УДК 539.3
EDN PZGRJM (https://elibrary.ru/pzgrjm)
DOI 10.33113/mkmk.ras.2024.30.01.01

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНО НАГРЕТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ*

Антуфьев Б.А., Егорова О.В., Рабинский Л.Н., Царева У.С.

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Приближенно решена задача об осесимметричном деформировании тонкой цилиндрической оболочки под действием локального температурного поля, действующего по кольцевой части ее боковой поверхности. Решение базируется на использовании классической теории оболочек и применении аппарата обобщенных функций. В связи с последним точное решение задачи невозможно и используется решение методом Бубнова в высоких приближениях. Рассмотрен также и вариант исследования обратной задачи, когда по известным перемещениям оболочки можно установить допускаемые температурные режимы ее термообработки. Приведены примеры. Результаты работы могут быть использованы при прогнозировании напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций в условиях нестационарного аэродинамического нагрева их отдельных участков, вызванного как конвективным теплопереносом, так и теплотой химических реакций (окисление, катализ).

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка; классическая теория; локальный нагрев по кольцевому участку; возмущенное состояние цилиндра; прямая и обратная задача; приближенное решение; метод Бубнова

DEFORMATION OF LOCALLY HEATED CYLINDRICAL SHELL

Antufiev B.A., Egorova O.V., Rabinsky L.N., Tsareva U.S.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

The problem of axisymmetric deformation of thin cylindrical shell under the influence of a local temperature field, acting along the annular part of its lateral surface. The solution is based on the use of the classical theory of shells and the use of the apparatus of generalized functions. In connection with the lattest, an exact solution to the problem is impossible and is used solution by the Bubnov method in high approximations. The option is also considered studying the inverse problem, when using known displacements of the shell it is possible establish permissible temperature conditions for its heat treatment. Given examples. The results of the work can be used in forecasting stress-strain state of thin-walled structures under conditions unsteady aerodynamic heating of their individual sections caused by both convective heat transfer and the heat of chemical reactions (oxidation, catalysis).

---

* *Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда №22-19 00352.*

Keywords: cylindrical shell; classical theory; local heating along the circular section; perturbed state of the cylinder; direct and inverse problem; approximate solution; Bubnov method

ВВЕДЕНИЕ

Цилиндрические оболочки как составные элементы тонкостенных конструкций летательных аппаратов (ЛА) в процессе их изготовления и тем более эксплуатации подвергаются различным тепловым воздействиям. Возникающие при этом температурные напряжения и перемещения изменяются в широких пределах в зависимости от характера действующих температурных полей и свойств материала оболочки. Они способны влиять на прочность и жесткость как отдельных элементов конструкций ЛА, так и на соответствующие характеристики всей системы в целом. Поэтому исследование их термоупругого состояния является важной и актуальной проблемой конструирования ЛА. Особо следует выделить задачи, возникающие в связи с построением режимов локального отжига кольцевых сварных швов тонкостенных цилиндров с целью понижения уровня их остаточных прогибов и напряжений. В этом случае температурные поля носят кольцевой локальный характер и ведут к возникновению местного деформированного состояния оболочки, влияющего на прочность и жесткость конструкции. Поэтому целью настоящей работы является определение локального возмущенного состояния оболочки в районе ее кольцевого нагретого участка, а также режимов термообработки с целью снижения остаточных напряжений и перемещений.

