km)}-2\left(1-2\beta^2\right)\bar{D}^{1E}_{(mk)}\right] \\ i\kappa\left[2\left(1-2\beta^2\right)\bar{D}^{1E}_{(km)}-\bar{D}^{1E}_{(mk)}\right] & \kappa^2\bar{E}_{(km)}+4\left(1-\beta^2\right)\bar{D}^{2E}_{(km)} \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} \bar{\rho}_{(km)} & 0 \\ 0 & \bar{\rho}_{(km)} \end{pmatrix},\quad \rho_{(km)}=\rho_C\bar{\rho}_{(km)},\, E_{(km)}=E_C\bar{E}_{(km)},\, D^{1,2E}_{(km)}=E_C D^{1,2E}_{(km)}. \tag{1.16}$$

Решение $\mathbf{U}\neq 0$ существует при условии $\left|\mathbf{A}(\kappa)-\omega^2\mathbf{M}\right|=0$. Собственными значениями являются фазовые частоты $\omega_n(\kappa)$, $\kappa\in\mathbb{R}_+\cup 0$, $n\in[1,2N+1]\cap\mathbb{Z}$.

Конкретный вид операторов $E_{(km)}$, $\rho_{(km)}$, $D^{1,2E}_{(km)}$ определяется выбором базиса $\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)$; ниже рассмотрены полиномы Лежандра и кусочно-линейные финитные функции «разбиение единицы» [48]. Заметим, что при введении кусочно-линейных функций базиса постановка задачи в смешанных компонентах $D^{(\cdot m)}_{(k\cdot)}=\left(\frac{d}{d\zeta}\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}^{(m)}\right)_1=G^{(mn)}D_{(km)}$ [50] неэффективна, так как матрица $G^{(km)}$: $G^{(km)}G_{(nm)}=\delta^{(k)}_{(n)}$ заполнена и по мере роста N (и уменьшения носителя $\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)$) плохо обусловлена, что приводит к ухудшению сходимости решения. Переход к ковариантным компонентам операторов (1.11) позволяет избежать данного эффекта и существенно сократить машинное время, требуемое для построения матриц при аналитическом вычислении скалярных произведений (1.2).

2. СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НА ЧАСТОТАХ ЗАПИРАНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДЕ С ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Пусть $q(\zeta)=q_0(\zeta)+Cq_1(\zeta)$, где $q_0(\zeta)\in C^{(K)}[-1,1]$, $K>1$ – распределение объемной доли примесной фазы, $q_1(\zeta)\in C^{(0)}[-1,1]$ – отклонение от заданного распределения, моделирующее дефект структуры ФГМ, C – амплитуда дефекта.

Рассмотрим степенное распределения объемных долей по толщине слоя

$$q_0(\zeta)=\left[\tfrac{1}{2}(1+\zeta)\right]^p. \tag{2.1}$$

Пусть модель локального дефекта $q_1(\zeta)$ определяется следующим образом

$$\begin{aligned} q_1(\zeta)=&\left[\Theta(\zeta+1)-\Theta(\zeta-\zeta_1)\right](\zeta+1)^{p_1}(\zeta_1+1)^{-2p_1}+\\ &+\left[\Theta(\zeta-\zeta_1)-\Theta(\zeta-1)\right](1-\zeta)^{p_1}(1-\zeta_1)^{-2p_1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь ζ_1 – координата дефекта: $q_1(\zeta_1)=1$, $\Theta(\zeta)$ – единичная ступенчатая функция. Зависимость $q(\zeta)$ при $p=3$, $p_1=5$, $C=0,2$, $\zeta_1=0,2$ показана на рис.1.

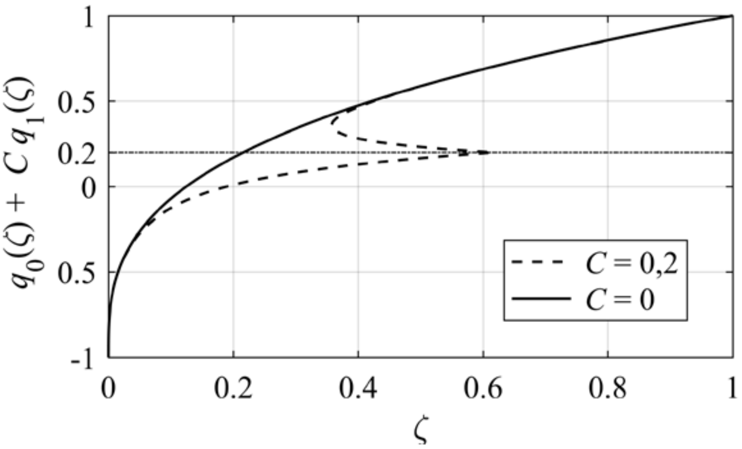

Рис.1. Распределение объемных долей структурных составляющих $q(\zeta)$ в функционально-градиентном слое со степенным законом (2.1) и дефектом (2.2).

Пусть ФГМ образован двумя структурными составляющими: металлической Al: $E_M = 7{,}0 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_M = 2700$ кг/м^3 и керамической Al_2O_3: $E_C = 3{,}8 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho_C = 4000$ кг/м^3 [66]. Решение задачи построено на основе теорий пластин порядков $N = 1 \ldots 30$ с использованием в качестве базиса полиномов Лежандра и кусочно-линейных финитных функций, соответствующих ПА МКЭ. Дисперсионные кривые распространяющихся мод для слоя со степенным законом $q(\zeta)$ и дефектом $Cq_1(\zeta)$, полученные на базе теории 20 порядка при полиномиальном базисе $\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)$, показаны на рис.2. Безразмерные частоты запирания нормальных волн $\frac{2}{\pi}\omega_n\big|_{\kappa=0}$, вычисленные на основе полиномиального базиса, приведены в таблице 1; частоты запирания, определенные на основе ПА МКЭ – в таблице 2.

