

УДК 539.371  
EDN CYAZWF (<https://elibrary.ru/cyazwf>)  
DOI 10.33113/mkmk.ras.2024.30.03.01



## РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ АУКСЕТИЧНЫХ МАТЕРИАЛАХ\*

Кривошеина М.Н., Туч Е.В.

*ФГБУН Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,  
г. Томск, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Значения скоростей распространения упругих волн в изотропных и анизотропных материалах в значительной мере определяют время процесса упругопластического деформирования и разрушения твердых тел в условиях ударного нагружения. Рассмотрены особенности распространения упругих волн в элементах из анизотропных материалов-ауксетиков, характеризующихся отрицательными значениями коэффициентов Пуассона. В анизотропных материалах скорости распространения упругих волн зависят от направления, при наличии отрицательных значений коэффициентов Пуассона в сплошных твердых телах в перпендикулярных направлениях имеются значения коэффициентов Пуассона, намного превышающие предельные 0.5. Методом конечных элементов в динамической постановке моделируется ударное нагружение пластин, цилиндров компактных форм и тонких цилиндров из монокристаллического цинка о жесткую стенку в трехмерной постановке. Моделирование деформирования тел проведено с использованием конечных элементов в форме тетраэдров, традиционно используемых в задачах бронебаллистики. Показаны особенности процессов распространения упругих волн в телах от тонких цилиндров до тонких стержней при непрерывном изменении формфакторов, определяемых отношением высоты цилиндра к его диаметру. Рассмотрен вопрос влияния знака коэффициента Пуассона в анизотропном материале на коэффициенты восстановления скорости удара тела о жесткую стенку. Проведены параметрические исследования влияния абсолютной величины отрицательного значения коэффициента Пуассона на коэффициент восстановления скорости после удара о жесткую стенку. Показано отличие процессов распространения волн при изменении осей симметрии монокристалла цинка относительно осей симметрии цилиндров. Для минимизации количества характеристик, влияющих на процесс распространения продольных волн, удобно проводить исследования на анизотропных материалах, т.к. плотность не варьируется, варьируемы только модули Юнга и коэффициенты Пуассона. Показано, что скорость распространения продольной волны зависит от одной пары коэффициентов Пуассона, измеряемых в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, а деформирование в этой плоскости определяется другой парой коэффициентов Пуассона, что важно для ауксетичных материалов.

**Ключевые слова:** монокристаллы; скорости упругих волн; коэффициент Пуассона; удар

---

\*Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2021-0011.

# PROPAGATION OF ELASTIC WAVES IN ANISOTROPIC AUXETIC MATERIALS

Krivosheina M.N., Tuch E.V.

*Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russia*

## ABSTRACT

The values of the velocities of propagation of elastic waves in isotropic and anisotropic materials largely determine the time of the process of elastoplastic deformation and destruction of solids under shock loading conditions. The features of the propagation of elastic waves in elements made of anisotropic auxetic materials characterized by negative values of Poisson's ratios are considered. In anisotropic materials, the speed of propagation of elastic waves depends on the direction; in the presence of negative values of Poisson's ratios in solid solids in perpendicular directions, there are values of Poisson's ratios that far exceed the limiting 0.5. Using the finite element method in a dynamic formulation, the impact loading of plates, cylinders of compact shapes and thin cylinders of single-crystalline zinc on a rigid wall in a three-dimensional formulation is simulated. Modeling of body deformation was carried out using finite elements in the form of tetrahedrons, traditionally used in armored ballistics problems. The features of the processes of propagation of elastic waves in bodies from thin cylinders to thin rods with a continuous change in form factors, determined by the ratio of the height of the cylinder to its diameter, are shown. The issue of the influence of the sign of Poisson's ratio in an anisotropic material on the coefficients of recovery of the velocity of a body impact on a rigid wall is considered. Parametric studies have been carried out on the influence of the absolute value of the negative value of Poisson's ratio on the speed recovery coefficient after an impact with a rigid wall. The difference in the processes of wave propagation is shown when the symmetry axes of a zinc single crystal change relative to the symmetry axes of the cylinders. To minimize the number of characteristics that influence the process of propagation of longitudinal waves, it is convenient to conduct research on anisotropic materials, because the density does not vary, only Young's moduli and Poisson's ratios vary. It is shown that the velocity of propagation of a longitudinal wave depends on one pair of Poisson's ratios, measured in a plane perpendicular to the direction of propagation, and the deformation in this plane is determined by another pair of Poisson's ratios, which is important for auxetic materials.

**Keywords:** single crystals; elastic wave velocities; Poisson's ratio; impact

## ВВЕДЕНИЕ

В различных областях промышленности требуются материалы, обладающие экстремальными механическими свойствами. Выбор материалов с коэффициентами Пуассона, имеющими различные знаки, позволяет принципиально изменять процессы деформирования элементов конструкций, а в условиях ударного нагружения дополнительно изменять волновую картину деформирования из-за зависимости величин скоростей распространения волн от коэффициентов Пуассона. Исследования процессов деформирования в ауксетичных монокристаллах позволяют выявить закономерности влияния величин коэффициентов Пуассона на волновую картину деформирования в них, на скорости распространения упругих продольных волн в зависимости от направления ударного нагружения, а также на коэффициенты восстановления