МЕТОДОЛОГИЯ

Решение задачи строится в рамках классической теории оболочек. Локальное температурное поле задается с помощью обобщенных функций Хевисайда. Вследствие этого разрешающее уравнение задачи содержит разрывные правые части, что связано с локальностью температурного поля. Поэтому получение точного решения невозможно и для исследования проблемы применяем приближенный метод Бубнова. Он сводит в общем случае разрешающее дифференциальное уравнение задачи к связанной системе линейных алгебраических соотношений относительно коэффициентов разложения прогибов оболочки. При специальном выборе аппроксимирующих функций в методе Бубнова она распадается на отдельные несвязанные уравнения, что резко облегчает решение. При исследовании обратной задачи при заранее известных допускаемых уровнях перемещений и напряжений можно определить предельные температурные нагрузки, обеспечивающие недостижение этих величин.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Пусть свободная от силовых нагрузок длинная тонкая цилиндрическая оболочка находится в условиях осесимметричного локального кольцевого нагрева, при котором достаточно прогревается по толщине. Поэтому градиентность температурного поля в этом направлении можно не учитывать. В таком приближении получаем задачу об осесимметричном деформировании цилиндра под действием статического локального кольцевого температурного поля изменяющегося только по его длине. На рис.1 показана цилиндрическая оболочка с заштрихованной областью нагрева температурой $t(x)$, ограниченной сечениями $x = \pm\beta$. В сечении $x = 0$, соответствующем середине цилиндра, температура достигает максимального значения t_0. По мере удаления от этого места температура падает, и на границах температурного поля $x = \pm\beta$ она равна нулю. В предлагаемой постановке задачи процессы, связанные с теплопередачей, не учитываются, а температурное поле считается стационарным.

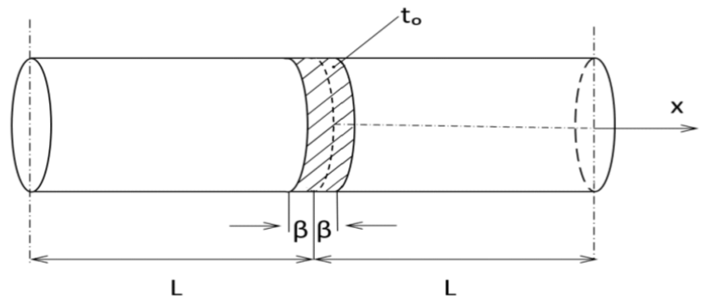

Рис.1.

С учетом принятых допущений разрешающее уравнение задачи в нагретой («горячей») зоне приобретает вид [1]

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{3\left(1-\nu^2\right)}{Rh^2}\left(\frac{w}{R} - \alpha T\right) = 0. \tag{1}$$

В «холодной» области цилиндра слагаемое αT равно нулю, и уравнение (1) становится однородным. Уравнение, сходное по структуре с (1), но для частного случая нагрева цилиндра приведено в монографии [5]. Кроме того, в [2,3,5] приведено решение многочисленных задач о разнообразном термоупругом деформировании оболочек. В (1) обозначено: $w,\ R,\ 2h$ – прогиб, радиус и толщина оболочки, а ν и α – коэффициенты Пуассона и линейного расширения ее материала, соответственно. Постоянное по толщине оболочки температурное поле $t(x)$ задаем функцией $t(x) = t_0\psi(x)$, где $\psi(x)$ – закон его изменения по продольной координате цилиндра x $\left(-\beta \le x \le \beta\right)$ (профиль температурного поля). Тогда

$$T = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} t(x)\,dx = t_0\psi(x). \tag{2}$$

Рассмотрим решение задачи, основанное на искусственном разделении цилиндра на «горячую» и «холодные« области. В первой из них получим решение (1) в виде [4]

$$w = e^{-\beta x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right) + e^{\beta x}\left(C_3\cos\beta x + C_4\sin\beta x\right) + w_0. \tag{3}$$

Здесь $\beta = \sqrt[4]{3\left(1-\nu^2\right)/4R^2h^2}$, константы C_1-C_4 подлежат определению из граничных условий, а w_0 – частное решение, определяемое конкретным видом температурного поля. В «холодной» области цилиндра его прогиб имеет вид

$$w_1 = e^{-\beta x}\left(C_5\cos\beta x + C_6\sin\beta x\right) + e^{\beta x}\left(C_7\cos\beta x + C_8\sin\beta x\right). \tag{4}$$

Оба решения (3) и (4) содержат как убывающую, так и возрастающие части. В задачах локального нагружения оболочек их возмущенное изгибное состояние быстро затухает по мере удаления от источника возмущения [4], поэтому в решениях (3) и (4) константы $C_3,\ C_4$ и $C_7,\ C_8$ полагаем равными нулю.

