

УДК 539.3  
EDN BDGTTQ (<https://elibrary.ru/bdgtt>)  
DOI 10.33113/mkmk.ras.2024.30.04.01



## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА РАСТЯЖЕНИЯ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ИЗ ЭЛАСТОМЕРА (РЕЗИНЫ)\*

Паймушин В.Н.<sup>1,2</sup>, Холмогоров С.А.<sup>1,2</sup>, Якубовский К.К.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», г. Казань, Россия

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», г. Казань, Россия

### АННОТАЦИЯ

Проведены теоретические и экспериментальные исследования на растяжение стержня прямоугольного поперечного сечения из эластомерного материала, сопровождающиеся формированием однородного напряженно-деформированного состояния. В предположении о том, что истинные осевые деформации в поперечных направлениях пропорциональны истинной осевой деформации в продольном направлении, исходя из геометрической картины деформирования путем введения в рассмотрение двух коэффициентов Пуассона для трансверсально-изотропного материала, получены точные аналитические зависимости, связывающие между собой фиксируемое в экспериментах условное (номинальное) нормальное напряжение с вычисляемым истинным нормальным напряжением в поперечном сечении стержня, замеряемую в экспериментах истинную осевую деформацию с вычисляемой объемной деформацией и истинными мерами сдвиговых деформаций в осях, повернутых на 45 градусов. Проведены экспериментальные исследования на растяжение образцов из листовой технической резины и проведена обработка экспериментальных результатов на основе полученных аналитических зависимостей, справедливых при конечных деформациях. Установлено, что даже при немалых кратностях удлинений истинное нормальное напряжение в поперечном сечении образца с истинной осевой деформацией допустимо связать соотношением упругости, подчиняющимся линейному закону Гука, в котором входящие коэффициенты Пуассона нелинейным образом зависят от истинной осевой деформации. С такой же степенью точности аналогичные линейные зависимости имеют место между истинными касательными напряжениями в повернутых осях с соответствующими мерами истинных сдвиговых деформаций. Изучена возможность реализации явления неустойчивости процесса растяжения образцов из рассматриваемой технической резины.

**Ключевые слова:** деформируемое тело; эластомер; конечные перемещения; истинные напряжения и деформации; техническая резина; эксперимент; растяжение; неустойчивость процесса

## THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF ELASTOMER (RUBBER) STRAIGHT ROD UNDER THE TENSION

Paimushin V.N.<sup>1,2</sup>, Kholmogorov S.A.<sup>1</sup>, Yakubovsky K.K.<sup>1</sup>

\* Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект FZSU-2024-0010).

<sup>1</sup>*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tuplev,  
Kazan, Russia*

<sup>2</sup>*Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russia*

### ABSTRACT

Theoretical and experimental studies of tension of a rod with rectangular cross-section made of elastomeric material were carried out. The stress-strain state in the rod was homogeneous. Under the assumption that true axial strains in transverse directions are proportional to true axial strain in longitudinal direction, based on geometric pattern of deformation by introducing two Poisson's ratios for transversely isotropic material, exact analytical dependencies were obtained. They relate linking engineering (nominal) normal stress recorded in experiments with calculated true normal stress in rod cross-section, true axial strain measured in experiments with calculated volumetric strain and true measures of shear strains with axes rotated by 45 degrees. Experimental studies of tension of specimens made of sheet technical rubber were carried out and experimental results were processed based on obtained analytical dependencies, valid for finite strains. It has been established that even with considerable multiples of elongations, the true normal stress in the cross section of the specimen with the true axial strain can be permissibly related by the elasticity relation obeying the linear Hooke's law. In it, the incoming Poisson's ratios depend nonlinearly on the true axial deformation. With the same degree of accuracy, similar linear dependencies exist between the true tangential stresses in the rotated axes with the corresponding measures of the true shear strain. The possibility of realizing the phenomenon of instability of the tension process of specimens made of the technical rubber under consideration has been studied.

**Keywords:** deformable body; elastomer; finite displacements; true stress and strain; technical rubber; experiment; tension; unstability of the process

### ВВЕДЕНИЕ

Большое значение для становления современной нелинейной механики деформируемых твердых тел имело появление в научной литературе известных монографий В.В. Новожилова [1,2 и др.], в которых предельно ясно и в доступной форме были изложены основы теории, и выяснен ряд принципиальных вопросов. Мощным стимулом для развития прикладного направления нелинейной механики твердых тел послужила необходимость исследования процессов деформирования резинотехнических изделий (эластомеров). В известной книге К.Ф. Черныха [3], посвященной теоретическому описанию механических свойств эластомеров и построению на их основе аналитических решений эталонных задач нелинейной теории упругости, особо отмечаются работы фундаментального характера и обзоры [4-12 и др.]. В ней также отмечается, что к эластомерным материалам, допускающим большие высокоэластичные деформации (до 100% и выше), относятся, в частности, натуральный и синтетический каучуки, полиуретан, материалы биологического происхождения и т.п. Велика роль эластомеров в создании композитных материалов с рядом специальных свойств и в живой природе, большие перспективы их использования при создании искусственных органов.