начальной скорости удара, отражающие процесс перехода кинетической энергии в потенциальную энергию деформирования и снова в кинетическую после отделения образца от жесткой стенки. Исследования изделий из материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона, как, например, в работе [1], являются весьма актуальными на сегодняшний день. В работе Lloyd J.T., Becker R. [2] представлена термоупругая вязкопластическая конститутивная модель высокоскоростного деформирования в монокристаллах. Численные расчеты с применением данной модели показали хорошее согласие с экспериментальными данными ударного нагружения монокристалла алюминия. В работах Winey J.M. и Gupta Y.M. [3-5] была разработана континуальная анизотропная модель, включающая кристаллическую пластичность. Математическая модель позволяет исследовать распространение волн напряжения большой амплитуды вдоль произвольных направлений в кристаллах любой симметрии и хорошо согласуется с результатами формулировки конечных деформаций. В работах Winey J.M. и Gupta Y.M. были представлены результаты моделирования ударной нагрузки для монокристаллов кварца, сапфира, фторида лития (LiF) и меди. Однако все расчеты, представленные в указанных работах, выполнены в одномерной постановке. Как было продемонстрировано в работах Arakere N.K., Siddiqui S., Ebrahimi F. [6,7], именно применение численного моделирования в трехмерной постановке имеет большое значение для исследования деформирования монокристаллических образцов. Это следует из того, что для анизотропных материалов процессу одномерной деформации, реализуемому в условиях натуральных экспериментов, соответствует процесс формирования трехмерного напряженного состояния.

Для учета трехмерного напряженного состояния необходимо введение различных коэффициентов Пуассона и модулей сдвига, отражающих анизотропию механических свойств материала во всех направлениях. В работе [8] представлены результаты исследований на основе анализа акустических волновых уравнений, которые могут прогнозировать отсутствие или наличие множественных упругих ударных волн в монокристалле, подвергнутом ударной нагрузке вдоль определенной кристаллографической ориентации. Представлены результаты молекулярно-динамического моделирования для монокристаллов Си и Та. Авторы работы [9] представили результаты численного моделирования распространения упругих волн большой амплитуды в монокристаллах. Представлены результаты моделирования ударного нагружения монокристаллов кварца и сапфира. Целью работы является выявление в рамках одного материала, сменяя направления осей симметрии материала относительно оси симметрии цилиндрических тел, роли коэффициентов Пуассона, определенных в различных плоскостях, на процесс распространения упругих волн и на коэффициент восстановления скорости цилиндров после удара при различных формфакторах.

## **1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ-АУКСЕТИКОВ**

### **1.1. Распространение упругих волн в анизотропных материалах-ауксетиках.**

Скорость распространения упругой продольной волны вдоль оси симметрии в цилиндрах с большими диаметрами из анизотропных материалов, определяется по той же формуле, что и для безграничных анизотропных материалов

$$C_{ii} = \sqrt{\frac{C_{ii}}{\rho}}, \quad (1)$$

где  $C_{ii}$  – упругие постоянные,  $\rho$  – плотность,  $i$  изменяется от 1 до 3.

Для материалов с ортотропной симметрией матрицу упругих постоянных можно записать с использованием технических характеристик материалов [12]

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_2 A} \left( \frac{1}{E_3} - \frac{v_{23}^2}{E_2} \right) & \frac{1}{E_3 A} \left( \frac{v_{31} v_{23}}{E_2} + \frac{v_{12}}{E_1} \right) & \frac{1}{E_2 A} \left( \frac{v_{12} v_{23}}{E_1} + \frac{v_{31}}{E_3} \right) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{E_3 A} \left( \frac{v_{31} v_{23}}{E_2} + \frac{v_{12}}{E_1} \right) & \frac{1}{E_3 A} \left( \frac{1}{E_1} - \frac{v_{31}^2}{E_3} \right) & \frac{1}{E_1 A} \left( \frac{v_{12} v_{13}}{E_3} + \frac{v_{23}}{E_2} \right) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{E_2 A} \left( \frac{v_{12} v_{23}}{E_1} + \frac{v_{31}}{E_3} \right) & \frac{1}{E_1 A} \left( \frac{v_{12} v_{13}}{E_3} + \frac{v_{23}}{E_2} \right) & \frac{1}{E_1 A} \left( \frac{1}{E_2} - \frac{v_{12}^2}{E_1} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $A = \frac{1}{E_1 E_2 E_3} \left( 1 - 2v_{12} v_{23} v_{31} - \frac{E_1}{E_3} v_{31}^2 - \frac{E_2}{E_1} v_{12}^2 - \frac{E_3}{E_2} v_{23}^2 \right)$ ,  $E_i$  – модули Юнга,

$v_{ij}$  – коэффициенты Пуассона.

Величины скоростей распространения волн определяются характеристиками, измеряемыми в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. На скорости распространения упругих продольных волн в стержнях коэффициенты Пуассона не влияют, и они не фигурируют в формулах.

## 1.2. Постановка задачи.

Проведено исследование процесса распространения упругих волн при ударном нагружении цилиндров и шаров о жесткую стенку. Модель упругой деформации анизотропного материала в условиях динамического нагружения включает в себя: уравнение неразрывности, уравнения движения сплошной среды [9], а также закона Гука с использованием величин полных напряжений и скоростей полных деформаций

$$\frac{D\sigma_{ij}}{Dt} = C_{ijkl} e_{kl}, \quad (3)$$

где  $\frac{D}{Dt}$  – коротационная производная Яуманна [10],  $C_{ijkl}$  – компоненты симметричного тензора упругих постоянных,  $\sigma_{ij}$  и  $e_{kl}$  – компоненты

симметричного тензора полных напряжений и тензора скоростей деформаций.