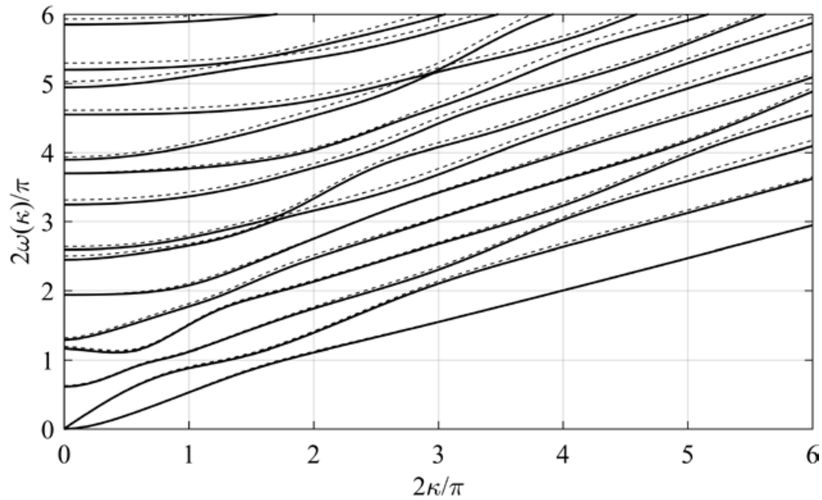

Рис.2. Фазовые частоты $\omega_n(\kappa)$ распространяющихся мод нормальных волн в функционально-градиентном слое: $p = 3$, $p_1 = 5$, $\zeta_1 = 0{,}2$. – сплошные линии: слой без дефекта $(C = 0)$; -- пунктирные линии: слой с дефектом $(C = 0{,}2)$.

Таблица 1.

N \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,79	1,51	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2	0,69	1,31	1,93	3,67	–	–	–	–	–	–	–	–
3	0,65	1,24	1,56	2,97	3,43	6,54	–	–	–	–	–	–
4	0,63	1,20	1,39	2,56	2,65	4,87	5,35	10,19	–	–	–	–
5	0,63	1,20	1,32	2,20	2,52	3,76	4,20	7,17	7,63	14,54	–	–
6	0,63	1,19	1,32	1,97	2,51	3,16	3,75	5,14	6,02	9,79	10,75	19,72
7	0,63	1,19	1,32	1,97	2,51	2,72	3,75	4,17	5,19	6,73	7,94	12,83
8	0,63	1,19	1,32	1,95	2,51	2,71	3,46	3,71	5,17	5,36	6,59	8,53
9	0,63	1,19	1,32	1,95	2,51	2,67	3,44	3,71	4,24	5,09	6,56	6,66
10	0,63	1,19	1,31	1,94	2,50	2,65	3,36	3,71	4,20	5,04	5,14	6,41
11	0,62	1,19	1,31	1,94	2,50	2,65	3,33	3,71	4,03	5,04	5,07	6,06
12	0,62	1,19	1,31	1,94	2,50	2,64	3,33	3,70	3,96	4,82	5,03	5,96
13	0,62	1,19	1,31	1,94	2,50	2,64	3,32	3,70	3,96	4,67	5,03	5,59
14	0,62	1,19	1,31	1,94	2,50	2,64	3,32	3,70	3,94	4,67	5,03	5,39
15	0,62	1,19	1,31	1,94	2,50	2,64	3,32	3,70	3,94	4,63	5,03	5,39
16	0,62	1,19	1,31	1,94	2,50	2,64	3,31	3,70	3,94	4,62	5,03	5,34
17	0,62	1,19	1,31	1,94	2,50	2,64	3,31	3,70	3,94	4,62	5,03	5,31
18	0,62	1,19	1,31	1,94	2,50	2,64	3,31	3,70	3,94	4,61	5,03	5,31
19	0,62	1,19	1,31	1,94	2,50	2,64	3,31	3,70	3,94	4,61	5,03	5,30
20	0,62	1,19	1,31	1,94	2,50	2,64	3,31	3,70	3,94	4,61	5,03	5,30
21	0,62	1,19	1,31	1,94	2,50	2,64	3,31	3,70	3,93	4,61	5,03	5,29
22	0,62	1,19	1,31	1,94	2,50	2,64	3,31	3,70	3,93	4,61	5,03	5,29

Таблица 2.