В современной научной литературе в общем случае расчет изделий из эластомеров сводится к решению задач физически и геометрически нелинейной связной теории термовязкоупругости. Вместе с тем, в книге [3] указывается, что в длительно работающем изделии из эластомера успевают

отрелаксировать все неупругие эффекты, и оно практически находится в упругом состоянии, а неупругость для эластомеров является эффектом второго порядка, и теория упругости дает надежную основу для прочностных расчетов изделий и сооружений из эластомеров.

Перечисленные в [3] основные механические свойства эластомеров в высокоэластичном состоянии заключаются в следующем:

1. Высокоэластичная деформация, достигающая сотен процентов, носит сдвиговой характер. Модуль сдвига (в зависимости от степени наполнения эластомера) меняется примерно в пределах 0,1-15 МПа, поэтому эластомеры относят к низкомолекулярным материалам.

2. При деформации эластомеров проявляются вязкие свойства (ползучесть, релаксация напряжений), связанные с разрушением связей и надмолекулярных образований, возможно, с деформацией наполнителя. Обратимость высокоэластичной деформации носит геометрический характер: тело восстанавливает форму. Однако вследствие отставания деформации от напряжений (широкая петля гистерезиса) часть энергии теряется, выделяясь в виде теплоты.

3. При всестороннем сжатии эластомер ведет себя как всякое низкомолекулярное тело (твердое либо жидкое), поскольку при этом меняются межмолекулярные расстояния, а конформация цепей не реализуется. Модуль объемного сжатия эластомеров имеет порядок  $10^2$ - $10^3$  МПа. Сопоставление модулей объемного сжатия и сдвига показывает, что последний на два-три порядка меньше, эластомер значительно «охотнее» изменяет форму, чем объем. Отсюда и следует обычно используемое предположение о несжимаемости эластомеров. По величине же сжимаемость эластомеров имеет тот же порядок, что и у жидкости.

В связи с описанными выше особенностями деформирования эластомеров для описания их упругих механических свойств, как правило, используется феноменологический подход, основанный на принятии формальных зависимостей, которые позволяют с необходимой точностью аналитически описывать наблюдаемую в экспериментах деформацию эластомеров. В силу характерного свойства упругого поведения эластомерного материала работа напряжений вне зависимости от пути деформирования определяется начальной и конечной деформированными конфигурациями тела путем задания в некотором аналитическом виде законов упругости в виде выражения для упругого потенциала. В упомянутой выше книге [3] проведен подробный анализ известных в литературе упругих потенциалов Муни [11], Бидермана В.Л. [12], Бартенева Г.М., Хазановича Т.Н. [13] и др.

Большое внимание уделялось и уделяется в настоящее время широкому кругу вопросов в нелинейной механике деформируемых твердых тел и тонкостенных элементов конструкций, связанных с изучением больших деформаций [11-15 и др.]. Современная нелинейная механика деформируемых твердых тел, в частности, механика эластомеров при больших перемещениях и деформациях характеризуется использованием различных мер деформаций [16 и др.] (кратностей удлинений, Коши (Cauchy), Грина (Green), Альманси (Almausi), Генки (Hencky) и др.), а также сопряженных с ними соответствующих тензоров напряжений. К настоящему времени их анализу и изучению особенностей их применения в сочетании с возможностями современной вычислительной техники и численных методов посвящена обширная научная литература [16 и др.]. Из всего многообразия публикаций по этой тематике

отметим работу [17], в которой обсуждаются вопросы, связанные с противоречивостью определения коэффициента Пуассона, как одной из определяющих констант материала. Коэффициент Пуассона изотропного материала обычно определяется как соотношение с обратным знаком между поперечной и продольной деформациями в условиях действия растягивающих напряжений. Однако если деформации материала становятся большими, значения коэффициента Пуассона становятся различными в зависимости от используемых мер деформаций. В работе [17] рассмотрены пять различных мер деформаций и получено унифицированное соотношение для кратности растяжения и вычисления коэффициента Пуассона. Показано, что только для мер деформаций Генки значение коэффициента Пуассона для несжимаемого материала постоянно и равно 0.5 для всего диапазона деформаций растяжения. Другие меры деформаций приводят к зависимым значениям коэффициента Пуассона от кратности удлинения. Найдено обобщённое соотношение для объёмной деформации в виде инварианта деформаций. При рассмотрении задачи одноосного растяжения кремненаполненной резины использованы меры деформаций Коши и Генки для демонстрации различных вариантов проверки несжимаемости материала и вычисления коэффициента Пуассона. Показана степень несжимаемости резины и её практическая значимость.

Определению коэффициента Пуассона, как одной из основных характеристик высокоэластичных материалов посвящено весьма значительное количество исследовательских работ [18-24 и др.]. Практическое применение определяемых механических параметров резин и других высокоэластичных материалов описывается в работах [25,26].