Постоянные $C_1,\ C_2$ и $C_5,\ C_6$ определим из условий сопряжения обеих частей цилиндра их границе

$$w = w_1,\ w' = w_1',\ \ w'' = w_1'',\ \ w''' = w_1'''. \tag{5}$$

Здесь и далее штрихами над функциями обозначены их производные по продольной координате. Условия (5) показывают, соответственно, равенство прогибов, углов поворота сечений, продольных изгибающих моментов и перерезывающих сил обоих частей оболочки на линии их соприкосновения. Предложенный вариант можно трактовать как «точное» решение задачи. Оно в конечном итоге сводится к численному решению системы четырех линейных алгебраических уравнений, получаемых из условий (5) относительно констант $C_1,\ C_2,\ C_5,\ C_6$. Такой подход достаточно искусственен в связи с делением цилиндра на две зоны и достаточно трудоемок, поэтому рассмотрим более логичное и простое в чисто вычислительном плане решение, основанное на использовании для задания области локального нагрева разности обобщенных функций Хевисайда H.

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{3\left(1-\nu^2\right)}{R^2 h^2} w = \frac{3\left(1-\nu^2\right)}{Rh^2}\alpha t_0 \psi\left(x\right)\left(H\left(x+\beta\right) - H\left(x-\beta\right)\right). \tag{6}$$

Это уравнение имеет разрывную правую часть, что связано с локальностью температурного поля $t\left(x\right)$. Формально для его решения можно использовать описанный ранее подход, но он приведет к еще более громоздким вычислениям, поэтому для его решения используем приближенный метод Бубнова. В соответствии с ним представим прогиб оболочки $w\left(x\right)$ в виде разложения по системе задаваемых координатных функций

$$w = \sum_{i=1}^{N} w_i \varphi_i\left(x\right), \tag{7}$$

где w_i – неизвестные коэффициенты, а $\varphi_i\left(x\right)$ – задаваемые функции, удовлетворяющие граничным условиям на торцах оболочки при $x = \pm L$. Применяя к дифференциальному уравнению (3) процедуру метода Бубнова, сведем задачу в общем случае к связанной системе N линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов w_i в разложении (7) вида

$$\sum_{i=1}^{N} w_i a_{ij} = b_j \quad \left(j = 1, 2, \ldots N\right), \tag{8}$$

где

$$a_{ij} = \int_{-L}^{L} \varphi_i^{IV} \varphi_j dx + \frac{3\left(1-\nu^2\right)}{R^2 h^2} \int_{-L}^{L} \varphi_i \varphi_j dx, \quad b_j = \frac{3\left(1-\nu^2\right)}{Rh^2}\alpha t_0 \int_{-\beta}^{\beta} \psi \varphi_j dx. \tag{9}$$

Уравнения (8) решаются обычным путем. При задании аппроксимирующих функций ортогональными система (8) распадается на N отдельных, не связанных друг с другом, уравнений. Последовательно решая их, найдем

$$w_i = \frac{b_i}{a_{ii}} = \frac{3\alpha t_0 \left(1-\nu^2\right) \int_{-\beta}^{\beta} \psi \varphi_i dx}{R^2 h \int_{-L}^{L} \varphi_i^{IV} \varphi_i dx + \frac{3\left(1-\nu^2\right)}{R} \int_{-L}^{L} \varphi_i \varphi_j dx}. \tag{10}$$

После нахождения всех коэффициентов w_i по соотношениям теории оболочек можно найти продольные M_X и кольцевые M_K изгибающие моменты [1,4]

$$M_X = -D\frac{d^2w}{dx^2}, \quad M_K = -\nu M_X = -\nu D\frac{d^2w}{dx^2}, \tag{11}$$

где $D = Eh^3 \big/ 12\left(1-\nu^2\right)$ – цилиндрическая жесткость оболочки. Соответствующие этим моментам нормальные изгибающие напряжения равны

$$\sigma_X = \pm\frac{1}{4h^2}M_X, \quad \sigma_K = \pm\frac{1}{4h^2}M_K = \pm\nu\sigma_X. \tag{12}$$