N \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,79	1,51	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2	0,69	1,32	1,61	3,08	–	–	–	–	–	–	–	–
3	0,68	1,29	1,48	2,51	2,83	4,78	–	–	–	–	–	–
4	0,65	1,23	1,48	2,21	2,81	3,50	4,21	6,67	–	–	–	–
5	0,64	1,22	1,41	2,27	2,68	2,97	4,33	4,49	5,66	8,55	–	–
6	0,64	1,21	1,38	2,16	2,64	3,08	3,77	4,12	5,51	5,87	7,19	10,50
7	0,63	1,21	1,36	2,12	2,60	3,00	3,81	4,04	4,58	5,72	6,55	7,26
8	0,63	1,20	1,35	2,07	2,58	2,95	3,82	3,95	4,50	5,49	5,63	7,28
9	0,63	1,20	1,34	2,05	2,56	2,88	3,76	3,90	4,61	5,20	5,48	6,42
10	0,63	1,20	1,34	2,03	2,55	2,84	3,67	3,87	4,54	5,41	5,41	5,95
11	0,63	1,20	1,33	2,01	2,54	2,81	3,62	3,84	4,44	5,35	5,37	6,15
12	0,63	1,20	1,33	2,00	2,54	2,78	3,57	3,82	4,38	5,27	5,29	6,17
13	0,63	1,20	1,33	1,99	2,53	2,76	3,53	3,80	4,31	5,21	5,26	6,09
14	0,63	1,19	1,33	1,99	2,53	2,74	3,50	3,79	4,27	5,13	5,22	6,03
15	0,63	1,19	1,32	1,98	2,52	2,73	3,48	3,78	4,23	5,07	5,20	5,94
16	0,63	1,19	1,32	1,98	2,52	2,72	3,46	3,77	4,19	5,02	5,18	5,88
17	0,63	1,19	1,32	1,97	2,52	2,71	3,44	3,76	4,16	4,97	5,16	5,81
18	0,63	1,19	1,32	1,97	2,52	2,70	3,43	3,75	4,14	4,94	5,15	5,76
19	0,63	1,19	1,32	1,97	2,52	2,69	3,42	3,75	4,12	4,90	5,14	5,72

20	0,63	1,19	1,32	1,97	2,51	2,69	3,41	3,74	4,10	4,88	5,13	5,67
21	0,63	1,19	1,32	1,96	2,51	2,68	3,40	3,74	4,08	4,85	5,12	5,64
22	0,63	1,19	1,32	1,96	2,51	2,68	3,39	3,74	4,07	4,83	5,11	5,61
…												
40	0,62	1,19	1,31	1,95	2,50	2,65	3,34	3,71	3,98	4,68	5,05	5,39

Как и в случае однородного волновода, сходимость решения, построенного ПА МКЭ на основе кусочно-линейных базисных функций «разбиение единицы» заметно замедляется по сравнению с полиномиальным ортогональным базисом. Сравнение первых 12 ненулевых частот запирания нормальных волн для однородного Al и Al_2O_3 волноводов, волновода со степенным распределением объемных долей структурных составляющих (2.1) $(p=3)$ и волновода с дефектом распределения объемных долей (2.2) при $p_1=5$, $C=0,2$, $\zeta_1=0,2$, полученных на базе теории 20 порядка и полиномиального базиса, приведено в Таблице 3.

Таблица 3.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Al_2O_3	1,00	1,91	2,00	3,00	3,81	4,00	5,00	5,72	6,00	7,00	7,62	8,00
Al	0,52	1,00	1,04	1,57	1,99	2,09	2,61	2,99	3,13	3,66	3,98	4,18
$C=0$	0,61	1,16	1,28	1,94	2,45	2,59	3,25	3,70	3,90	4,55	4,94	5,20
$C=0,2$	0,62	1,19	1,31	1,94	2,50	2,64	3,31	3,70	3,94	4,61	5,03	5,30

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На базе общей теории N-го порядка неоднородных пластин, основанной на лагранжевом вариационном формализме аналитической динамики континуальных систем, получена постановка задачи о дисперсии распространяющихся мод нормальных волн в плоском функционально-градиентном волноводе. Известные конкурирующие методы ортогональных полиномов и полуаналитических конечных элементов следуют из постановки задачи стационарной динамики модели N-го порядка пластины как частные случаи при выборе системы функций безразмерной нормальной координаты, образующей базис в пространстве функций $L^2\left[-1,1\right]$ – ортогональных полиномов или финитных кусочно-линейных функций, соответственно. Задача о дисперсии волн приведена к обобщенной проблеме собственных значений двух симметрических матриц, причем компоненты матриц, содержащие обобщенные физические константы теории N-го порядка, вычисляются аналитически с помощью систем компьютерной алгебры.

Анализ приближенного решения задачи о дисперсии нормальных волн в плоском функционально-градиентном слое с локальной неоднородностью, полученного на основе теории пластин N-го порядка, при использовании разных классов базисных функций при разложении компонентов вектора перемещения по нормальной координате приводит к следующим выводам:

– кусочно-линейные базисные функции «разбиение единицы» приводят к худшей скорости сходимости по сравнению с полиномиальными базисными функциями, несмотря на разрыв первой производной зависимости массовой плотности двухкомпонентного функционально-градиентного материала от нормальной координаты и высокие градиенты распределения объемных долей структурных составляющих вблизи точки разрыва первой производной;

– при исследовании фазовых частот распространяющихся нормальных волн в случае неоднородного волновода, в том числе при наличии локальной неоднородности с высоким градиентом (модели дефекта структуры ФГМ) точность решения, обеспечиваемая методом ортогональных полиномов, является достаточной, что согласуется с выводами [23,24], основанными на исследовании дисперсии волн в слоистых волноводах с близкими значениями физических констант слоев; наличие дефекта структуры функционально-градиентного материала влияет на фазовые частоты нормальных волн в области волнового числа $\kappa \in \mathbb{R}$ незначительно; применение полуаналитического метода конечных элементов для волноводов такого класса представляется оправданным при введении в рассмотрение финитных базисных функций более высокого порядка;

– повышение эффективности полуаналитического метода конечных элементов в задачах для неоднородных волноводов с локальными дефектами может быть достигнуто путем введения базисных функций с локальным уточнением в соответствии с концепцией глобально-локального (обобщенного) конечно-элементного подхода.