Проведено моделирование процессов распространения упругих продольных волн в цилиндрах и шарах из монокристаллического цинка в случаях совпадения направления осей симметрии и направления удара с направлениями  $[0001]$  либо  $[\bar{1}010]$ . Ударное нагружение о жесткую стенку моделируется с помощью метода конечных элементов в трехмерной постановке. Как было показано в работах [11,12], геометрия ударника оказывает значительное влияние на процесс распространения продольных упругих волн, также на этот процесс влияет коэффициент Пуассона. Цилиндры имели одинаковые высоты –  $L = 50$  мм, но различные диаметры  $D$ : от 5 мм до 5000 мм, формфактор  $(L/D)$  изменялся в диапазоне от 10 до 0.01.

На рис.1 показаны исходные конфигурации цилиндров с отношениями  $L/D = 3.3, 1, 0.55$ . В начальный момент времени ( $t = 0$ ), значения скоростей

$$u_i(0) = v_i(0) = 0, \quad w_i(0) = V_0, \quad \rho = \rho_0,$$

где  $u_i, v_i, w_i$  – компоненты скорости в декартовой системе координат 0123,  $\rho_0$  – начальная плотность монокристаллического цинка. На контактной поверхности цилиндров и шариков с жесткой стенкой реализовано условие скольжения без трения. Дискретизация расчетной области в цилиндрах выполнена с помощью регулярной сетки, в шариках – нерегулярной, в качестве элементов используются тетраэдры, их количество варьируется в зависимости от диаметра цилиндра в пределах 150000-250000. Задача решается методом конечных элементов, модифицированным для решения задач в динамической постановке [10].

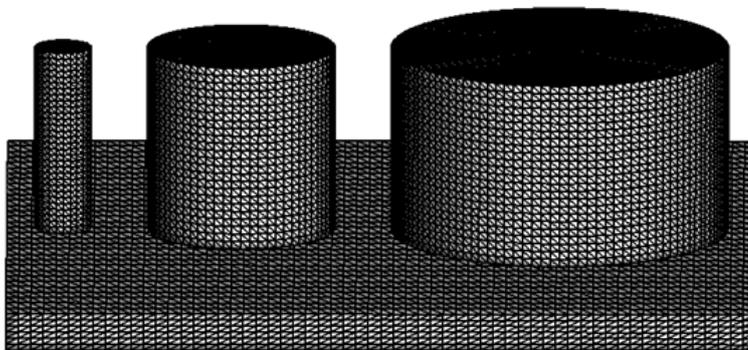


Рис.1. Исходные конфигурации цилиндров с различными формфакторами.

Упругие постоянные монокристаллического цинка когда ось 01 перпендикулярна плоскости изотропии:  $C_{11} = 6.1 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{22} = C_{33} = 1.61 \cdot 10^{11}$  Па,  $C_{12} = C_{13} = 5 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{44} = 3.83 \cdot 10^{10}$  Па, технические характеристики:  $E_{11} = 3.5443 \cdot 10^{10}$  Па,  $E_{22} = E_{33} = 11.9697 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_{23} = \nu_{32} = -0.0567$ ,  $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.25616$ ,  $\nu_{31} = \nu_{21} = 0.86536$ ,  $G_{12} = G_{13} = 3.8292 \cdot 10^{10}$ ,  $G_{23} = 6.3455 \cdot 10^{10}$ ,  $\rho_0 = 7140$  кг/м<sup>3</sup>. Скорости распространения продольных волн в направлении  $[0001]$  составляют 2923 м/с, в направлении  $[\bar{1}010]$  – 4749 м/с. Значения скоростей волн Похгаммера в направлении  $[0001]$  составляют 2227.7 м/с (меньше на 24%) и 4094.4 (меньше на 14%) в направлении  $[\bar{1}010]$ .

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ

### 2.1. Отличия процессов деформирования в шариках и компактных цилиндрах из анизотропных ауксетичных материалов.

Влияние коэффициентов Пуассона материала на процессы деформирования элементов конструкций может определяться исходной геометрией. Для примера проведено сравнение деформирования компактного цилиндра и шарика, исходные конфигурации с дискретизацией на конечные элементы которых показаны на рис.2. Высота компактного цилиндра 10 мм, равна его диаметру и диаметру шарика. Процессы их деформирования демонстрируют значительные отличия, что выражается во временах отскока от жесткой стенки и коэффициентах восстановления скорости. Время выхода на постоянную скорость центра масс в шариках кратно превышает время двукратного пробега продольных волн в направлении удара, особенно при низких начальных скоростях удара.

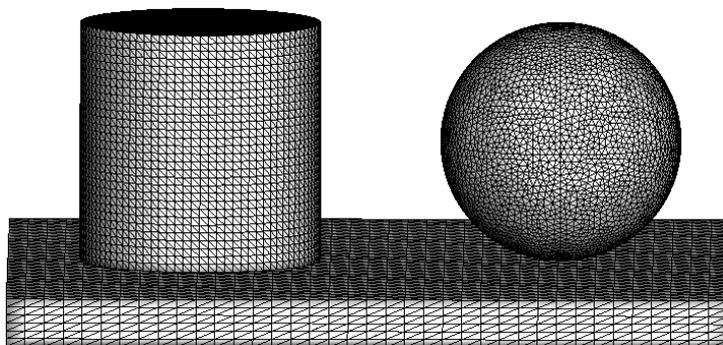


Рис.2. Исходные конфигурации компактного цилиндра и шарика.