Рассматриваемую проблему можно использовать и при решении обратной задачи, когда по заданному полю перемещений необходимо определить вызывающую его температурную нагрузку, вследствие чего при заданных ограничениях на прогибы цилиндра можно найти предельные уровни нагрева оболочки. Особенно легко это сделать при выборе функций φ_i в разложении (7) ортогональными. Тогда из соотношения (9) получим

$$t_{0i} = \frac{w_i\left(hR^2\int\limits_{-L}^{L}\varphi_i^{IV}\varphi_i dx + \frac{3\left(1-\nu^2\right)}{R}\int\limits_{-L}^{L}\varphi_i^2 dx\right)}{3\alpha\left(1-\nu^2\right)\int\limits_{-\beta}^{\beta}\psi\varphi_i dx} \qquad \left(i = 1,2,\ldots N\right). \tag{13}$$

Каждая из этих температур соответствует изгибу цилиндра по форме φ_i. Сравнивая их между собой, можно определить предельную допускаемую тепловую нагрузку.

ПРИМЕР

Рассмотрим свободно опертую на обоих торцах при $x = \pm L$ оболочку, в центре которой действует локальное кольцевое температурное поле $t\left(x\right) = t_0\psi$. Профиль этого поля, задаваемый функцией $\psi = \cos\left(\pi x/2\beta\right)$, симметричен относительно среднего сечения оболочки, определяемого продольной координатой $x = 0$. Вследствие вышесказанного деформированное состояние оболочки будет также симметрично относительно этого сечения, поэтому аппроксимирующие функции в разложении (2) принимаем в виде $\varphi_i = \cos\left(i\pi x/2L\right)$ $\left(i = 1,2,\ldots N\right)$. Тогда, в соответствии с принятой аппроксимацией температурного поля ψ и прогибов цилиндра φ_i, после соответствующих вычислений преобразуем формулы (10) и (13) к виду

$$w_i = \frac{6\alpha t_0\left(1-\nu^2\right)\Psi}{R^2h\left(\frac{i\pi}{2L}\right)^4 + \frac{3\left(1-\nu^2\right)}{R}}, \quad t_{0i} = \frac{w_i\left(R^2h\left(\frac{i\pi}{2L}\right)^4 + \frac{3\left(1-\nu^2\right)}{R}\right)}{6\alpha\left(1-\nu^2\right)\Psi}. \tag{14}$$

В обеих формулах обозначено

$$\Psi=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{i\pi\beta}{L}\right)}{\frac{\pi L}{2\beta}-\frac{i\pi}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{i\pi\beta}{L}\right)}{\frac{\pi L}{2\beta}+\frac{i\pi}{2}}.$$

Вся конструкция имеет следующие безразмерные параметры: $L/R=5$, $R/2h=50$. На рис.2 показаны зависимости безразмерных прогибов $w^*=w/2h\alpha t_0$ (кривая 1) и безразмерных продольных нормальных напряжений $\sigma_X^*=\sigma_X/E$ (кривая 2) в среднем сечении цилиндра $(x=0)$ от безразмерной длины нагретого участка β/L. Значению $\beta/L=1$ соответствует температурное поле, действующее по всей длине оболочки. Безразмерные нормальные кольцевые напряжения σ_K^* в ν раз меньше продольных напряжений в соответствии с (11), (12). Тот факт, что с уменьшением длины зоны нагретого участка уменьшаются и прогибы, и напряжения связан с тем, что суммарное количество тепла, действующего на цилиндр, тоже падает. Приведенное решение можно косвенно сравнить с решением плоской задачи для равномерно нагретого кольца, мысленно выделенного из оболочки. В этом случае его радиальные перемещения равны $w=R\alpha t_0$ [5]. Для принятых размеров конструкции они составят $w^*=w/2h\alpha t_0=50$, что почти в три раза превышает ранее полученные результаты. Это объясняется тем, что здесь не учитывается поддерживающее влияние соседних участков цилиндра. В связи с этим решение плоской задачи для произвольно нагретых оболочек можно применять исключительно как оценивающее.