Необходимо отметить, что применение стандартных конечно-элементных программных комплексов в классе задач о дисперсии нормальных волн в тонкостенных волноводах является допустимым, но весьма трудоемким, как показано в [66], причем решения, основанные на стандартных библиотеках конечных элементов (в большинстве случаев – с линейными функциями формы) проигрывают в точности специализированным методам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жаворонок С.И. *Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть I* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №2. – С.227-260.
2. Жаворонок С.И. *Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть II* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №1. – С.36-86.
3. Thomson W.T. *Transmission of elastic waves through a stratified solid medium* // Journal of Applied Physics. – 1950. – Vol.21. – Pp.89-93.
4. Haskell N.A. *The dispersion of surface waves on multilayered media* // Bull. of the Seismic Society of America. – 1953. – Vol.43. – Pp.17-34.
5. Викторов И.А. *Ультразвуковые волны Лэмба* // Акустический журнал. – 1965. – Т.11. – №1. – С.1-18.
6. Fahmy A.H., Adler E.L. *Propagation of acoustic surface waves in multilayers: a matrix description* // Applied Physics Letters. – 1973. – Vol.22. – Pp.495-497.
7. Pasteraud T., Laude V., Ballandras S. *Stable scattering-matric method for surface acoustic waves in piezoelectric multilayers* // Applied Physics Letters. – 2002. – Vol.80. – No.14. – Pp.2544-2546.
8. Su Z., Ye L., Lu Y. *Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: a review* // J. of Sound and Vibration. – 2006. – Vol.295. – Pp.753-780.

9. Chen W.Q., Wang H.M., Bao R.H. *On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate* // Composite Structures. – 2007. – Vol.81. – Pp.233-242.
10. Knopoff L. *A matrix method for elastic wave problems* // Bull. of the Seismic Society of America. – 1964. – Vol.54. – Pp.431-438.
11. Liu C., Yu J., Zhang B., Zhang X., Elmaimouni L. *Analysis of Lamb wave propagation in a functionally graded piezoelectric small-scale plate based on the modified couple stress theory* // Composite Structures. – 2021. – Vol.265. – 113733.
12. Kuznetsov S.V. *Lamb waves in functionally graded plates with transverse inhomogeneity* // Acta Mechanica. – 2018. – Vol.229. – Pp.4131-4139.
13. Kuznetsov S.V. *Lamb waves in anisotropic functionally graded plates: a closed form dispersion solution* // J. of Mechanics. – 2020. – Vol.36. – No.1. – Pp.1-6.
14. Кузнецов С.В., Ильяшенко И.А. *Теоретические аспекты применения волн Лява и SH-волн в неразрушающей диагностике слоистых сред* // Дефектоскопия. – 2017. – №9. – С.3-9.
15. Гольдштейн Р.В., Ильяшенко А.В., Кузнецов С.В. *Волны Лэмба в анизотропных средах: шестимерный формализм Коши* // Математическое моделирование. – 2017. – Т.29. – №10. – С.86-94.
16. Lowe M.J.S. *Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media* // IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. – 1995. – Vol.42. – Pp.525-542.
17. Кузнецов С.В. *Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор)* // Акустический журнал. – 2014. – Т.60. – №1. – С.9-100.
18. Шульга Н.А. *Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре* // Прикладная механика. – 1974. – Т.10. – №9. – С.14-18.
19. Cao X., Jin F., Jeon J., Lu T. J. *Propagation of Love waves in a functionally graded piezoelectric material (FPGM) layered composite system* // International J. of Solids and Structures. – 2009. – Vol.46. – Pp.4123-4132.
20. Cao X., Jin F., Jeon I. *Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plare by power series technique* // NDT&E International. – 2011. – Vol.44. – Pp.84-92.
21. Моисеенко И.А. *Волны кручения вдоль полого экспоненциально-неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра с закрепленными границами* // Механика твердого тела. – 2014. – №44. – С.132-139.
22. Моисеенко И.А., Моисеенко В.А. *Нормальные волны в функционально-градиентных сплошных цилиндрах* // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2018. – Т.62-63. – №1-2. – С.16-34.
23. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T. *Legendre polynomial approach for modelling free-ultrasonic waves in multilayered plates* // J. of Applied Physics. – 1999. – Vol.85. – Pp.3419-3427.
24. Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T. *Guided waves in radially graded cylinders: a polynomial approach* // NDT&E International. – 2005. – Vol.38. – Pp.344-353.
25. Wang X., Li F., Zhang B., Yu J., Zhang X. *Wave propagation in thermoelastic inhomogeneous hollow cylinders by analytical integration orthogonal polynomial approach* // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol.99. – Pp.57-80.