При ударе шарика в направлении, совпадающем с направлением оси  $[0001]$ , перпендикулярная плоскость является плоскостью изотропии, в которой оба одинаковых коэффициента Пуассона отрицательны. Деформирование шарика осесимметричное, изменение радиусов в плоскости, перпендикулярной направлению удара, показано сплошной кривой на рис.3.

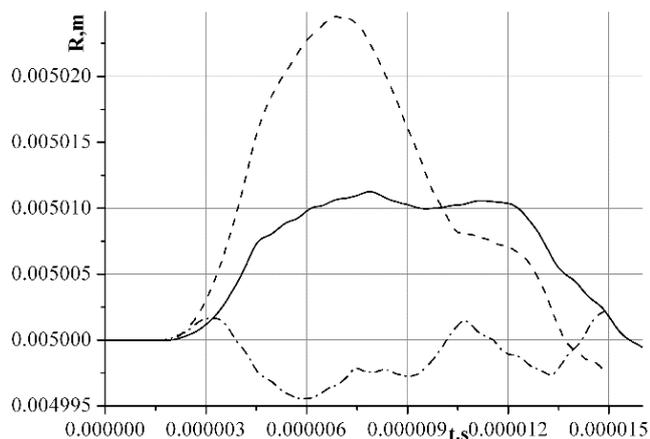


Рис.3. Изменения радиусов шариков во времени в направлениях 02 и 03 (сплошная кривая), 01 (пунктирная кривая) и 02 (штрихпунктирная кривая).

При ударе в направлении, совпадающем с  $[\bar{1}010]$ , из-за отрицательных значений коэффициентов Пуассона в плоскости 023, в плоскости, перпендикулярной направлению удара, возникает эллипсоид в сечении шара, причем в направлении 02 в течение времени контакта шара и жесткой стенки радиус шара уменьшается (штрихпунктирная линия на рис.3), а после отскока восстанавливается. В плоскости 013, наоборот, коэффициент Пуассона положительный и равен 0.86, поэтому увеличение радиуса шара по оси 03 в процессе его контакта с жесткой стенкой достигает максимальных величин (пунктирная кривая, рис.3). На рис.4 и рис.5 сплошными линиями показаны изменения во времени координат верхних точек шариков: при совпадении оси удара с направлением  $[0001]$  (рис.4) и направлением  $[\bar{1}010]$  на рис.5. На рис.4а и 5а кривые соответствуют начальной скорости удара 10 м/с, на рис.4б и 5б соответствуют начальной скорости удара 50 м/с. Если направление удара совпадает с направлением оси  $[0001]$ , то в шариках скорость продольной волны в направлении удара зависит от величин  $v_{23} = v_{32}$ , а изменение радиусов зависит от величин  $v_{12} = v_{13}$ . Если удар в направлении  $[\bar{1}010]$ , то в шариках скорость продольной волны зависит от различных коэффициентов  $v_{12}$  и  $v_{21}$ , а изменение радиусов в сечении зависит от  $v_{31}$  и  $v_{32}$ . То есть скорость распространения волны определяется одной парой коэффициентов Пуассона, а изменение радиусов в плоскости, перпендикулярной направлению удара, определяется другой парой коэффициентов Пуассона, что наглядно видно по форме кривых на рис.3.

В компактных цилиндрах ( $L/D = 1$ ) из изотропных материалов время выхода на постоянную скорость центра масс может превышать время, необходимое для прохождения продольной волны сжатия до свободной поверхности и отраженной волны растяжения до жесткой стенки [11,12]. Время до итогового отскока увеличивается по причине возникновения повторных отскоков некоторых точек цилиндров от жесткой стенки из-за разделения фронта упругой волны на несколько с различной амплитудой и из-за повторных отскоков некоторых точек цилиндра, вызванных поперечной деформацией. Наличие дополнительных отскоков в значительной мере определяются значениями коэффициентов Пуассона.

В компактных цилиндрах при направлении оси симметрии монокристаллического цинка  $[0001]$  вдоль оси нагружения волна сжатия выходит на свободную поверхность в цилиндре в 5 мкс, в шариках сжатие в направлении удара продолжается до 13 мкс при начальной скорости удара 10 м/с и до 9 мкс при начальной скорости удара 50 м/с (рис.4).

При совпадении оси симметрии компактного цилиндра с направлением  $[\bar{1}010]$  волна сжатия выходит на свободную поверхность в цилиндре в 2.2 мкс независимо от начальной скорости удара, в шариках уменьшение диаметра продолжается до 10 мкс при начальной скорости удара 10 м/с и до 7 мкс при начальной скорости удара 50 м/с (рис.5).