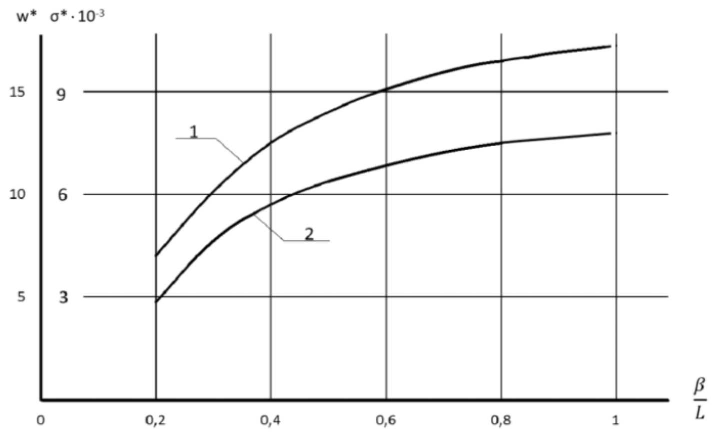

Рис.2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено приближенное решение задачи о деформировании локально нагретой по кольцевому участку поверхности цилиндрической оболочки. Для решения использован метод Бубнова, сводящий проблему к исследованию системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов в разложении прогибов цилиндра. Кроме прямой задачи определения напряженно деформированного состояния оболочки, рассмотрена и обратная задача нахождения предельной температуры ее нагрева. В примере численно исследовано влияние размеров теплового пятна на прогибы и напряжения в цилиндре. Показано, что с его увеличением деформированное состояние системы также нарастает. Кроме того, показано, что использование плоской модели задачи ведет к завышенным значениям прогибов, и его можно использовать только в качестве оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. *Оптимизация нагрева оболочек и пластин*. – Киев: Наукова думка, 1979. – 303 с.
2. Коваленко А.Д. *Введение в термоупругость*. – Киев: Наукова думка, 1970. – 307 с.
3. Нерубайло Б.В. *Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек*. – М.: Машиностроение, 1983. – 245 с.
4. Образцов И.Ф., Булычев Л.А., Васильев В.В. и др. *Строительная механика летательных аппаратов: Учебник для авиационных специальностей вузов*. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.
5. Тимошенко С.П. *Пластинки и оболочки*. – М.-Л.: Огиз, 1948. – 495 с.

REFERENCES

1. Grigolyuk E.I., Podstrigach Ya.S., Burak Ya.I. *Optimizatsiya nagreva obolochek i plastin [Optimization of shell and plates heating]*. Kiev, Naukova dumka, 1979, 303 p.
2. Kovalenko A.D. *Vvedenie v termouprugost’ [Introduction to thermoelasticity]*. Kiev, Naukova dumka, 1970, 307 p.
3. Nerubajlo B.V. *Lokal’nye zadachi prochnosti tsilindricheskikh obolochek [Local problems of strength of cylindrical shells]*. Moskva, Mashinostroenie, 1983, 245 p.
4. Obrazcov I.F., Bulychev L.A., Vasil’ev V.V. i dr. *Stroitel’naya mekhanika letatel’nykh apparatov: Uchebnik dlya aviatsionnykh spetsial'nostej vuzov [Construction mechanics of aircraft: Textbook for aviation specialties of universities]*. Moskva, Mashinostroenie, 1986, 536 p.
5. Timoshenko S.P. *Plastinki i obolochki [Plates and shells]*. Moskva-Leningrad, Ogiz, 1948, 495 p.

Поступила в редакцию 07 декабря 2023 года.

Сведения об авторах:

Антуфьев Борис Андреевич – д.т.н., проф., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: Antufjev.bor@yandex.ru

Егорова Ольга Владимировна – к.ф.-м.н., доц., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: egorovaov@mai.ru

Рабинский Лев Наумович – д.ф.-м.н., проф., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: rabinskiy@mail.ru

Царева Ульяна Сергеевна – техник, ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: tzrva@mail.ru