26. Wang X., Li F., Zhang X., Yu J., Qiao H. *Thermoelastic guided wave in fractional order functionally graded plates: An analytical integration Legendre polynomial approach* // Composite Structures. – 2021. – Vol.256. – 112997.
27. Zhang X., Li Z., Wang X., Yu J.G. *The fractional Kelvin-Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder* // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol.89. – Pp.299-313.
28. Liu C., Yu J., Xu W., Zhang X., Wang X. *Dispersion characteristics of guided waves in functionally graded anisotropic micro/nano-plates based on the modified couple stress theory* // Thin-Walled Structures. – 2021. – Vol.161. – 107527.
29. Nelson R.B., Dong S.B., Kalra R.D. *Vibrations and waves in laminated orthotropic circular cylinders* // J. of Sound and Vibration. – 1971. – Vol.18. – No.3. – Pp.429-444.
30. Bartoli I., Marzani A., Lanza di Scalea F., Viola E. *Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section* // J. of Sound and Vibration. – 2006. – Vol.295. – Pp.685-707.
31. Marzani A., Viola S., Bartoli I., Lenza di Scalea F., Rizzo P. *A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped waveguides* // J. of Sound and Vibration. – 2008. – Vol.318. – No.3. – Pp.488-505.
32. Astaneh A.V., Guddati M.N. *Dispersion analysis of composite acousto-elastic waveguides* // Composites: Part B. – 2017. – Vol.130. – Pp.200-216.
33. Joseph R., Li L., Haider M.F., Giurgiutiu V. *Hybrid SAFE-GMM approach for predictive modeling of guided wave propagation in layered media* // Engineering Structures. – 2019. – Vol.193. – Pp.194-206.
34. Yu J.G., Lefebvre J.E. *Guided waves in multilayered hollow cylinders: the improved orthogonal polynomial method* // Composite Structures. – 2013. – Vol.95. – Pp.419-429.
35. Yu J.G., Lefebvre J.E., Guo Y.Q. *Free-ultrasonic waves in multilayered piezoelectric plates: an improvement of the Legendre polynomial approach for multilayered structures with very dissimilar materials* // Composites: Part B. – 2013. – Vol.51. – Pp.260-269.
36. Кильчевский Н.А. *Основы аналитической механики оболочек*. – Киев: Изд. АН УССР, 1963. – 355 с.
37. Векуа И.Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек*. – М: Наука, 1982. – 282 с.
38. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. *Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач*. – Львов: Вища школа, 1978. – 192 с.
39. Хома И.Ю. *Обобщенная теория анизотропных оболочек*. – Киев: Наукова думка, 1986. – 172 с.
40. Амосов А.А. *Приближенная трехмерная теория толстостенных пластин и оболочек* // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. – №5. – С.37-42.
41. Амосов А.А. *Приближенная трехмерная теория нетонких упругих оболочек и плит* / Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – Ташкент: Ташкентский политехнический институт им. Р.А. Беруни, 1989.
42. Никабадзе М.У. *Применение системы полиномов Лежандра к теории тонких тел* // Вестник Московского университета им. М.В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика. – 2007. – №5. – С.54-56.

43. Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. *Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации перемещений и напряжений полиномами Лежандра* // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т.48. – №3(283). – С.450-459.
44. Жаворонок С.И. *Вариационные уравнения трехмерной теории анизотропных оболочек* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4-5. – С.2154-2156.
45. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №1. – С.116-132.
46. Zhavoronok S.I. *A Vekua-type linear theory of thick elastic shells* // ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2014. – Vol.94. – No.1-2. – Pp.164-184.
47. Zhavoronok S.I. *Variational formulations of Vekua-type shell theories and some of their applications* // Shell Structures: Theory and Applications – Proc. of the 10th SSTA 2013 Conf. – 2013. – Vol.3. – Pp.341-344.
48. Babuska I., Melenk J.M. *The partition of unity finite element method* // International J. for Numerical Methods in Engineering. – 1997. – Vol.40. – Pp.727-758.
49. Жаворонок С.И. *Исследование гармонических волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №4-2. – С.693-701.
50. Жаворонок С.И. *О применении различных уравнений трехмерной теории пластин Nго порядка в задачах о дисперсии нормальных волн в упругом слое* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.595-613.
51. Жаворонок С.И. *Исследование распространяющихся мод гармонических волн в упругом слое на базе трехмерной теории оболочек N-го порядка* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №2. – С.278-287.
52. Жаворонок С.И. *Исследование кинематики нормальных волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка для различных значений волновых чисел* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №1. – С.45-56.
53. Жаворонок С.И. *Формулировка начально-краевой задачи приближенной трехмерной теории N-го порядка в обобщенных перемещениях и ее приложение к задачам стационарной динамики* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №3. – С.333-344.
54. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С. *О приложении различных вариантов теории оболочек N-го порядка к некоторым задачам о прогрессивных волнах* // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2014. – №11-1. – С.255-266.
55. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С. *О вариационных уравнениях расширенной теории N-го порядка упругих оболочек и их приложении к некоторым задачам динамики* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – №2. – С.36-59.
56. Zhavoronok S.I. *On the use of extended plate theories of Vekua-Amosov type for wave dispersion problems* // International J. of Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. – Vol.14. – No.1. – Pp.36-48.

57. Жаворонок С.И. *Применение расширенной теории пластин N-го порядка к решению задачи о дисперсии волн в градиентно-неоднородном слое* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №2. – С.240-258.
58. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода расширенной трехмерной теории N-го порядка анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №3. – С.370-381.
59. Zhavoronok S.I. *On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I.N. Vekua type* // Procedia Engnieering. – 2015. – Vol.111. – Pp.888-895.
60. Zhavoronok S.I. *A general higher-order shell theory based on the analytical dynamics of constrained continuum systems* // Shell Structures: Theory and Applications – Proc. of the 11th SSTA 2017 Conf. – 2018. – Vol.4. – Pp.189-192.
61. Zhavoronok S.I. *Modelling normal waves in functionally graded layers based on the unified hierarchical formulation of higher-order plate theories* // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal. – 2020. – Vol.11. – No.2. – Pp.159-185.
62. Egorova O.V., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Use of the higher-order plate theory of I.N. Vekua type in problems of dynamics of heterogeneous plane waveguides* // Archives of Mechanics. – 2020. – Vol.72. – No.1. – Pp.1-13.
63. Egorova O.V., Kurbatov A.S., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Modeling of the dynamics of plane functionally graded waveguides based on the different formulations of the plate theory of I.N. Vekua type* // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2021. – Vol.28. – No.5. – Pp.506-515.
64. Кильчевский Н.А., Кильчинская Г.А., Ткаченко Н.Е. *Аналитическая механика континуальных систем*. – Киев: Наукова Думка, 1979. – 188 с.
65. Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S., Rabinskii L.N. *The Generalized Routh Equations in the Plate Theory of Nth Order and their Use in Problems of Normal Wave Dispersion in Heterogeneous Waveguides* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol.43. – No.7. – Pp.2010-2018.
66. Matsunaga H. *Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher order deformation theory* // Composite Structures. – 2008. – Vol.82. – Pp.499-512.
67. Loveday D.W. *Semi-analytical finite element analysis of elastic waveguides subjected to axial loads* // Ultrasonics. – 2009. – Vol.49. – Pp.298-300.