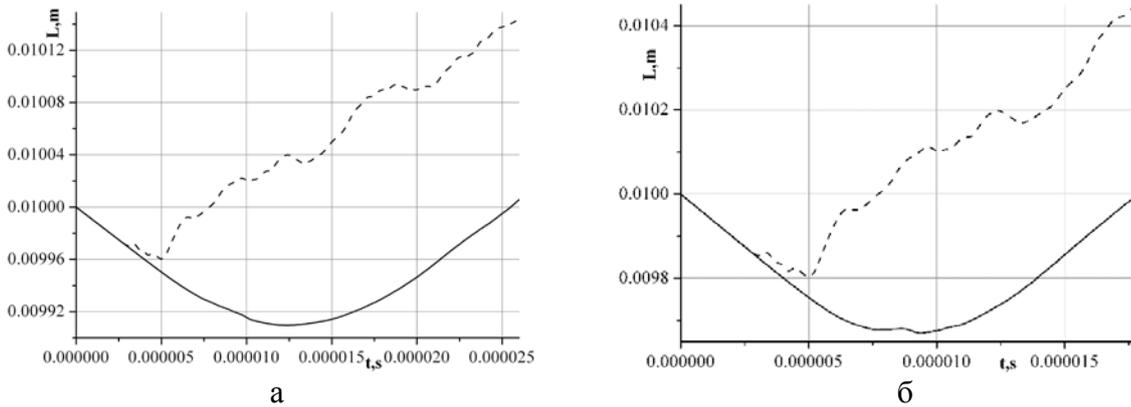


Рис.4. Изменения во времени координат высот шариков (сплошные кривые) и цилиндров (штриховые линии) при начальной скорости удара: а – 10 м/с; б – 50 м/с; удар вдоль оси  $[0001]$ .

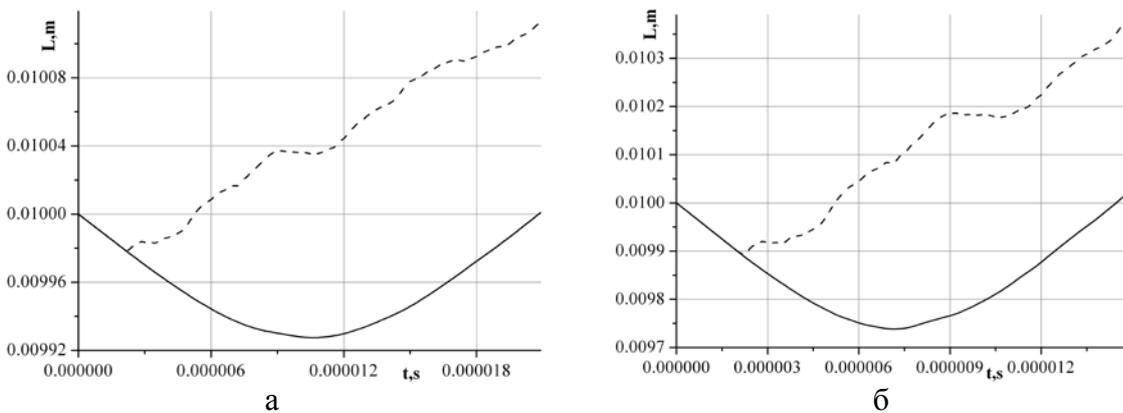


Рис.5. Изменения во времени координат высот шариков (сплошные кривые) и цилиндров (штриховые линии) при начальной скорости удара: а – 10 м/с; б – 50 м/с; удар вдоль оси  $[\bar{1}010]$ .

## 2.2. Коэффициенты восстановления скорости цилиндров после удара и процессы распространения упругих волн при различных формфакторах.

На рис.6 показаны зависимости скоростей распространения упругих продольных волн от формфакторов тел цилиндрической формы. Сплошная кривая соответствует случаю, когда ось симметрии цилиндра и направление удара совпадают с направлением  $[0001]$  в монокристалле. Из анализа сплошной кривой видна существенная зависимость скорости продольной волны от формфакторов в диапазоне  $0.33 < L/D < 3$ . При  $L/D > 3$  для стержневых форм наблюдается постоянная скорость, равная скорости волны Похгаммера, при  $L/D < 0.33$  также наблюдается постоянная скорость, равная скорости продольной волны для безграничного пространства. Следствием этого является неоднозначность результатов измерения скоростей распространения упругих продольных волн в элементах, имеющих компактную форму (цилиндры, кубики), а также во всем диапазоне  $0.33 < L/D < 3$ .

В случае, когда ось симметрии цилиндра и направление удара совпадают с направлением  $[\bar{1}010]$  в монокристалле, плоскость, перпендикулярная направлению распространения волны, образована осями симметрии материала  $[0001]$  и  $[\bar{1}010]$ . В этой плоскости модули Юнга и коэффициенты Пуассона различны –  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  и  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$ . Зависимость скоростей распространения упругих продольных волн от формфакторов тел цилиндрической формы, показанная штриховой кривой, имеет меньший диапазон ( $1.25 < L/D < 3$ ) изменения формфакторов, в котором наблюдаются существенные колебания скоростей распространения волн. При  $L/D > 3$  наблюдается постоянная скорость, равная скорости волны Похгаммера, при  $L/D < 1.25$  также наблюдается постоянная скорость, равная скорости продольной волны для безграничного пространства. Максимальное изменение величины скорости упругой продольной волны в зависимости от формфакторов достигает 21%.

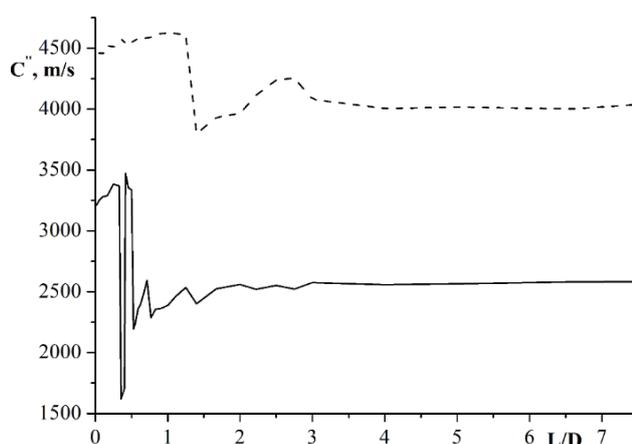


Рис.6. Зависимости скоростей распространения продольных волн в цилиндрах от формфакторов при совмещении с осью симметрии цилиндров осей симметрии монокристалла цинка: сплошная линия с  $[0001]$ , штриховая – с  $[\bar{1}010]$ .