REFERENCES

1. Zhavoronok S.I *Zadachi o dispersii voln v neodnorodnykh volnovodakh: metody resheniya (obzor). Chast' I [Wave dispersion in heterogeneous waveguides: methods of solution (A review). Part I]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2021, Vol.27, No.2, Pp.227-260.
2. Zhavoronok S.I. *Zadachi o dispersii voln v neodnorodnykh volnovodakh: metody resheniya (obzor). Chast' II [Wave dispersion in heterogeneous waveguides: methods of solution (A review). Part II]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2022, Vol.28, No.1, Pp.36-86.
3. Thomson W.T. *Transmission of elastic waves through a stratified solid medium.* Journal of Applied Physics. 1950, Vol.21, Pp.89-93.
4. Haskell N.A. *The dispersion of surface waves on multilayered media*. Bull. of the Seismic Society of America, 1953, Vol.43, Pp.17-34.

5. Viktorov I.A. *Ul’trazvukovye volny Lehmba [Ultrasonic Lamb Waves]*. Akusticheskij zhurnal, 1965, Vol.11, No.1, Pp.1-18.
6. Fahmy A.H., Adler E.L. *Propagation of acoustic surface waves in multilayers: a matrix description*. Applied Physics Letters, 1973, Vol.22, Pp.495-497.
7. Pasteraud T., Laude V., Ballandras S. *Stable scattering-matric method for surface acoustic waves in piezoelectric multilayers.* Applied Physics Letters, 2002, Vol.80, No.14, Pp.2544-2546.
8. Su Z., Ye L., Lu Y. *Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: a review*. J. of Sound and Vibration, 2006, Vol.295, Pp.753-780.
9. Chen W.Q., Wang H.M., Bao R.H. *On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate*. Composite Structures, 2007, Vol.81, Pp.233-242.
10. Knopoff L. *A matrix method for elastic wave problems*. Bull. of the Seismic Society of America, 1964, Vol.54, Pp.431-438.
11. Liu C., Yu J., Zhang B., Zhang X., Elmaimouni L. *Analysis of Lamb wave propagation in a functionally graded piezoelectric small-scale plate based on the modified couple stress theory*. Composite Structures, 2021, Vol.265, 113733.
12. Kuznetsov S.V. *Lamb waves in functionally graded plates with transverse inhomogeneity*. Acta Mechanica, 2018, Vol.229, Pp.4131-4139.
13. Kuznetsov S.V. *Lamb waves in anisotropic functionally graded plates: a closed form dispersion solution*. J. of Mechanics, 2020, Vol.36, No.1, Pp.1-6.
14. Kuznecov S.V., Il'yashenko I.A. *Theoretical aspects of applying Love and SH-waves to nondestructive testing of stratified media.* Russian J. of Nondestructive Testing, 2017, Vol.53, Pp.597-603.
15. Goldshtejn R.V., Ilyashenko A.V., Kuznecov S.V. *Lamb Waves in Anisotropic Media: Six-Dimensional Cauchy Formalism*. Mathematical Models and Computer Simulations, 2018, Vol.10, Pp.308-313.
16. Lowe M.J.S. *Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media*. IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 1995, Vol.42, Pp.525-542.
17. Kuznetsov S.V. *Lamb waves in anisotropic plates (Review).* Acoustical Physics, 2014, Vol.60, No.1, Pp.95-103.
18. Shul’ga N.A. *Rasprostranenie osesimmetrichnykh uprugikh voln v ortotropnom polom tsilindre [Propagation of axisymmetric waves in an orthotropic hollow cylinder]*. Prikladnaya mekhanika, 1974, Vol.10, No.9, Pp.14-18.
19. Cao X., Jin F., Jeon J., Lu T. J. *Propagation of Love waves in a functionally graded piezoelectric material (FPGM) layered composite system*. International J. of Solids and Structures, 2009, Vol.46, Pp.4123-4132.
20. Cao X., Jin F., Jeon I. *Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plare by power series technique*. NDT&E International, 2011, Vol.44, Pp.84-92.
21. Moiseenko I.A. *Volny krucheniya vdol’ pologo ehksponentsial’no-neodnorodnogo transversal’no-izotropnogo tsilindra s zakreplennymi granitsami [Torsion waves along the hollow exponentially inhomogeneous transversally isotropic cylinder with constrained boundaries]*. Mekhanika tverdogo tela, 2014, Iss.44, Pp.132-139.
22. Moiseenko I.A., Moiseenko V.A. *Normal’nye volny v funktsional’no-gradientnykh sploshnykh tsilindrakh [Normal waves in functionally graded solid cylinders]*. Zhurnal teoreticheskoj i prikladnoj mekhaniki, 2018, Vol.62-63, Nos.1-2, Pp.16-34.

23. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T. *Legendre polynomial approach for modelling free-ultrasonic waves in multilayered plates.* J. of Applied Physics, 1999, Vol.85, Pp.3419-3427.
24. Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T. *Guided waves in radially graded cylinders: a polynomial approach*. NDT&E International, 2005, Vol.38, Pp.344-353.
25. Wang X., Li F., Zhang B., Yu J., Zhang X. *Wave propagation in thermoelastic inhomogeneous hollow cylinders by analytical integration orthogonal polynomial approach*. Applied Mathematical Modelling, 2021, Vol.99, Pp.57-80.
26. Wang X., Li F., Zhang X., Yu J., Qiao H. *Thermoelastic guided wave in fractional order functionally graded plates: An analytical integration Legendre polynomial approach*. Composite Structures, 2021, Vol.256, 112997.
27. Zhang X., Li Z., Wang X., Yu J.G. *The fractional Kelvin-Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder.* Applied Mathematical Modelling, 2021, Vol.89, Pp.299-313.
28. Liu C., Yu J., Xu W., Zhang X., Wang X. *Dispersion characteristics of guided waves in functionally graded anisotropic micro/nano-plates based on the modified couple stress theory*.Thin-Walled Structures, 2021, Vol.161, 107527.
29. Nelson R.B., Dong S.B., Kalra R.D. *Vibrations and waves in laminated orthotropic circular cylinders*. J. of Sound and Vibration, 1971, Vol.18, No.3, Pp.429-444.
30. Bartoli I., Marzani A., Lanza di Scalea F., Viola E. *Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section*. J. of Sound and Vibration, 2006, Vol.295, Pp.685-707.
31. Marzani A., Viola S., Bartoli I., Lenza di Scalea F., Rizzo P. *A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped waveguides*. J. of Sound and Vibration, 2008, Vol.318, No.3, Pp.488-505.
32. Astaneh A.V., Guddati M.N. *Dispersion analysis of composite acousto-elastic waveguides.* Composites: Part B, 2017, Vol.130, Pp.200-216.
33. Joseph R., Li L., Haider M.F., Giurgiutiu V. *Hybrid SAFE-GMM approach for predictive modeling of guided wave propagation in layered media*. Engineering Structures, 2019, Vol.193, Pp.194-206.
34. Yu J.G., Lefebvre J.E. *Guided waves in multilayered hollow cylinders: the improved orthogonal polynomial method*. Composite Structures, 2013, Vol.95, Pp.419-429.
35. Yu J.G., Lefebvre J.E., Guo Y.Q. *Free-ultrasonic waves in multilayered piezoelectric plates: an improvement of the Legendre polynomial approach for multilayered structures with very dissimilar materials.* Composites: Part B, 2013, Vol.51, Pp.260-269.
36. Kil'chevskij N.A. *Osnovy analiticheskoj mekhaniki obolochek [Basics of the Analytical Mechanics of Shells]*. Kiev, Izd. AN USSR, 1963, 355 p.
37. Vekua I.N. *Shell Theory: General Methods of Construction*. Pitman Advanced Publ. Program, Boston, 1985.
38. Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Lizunov P.P. *Neklassicheskaya teoriya obolochek i ee prilozhenie k resheniyu inzhenernykh zadach [Non-classical theory of shells and its application to solving engineering problems]*. L'vov, Vishha shkola, 1978, 192 p.
39. Khoma I.Yu. *Obobshhennaya teoriya anizotropnykh obolochek [Generalized theory of anisotropic shells]*. Kiev, Naukova dumka, 1986, 172 p.

40. Amosov A.A. *Priblizhennaya trekhmernaya teoriya tolstostennykh plastin i obolochek [Approximate three-dimensional theory of thick-walled plates and shells]*. Stroitel’naya mekhanika i raschet sooruzhenij, 1987, No.5, Pp.37-42.
41. Amosov A.A *Priblizhennaya trekhmernaya teoriya netonkikh uprugikh obolochek i plit. Dissertatsiya na soiskanie uchenoj stepeni doktora tekhnicheskikh nauk [Approximate 3D theory of non-thin elastic shells and plates: Diss. Dr. Sci.]*, Tashkent, Tashkentskij politekhnicheskij institut im. R.A. Beruni, 1989.
42. Nikabadze M.U. *Application of Chebyshev polynomials to the theory of thin bodies*. Moscow University Mechanics Bulletin, 2007, Vol.62, No.5. Pp.141-148.
43. Volchkov Yu.M., Dergileva L.A. *Reducing three-dimensional elasticity problems to two-dimensional problems by approximating stresses and displacements by Legendre polynomials*. J. of Applied Mechanics and Technical Physics, 2007, Vol.48, No.3, Pp.450-459.
44. Zhavoronok S.I. *Variatsionnye uravneniya trekhmernoj teorii anizotropnykh obolochek [Variational equations of a three-dimensional anisotropic theory of shells]*. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo, 2011, No.4-5, Pp.2154-2156.
45. Zhavoronok S.I. *Obobshhennye uravneniya Lagranzha vtorogo roda trekhmernoj teorii anizotropnykh obolochek [Generalized lagrange equations of the second kind of three-dimensional anisotropic shell’s theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2011, Vol.17, No.1, Pp.116-132.
46. Zhavoronok S.I. *A Vekua-type linear theory of thick elastic shells*. ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2014, Vol.94, No.1-2. Pp.164-184.
47. Zhavoronok S.I. *Variational formulations of Vekua-type shell theories and some of their applications.* Shell Structures: Theory and Applications – Proc. of the 10th SSTA 2013 Conf., 2013, Vol.3, Pp.341-344.
48. Babuska I., Melenk J.M. *The partition of unity finite element method*. International J. for Numerical Methods in Engineering, 1997, Vol.40, Pp.727-758.
49. Zhavoronok S.I. *Issledovanie garmonicheskikh voln v uprugom sloe na osnove trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka [Investigation of harmonic waves in elastic layer using Nth order three-dimensional shells theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2010, Vol.16, No.4-2, Pp.693-701.
50. Zhavoronok S.I. *O primenenii razlichnykh uravnenij trekhmernoj teorii plastin N-go poryadka v zadachakh o dispersii normal’nykh voln v uprugom sloe [On the use of various equations of the n order plate theory in problems of normal wave dispersion in an elastic layer]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.25, No.4, Pp.595-613.
51. Zhavoronok S.I. *Issledovanie rasprostranyayushhikhsya mod garmonicheskikh voln v uprugom sloe na baze trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka [Investigation of propagating modes of harmonic waves in elastic layer using Nth order three-dimensional shells theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2011, Vol.17, No.2, Pp.278-287.
52. Zhavoronok S.I. *Issledovanie kinematiki normal’nykh voln v uprugom sloe na osnove trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka dlya razlichnykh znachenij volnovykh chisel [Kinematics of normal modes in elastic layer for some wave numbers investigation based on N-th order three-dimensional shells’ theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2012, Vol.18, No.1, Pp.45-56.

53. Zhavoronok S.I. *Formulirovka nachal’no-kraevoj zadachi priblizhennoj trekhmernoj teorii N-go poryadka v obobshhennykh peremeshheniyakh i ee prilozhenie k zadacham statsionarnoj dinamiki [A formulation of the three-dimensional approximated shells theory of N-th order using generalized displacements and its application to steady dynamics]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2012, Vol.18, No.3, Pp.333-344.
54. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *O prilozhenii razlichnykh variantov teorii obolochek N-go poryadka k nekotorym zadacham o progressivnykh volnakh [An application of various N-th order shell theories to normal waves propagation problems]*. Izvestiya Tul’skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2014, No.11-1, Pp.255-266.
55. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *An application of various n-th order shell theories to normal waves propagation problems*. PNRPU Mechanics Bulletin, 2015, No.2, Pp.36-59.
56. Zhavoronok S.I. *On the use of extended plate theories of Vekua-Amosov type for wave dispersion problems*. International J. of Computational Civil and Structural Engineering, 2018, Vol.14, No.1, Pp.36-48.
57. Zhavoronok S.I. *Primenenie rasshirennoj teorii plastin N-go poryadka k resheniyu zadachi o dispersii voln v gradientno-neodnorodnom sloe [An application of the nth order extended plate theory in the wave dispersion problem for a functionally graded layer]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.25, No.2, Pp.240-258.
58. Zhavoronok S.I. *Obobshhennye uravneniya Lagranzha vtorogo roda rasshirennoj trekhmernoj teorii N-go poryadka anizotropnykh obolochek [The generalized lagrange equations of the second kind for the extended three-dimensional N’th order theory of anisotropic shells]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2015, Vol.21, No.3, Ppp.370-381.
59. Zhavoronok S. I. *On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I.N. Vekua type*. Procedia Engnieering, 2015, Vol.111, Pp.888-895.
60. Zhavoronok S.I. *A general higher-order shell theory based on the analytical dynamics of constrained continuum systems*. Shell Structures: Theory and Applications – Proc. of the 11th SSTA 2017 Conf., 2018, Vol.4, Pp.189-192.
61. Zhavoronok S.I. *Modelling normal waves in functionally graded layers based on the unified hierarchical formulation of higher-order plate theories*. Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal, 2020, Vol.11, No.2, Pp.159-185.
62. Egorova O.V., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Use of the higher-order plate theory of I.N. Vekua type in problems of dynamics of heterogeneous plane waveguides*. Archives of Mechanics, 2020, Vol.72, No.1, Pp.1-13.
63. Egorova O.V., Kurbatov A.S., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Modeling of the dynamics of plane functionally graded waveguides based on the different formulations of the plate theory of I.N. Vekua type*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2021, Vol.28, No.5, Pp.506-515.
64. Kil’chevskij N.A., Kil’chinskaya G.A., Tkachenko N.E. *Analiticheskaya mekhanika kontinual’nykh sistem [Analytical Dynamics of Continuum Systems]*. Kiev, Naukova Dumka, 1979, 188 p.
65. Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S., Rabinskii L.N. *The Generalized Routh Equations in the Plate Theory of Nth Order and their Use in Problems of Normal Wave*

Dispersion in Heterogeneous Waveguides. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol.43, No.7, Pp.2010-2018.
66. Matsunaga H. *Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher order deformation theory.* Composite Structures, 2008, Vol.82, Pp.499-512.
67. Loveday D.W. *Semi-analytical finite element analysis of elastic waveguides subjected to axial loads*. Ultrasonics, 2009, Vol.49, Pp.298-300.

Поступила в редакцию 08 сентября 2023 года.

Сведения об авторах:
Жаворонок Сергей Игоревич – в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: zhavoronok@iam.ras.ru
Курбатов Алексей Сергеевич – с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: kurbatov@iam.ras.ru