На рис.7 показаны зависимости коэффициентов восстановления начальной скорости цилиндров от формфакторов. Сплошной линией показана зависимость для случая совпадения направления удара с осью симметрии цилиндра и осью  $[0001]$  монокристалла цинка, штриховая линия – с  $[\bar{1}010]$ . Минимальное значение коэффициента восстановления скорости на сплошной линии равно 0.54, потеря начальной скорости составляет 46% при формфакторе  $L/D = 0.37$ , кроме того, у цилиндров с формфакторами в диапазоне  $0.35 < L/D < 3$  коэффициенты восстановления скорости изменяются от 0.54 до 0.91.

Из анализа формы зависимости коэффициентов восстановления скорости цилиндров от формфакторов при совпадении направления удара и направления оси  $[\bar{1}010]$  монокристалла цинка видно, что минимальное значение коэффициента восстановления скорости на штриховой линии равно 0.72, потеря начальной скорости составляет 28% в диапазоне изменения формфактора

$0.67 < L/D < 1.4$ . В диапазоне изменения формфакторов  $1.25 < L/D < 3$  коэффициенты восстановления начальной скорости изменяются от 0.72 до 0.85.

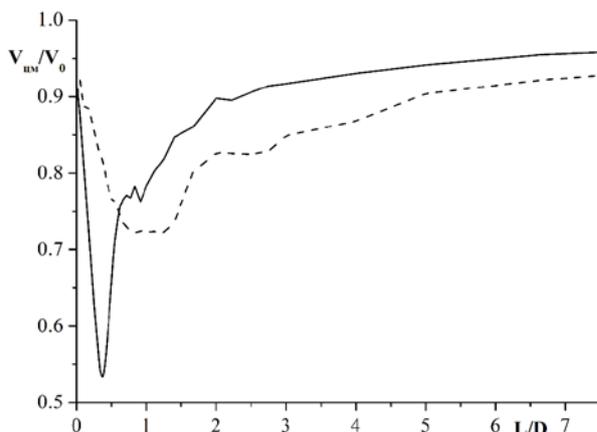


Рис.7. Зависимости коэффициентов восстановления скорости цилиндров от формфакторов при совмещении с осью симметрии цилиндров осей симметрии монокристалла цинка: сплошная линия с  $[0001]$ , штриховая – с  $[\bar{1}010]$ .

Для исследования роли отрицательных значений коэффициентов Пуассона на коэффициент восстановления начальной скорости после их отделений от жесткой стенки, проведены расчеты для цилиндров с  $L/D = 0.385$  в направлении нагружения, совпадающем с направлением  $[0001]$ . В расчетах варьировались в монокристалле цинка только коэффициенты Пуассона в плоскости изотропии от  $\nu_{23} = \nu_{32} = -0.0567$  до  $\nu_{23} = \nu_{32} = -0.22$ . Изменение только одной технической характеристики изменяет величины всех упругих постоянных, определяющих изменение объема в процессе деформирования анизотропного материала. Варьирование коэффициентов Пуассона в плоскости изотропии от  $\nu_{23} = \nu_{32} = -0.0567$  до  $\nu_{23} = \nu_{32} = -0.22$  не вносит заметных изменений ни в процесс деформирования, ни в интегральные характеристики процесса – коэффициент восстановления начальной скорости или время контакта цилиндра и жесткой стенки. В этих случаях отделение цилиндров от жесткой стенки происходит после двухкратных пробегов упругих волн до свободной поверхности цилиндра и затем до жесткой стенки. При  $\nu_{23} = \nu_{32} = -0.22$  значение коэффициента восстановления скорости равно 0.51, то есть потеря начальной скорости увеличилась с 46% до 49%.

При замене в монокристаллическом цинке коэффициентов Пуассона с  $\nu_{23} = \nu_{32} = -0.0567$  на  $\nu_{23} = \nu_{32} = +0.22$  значение коэффициента восстановления начальной скорости цилиндров при  $L/D = 0.385$  составляет 0.76, то есть потеря начальной скорости уменьшилась в 2 раза и составляет 24%. Сравнение процессов деформирования и распространения волн в анизотропных материалах, отличающихся только знаком в одном коэффициенте Пуассона в рамках безмоментной теории упругости, показывает существенные отличия в затратах энергии на упругое деформирование, несмотря на то что в формуле (2) величина коэффициента Пуассона  $\nu_{23} = \nu_{32}$  в направлении  $[0001]$  фигурирует в квадрате.

При ударном нагружении в направлении, совпадающем с направлением  $[0001]$ , уменьшение значений коэффициентов Пуассона  $\nu_{12} = \nu_{13}$  и  $\nu_{31} = \nu_{21}$  при остальных неизменных характеристиках в пределах 40%, как и увеличение до 30%, не приводит к существенным изменениям в картине деформирования цилиндров. Увеличение значений коэффициентов Пуассона  $\nu_{12} = \nu_{13}$  и  $\nu_{31} = \nu_{21}$  на 40% при остальных неизменных характеристиках приводит к увеличению коэффициента восстановления начальной скорости на 20% и отделению цилиндра от жесткой стенки после однократного пробега волн сжатия и растяжения.

При ударе цилиндров с  $L/D = 0.385$  в направлении, совпадающем с направлением  $[\bar{1}010]$ , все перечисленные ранее отдельные варьирования значений коэффициентов Пуассона не оказывают существенных влияний на процесс деформирования. В этих случаях отделение цилиндров от жесткой стенки происходит после однократных пробега волн сжатия и растяжения вдоль оси.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В тонких телах цилиндрической формы, а также в стержнях время их отделения от жесткой стенки определяется временем распространения упругой волны – волны сжатия до свободной поверхности, а затем волны растяжения до жесткой стенки. При  $L/D < 3$  время отделения зависит от величин коэффициентов Пуассона, определенных в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Также этими коэффициентами Пуассона определяется величина диапазона формфакторов, в котором наблюдается разброс величин скоростей продольных волн около величины скорости волны Похгаммера (рис.6). В телах сферической формы время контакта с жесткой стенкой в 3-4 раза превышает время контакта компактного цилиндра с таким же диаметром, но зависит от начальной скорости удара. Этот эффект можно наблюдать на рисунках 4-5 по временам, когда верхняя точка цилиндра или шара восстанавливает начальное значение, равное 10 мм. Коэффициенты восстановления начальной скорости удара у тел сферической формы не зависят от коэффициентов Пуассона и от начальной скорости удара и близки к единице.

В монокристаллическом цинке максимальное поглощение упругой энергии деформирования при ударе наблюдается в элементах цилиндрической или кубической форм с формфакторами в диапазоне  $0.15 < L/D < 0.55$  при ударе в направлении  $[0001]$ , перпендикулярном плоскости с отрицательными коэффициентами Пуассона (рис.7). Дополнительное увеличение отрицательного значения коэффициента Пуассона до -0.22, привело к уменьшению коэффициента восстановления скорости с 0.54 до 0.51. Уменьшение кинетической энергии цилиндра после отделения от жесткой стенки объясняется разделением единого фронта упругой волны на несколько и после отражения от свободной границы распространением нескольких волн растяжения. В цилиндрах из монокристаллического цинка при значениях формфакторов  $0.5 < L/D < 2.25$  наблюдаются от 2 до 5 отделений точек цилиндра от жесткой стенки до момента итогового отделения, что приводит к потере потенциальной энергии и увеличению времени контакта с жесткой стенкой. В цилиндрах при значениях формфакторов  $0.33 < L/D < 0.5$  время контакта цилиндра и жесткой стенки

определяется временем двукратного пробега продольной упругой волны от жесткой стенки до свободной поверхности и снова до жесткой стенки. Отделение цилиндров происходит после повторного прихода волн растяжения к жесткой стенке. Для анизотропных материалов в выбранных направлениях, также как и для изотропных, наблюдается: чем меньше отличие в величинах скоростей распространения упругой продольной волны и волны Похгаммера, тем больше коэффициент восстановления скорости удара во всем диапазоне изменения формфакторов и тем меньше диапазон изменения формфакторов, в котором невозможно надежное прогнозирование величины скорости распространения упругой волны без численного моделирования процесса.

При ударе в направлении, совпадающем с направлением  $[\bar{1}010]$  в монокристаллическом цинке, наличие отрицательного коэффициента Пуассона в плоскости, параллельной направлению удара, не влияет на коэффициент восстановления начальной скорости. Отдельное варьирование значений коэффициентов Пуассона в различных плоскостях в монокристаллическом цинке при значении формфактора  $D/L = 0.385$  при ударе в направлении, совпадающем с направлением  $[\bar{1}010]$ , не внесло заметных изменений в результаты расчетов в части времен контакта цилиндра и жесткой стенки. Максимальное увеличение коэффициента восстановления начальной скорости равно 0.07 в случае увеличения коэффициентов Пуассона в плоскости, перпендикулярной направлению удара, на 40%. Повторные отскоки некоторых точек цилиндров наблюдаются при формфакторах  $1.25 < L/D < 3$ , однако увеличение времени контакта цилиндра невелико по сравнению со временем распространения волны Похгаммера вдоль оси симметрии цилиндра.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наиболее выраженное изменение волновой картины деформирования наблюдается в цилиндрах, имеющих формфакторы в диапазоне  $0.33 < L/D < 2.25$ , в случаях, когда направление ударного нагружения о жесткую стенку перпендикулярно плоскости симметрии материала, характеризующейся отрицательными значениями коэффициентов Пуассона. В этом случае время контакта до момента отделения от стенки может достигать времени двукратного пробега волн сжатия и растяжения, а коэффициент восстановления начальной скорости удара уменьшаться в 2 раза. В сферических телах из анизотропных материалов нет выраженного изменения волновой картины деформирования в зависимости от значений коэффициентов Пуассона.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Иванова С.Ю., Осипенко К.Ю., Демин А.И., Баничук Н.В., Лисовенко Д.С. *Изучение свойств метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона при пробивании жестким ударником* // Изв. РАН. МТТ. – 2023. – №5. – С.120-130.
2. Lloyd J.T., Clayton J.D., Becker R., McDowell D.L. *Simulation of shock wave propagation in single crystal and polycrystalline aluminum* // Int. J. Plast. – 2014. – Vol.60. – Pp.118-144.

3. Winey J.M. and Gupta Y.M. *Anisotropic modeling for shocked single crystals* // AIP Conference Proceedings. – 2006. – Vol.845. – 367.
4. Winey J.M. and Gupta Y.M. *Nonlinear anisotropic description for the thermomechanical response of shocked single crystals: Inelastic deformation* // J. Appl. Phys. – 2006. – Vol.99. – 023510.
5. Winey J.M. and Gupta Y.M. *Nonlinear anisotropic description for shocked single crystals: Thermoelastic response and pure mode wave propagation* // J. Appl. Phys. – 2004. – Vol.96. – Iss.4. – Pp.1993-1999.
6. Arakere N.K., Siddiqui S., Ebrahimi F. *Evolution of plasticity in notched Ni-base superalloy single crystals* // Int. J. of Solids and Struct. – 2009. – Vol.46. – Iss.16. – Pp.3027-3044.
7. Arakere N.K., Siddiqui S. Magnan M., Ebrahimi F., Forero L. *Investigation of three dimensional stress fields and slip systems for fcc single-crystal superalloy notched specimens* // ASME Journal of Gas Turbines and Power. – 2005. – Vol.127. – Iss.3. – Pp.629-637.
8. Liu Q., Xu Y.F., Hu S.C., Li Y.X., Cai Y. & Luo S.N. *Multiple elastic shock waves in cubic single crystals* // Shock Waves. – 2023. – Vol.33. – Pp.337-355.
9. Седов Л.И. *Механика сплошной среды. Т.1.* – М.: Наука, 1970. – 492 с.
10. Anderson Ch.E., Cox P.A., Johnson G.R., Maudlin P.J. *A constitutive formulation for anisotropic materials suitable for wave propagation computer programs-II* // Computational Mechanics. – 1994. – Vol.15. – Pp.201-223.
11. Гулидов А.И., Баянов Е.В. *Распространение упругих волн в однородных по сечению круглых стержнях* // ПИМТФ. – 2011. – Т.52. – №5. – С.155-162.
12. Krivosheina M.N., Tuch E.V. *Transformation of a Longitudinal Elastic Wave into a Pochhammer Wave* // Phys. Mesomech. – 2023. – Vol.26. – No.4. – 477.

## REFERENCES

1. Ivanova S.Yu., Osipenko K.Yu., Demin A.I., Banichuk N.V., Lisovenko D.S. *Izuchenie svojstv metamaterialov s otritsatel'nyim koehffitsientom Puassona pri probivanii zhestkim udarnikom [Study of the properties of metamaterials with negative Poisson's ratio when penetrated by a rigid impactor]*. Izvestiya RAN. MTT, 2023, No.5, Pp.120-130.
2. Lloyd J.T., Clayton J.D., Becker R., McDowell D.L. *Simulation of shock wave propagation in single crystal and polycrystalline aluminum*. Int. J. Plast., 2014, Vol.60, Pp.118-144.
3. Winey J.M. and Gupta Y.M. *Anisotropic modeling for shocked single crystals*. AIP Conference Proceedings, 2006, Vol.845, 367.
4. Winey J.M. and Gupta Y.M. *Nonlinear anisotropic description for the thermomechanical response of shocked single crystals: Inelastic deformation*. J. Appl. Phys., 2006, Vol.99, 023510.
5. Winey J.M. and Gupta Y.M. *Nonlinear anisotropic description for shocked single crystals: Thermoelastic response and pure mode wave propagation*. J. Appl. Phys., 2004, Vol.96, Iss.4, Pp.1993-1999.
6. Arakere N.K., Siddiqui S., Ebrahimi F. *Evolution of plasticity in notched Ni-base superalloy single crystals*. Int. J. of Solids and Struct., 2009, Vol.46, Iss.16, Pp.3027-3044.
7. Arakere N.K., Siddiqui S. Magnan M., Ebrahimi F., Forero L. *Investigation of three dimensional stress fields and slip systems for fcc single-crystal superalloy notched*

- specimens*. ASME Journal of Gas Turbines and Power, 2005, Vol.127, Iss.3, Pp.629-637.
8. Liu Q., Xu Y.F., Hu S.C., Li Y.X., Cai Y. & Luo S.N. *Multiple elastic shock waves in cubic single crystals*. Shock Waves, 2023, Vol.33, Pp.337-355.
  9. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T.1 [Continuum mechanics. Vol.1]*. Moskva, Nauka, 1970, 492 p.
  10. Anderson Ch.E., Cox P.A., Johnson G.R., Maudlin P.J. *A constitutive formulation for anisotropic materials suitable for wave propagation computer programs–II*. Computational Mechanics, 1994, Vol.15, Pp.201-223.
  11. Gulidov A.I., Bayanov E.V. *Rasprostranenie uprugikh voln v odnorodnykh po secheniyu kruglykh sterzhnyakh [Propagation of elastic waves in round rods of uniform cross-section]*. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2011, Vol.52, No.5, Pp.155-162.
  12. Krivosheina M.N., Tuch E.V. *Transformation of a Longitudinal Elastic Wave into a Pochhammer Wave*. Phys. Mesomech., 2023, Vol.26, No.4, 477.

Поступила в редакцию 11 апреля 2024 года.

---

Сведения об авторах:

Кривошеина Марина Николаевна – д.ф.-м.н., доц., в.н.с., ФГБУН Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск, Россия; e-mail: [marina@ispms.ru](mailto:marina@ispms.ru)

Туч Елена Владимировна – к.ф.-м.н., н.с., ФГБУН Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск, Россия; e-mail: [tychka2012@mail.ru](mailto:tychka2012@mail.ru)