Главным объектом теоретических и экспериментальных исследований данной статьи, как и работ [17,27-30], является простейшая задача о растяжении прямого стержня из эластомера, имеющего прямоугольное поперечное сечение, в котором в процессе нагружения формируется однородное напряженно-деформированное состояние. В предположении о том, что истинные осевые деформации в поперечных направлениях пропорциональны истинной осевой деформации в продольном направлении, исходя из геометрической картины деформирования путем введения в рассмотрение коэффициентов Пуассона, получены точные аналитические зависимости, связывающие между собой измеряемое в экспериментах условное (номинальное) нормальное напряжение с вычисляемым истинным нормальным напряжением в поперечном сечении стержня, измеряемую в экспериментах истинную осевую деформацию с вычисляемой объёмной деформацией и истинными мерами сдвиговых деформаций в осях, повернутых на 45 градусов. Проведены экспериментальные исследования на растяжение образцов из листовой технической резины и проведена обработка экспериментальных результатов на основе полученных аналитических зависимостей, справедливых при конечных деформациях. Установлено, что даже при немалых кратностях удлинений истинное нормальное напряжение в поперечном сечении образца с истинной осевой деформацией допустимо связать соотношением упругости, подчиняющимся линейному закону Гука, в котором входящие коэффициенты Пуассона нелинейным образом зависят от истинной осевой деформации. С такой же степенью точности аналогичные линейные зависимости имеют место между истинными касательными напряжениями в повернутых осях с соответствующими мерами истинных сдвиговых деформаций. Изучена возможность реализации явления

неустойчивости процесса растяжения образцов из рассматриваемой технической резины.

## 1. ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И ДЕФОРМАЦИЯХ

Отнесем деформируемое твердое тело объемом  $V_0$ , ограниченное внешней поверхностью  $S_0$  к ортогональной декартовой системе координат  $x^i$  ( $i=1,2,3$ ). В ней положение произвольной точки  $M(x^i)$  до деформации определяется радиус-вектором  $\mathbf{R} = x^i \mathbf{e}_i$ , а после деформации – радиус-вектором  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \mathbf{u} = (x^i + u^i) \mathbf{e}_i$ , где  $\mathbf{e}_i$  – единичные векторы введенной в рассмотрение ортогональной декартовой системы координат,  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений. После деформации тела элементарный прямоугольный параллелепипед со сторонами  $dl_i = dx^i$ , исходящими из точки  $M(x^i)$ , переходит в криволинейный параллелепипед. Длины ребер криволинейного параллелепипеда и площади его граней обозначим через  $dl_i^*$  и  $S_i^*$ , соответственно, а площади граней прямоугольного параллелепипеда в начальной конфигурации будут равны  $S_1 = dx^2 dx^3$ ,  $S_2 = dx^3 dx^1$ ,  $S_3 = dx^1 dx^2$ . На гранях  $S_i^*$  введем в рассмотрение векторы напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_*^i$ , отнесенных к единицам площадей  $S_i$ , а также векторы объемных и поверхностных сил  $\mathbf{F}^*$  и  $\mathbf{p}^*$ , отнесенных к единицам начального объема  $dV_0 = dx^1 dx^2 dx^3$  и начальной площади  $dS_0$ . Тогда в состоянии статического равновесия тела имеет место вариационное уравнение принципа возможных перемещений

$$\iiint_{V_0} \boldsymbol{\sigma}_*^i \delta \mathbf{u}_{,i} dV_0 = \iiint_{V_0} \mathbf{F}^* \delta \mathbf{u} dV_0 + \iint_{S_0} \mathbf{p}^* \delta \mathbf{u} dS_0. \quad (1.1)$$

Если для векторов напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_*^i$ , отнесенных к соответствующим площадкам до деформации тела, принять разложения  $\boldsymbol{\sigma}_*^i = \sigma_*^{ij} \mathbf{R}_j^*$ , где  $\mathbf{R}_i^* = \partial \mathbf{R}^* / \partial x^i = \partial (\mathbf{R} + \mathbf{u}) / \partial x^i = \mathbf{e}_i + \mathbf{u}_{,i}$  – основные базисные векторы в деформированном состоянии тела, то левая часть уравнения (1.1) преобразуется к виду

$$\iiint_{V_0} \boldsymbol{\sigma}_*^i \delta \mathbf{u}_{,i} dV_0 = \iiint_{V_0} \sigma_*^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV_0. \quad (1.2)$$

Входящие в это равенство компоненты симметричного тензора

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_i^* \mathbf{R}_j^* - \mathbf{R}_j^* \mathbf{R}_i^*) = \frac{1}{2} (g_{ij}^* - g_{ji}^*) = \frac{1}{2} (g_{ij}^* - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} (e_{ij} + e_{ji} + e_{ik} e_{jk}), \quad (1.3)$$

$$e_{ij} = u_{,i}^j = \frac{\partial u^j}{\partial x^i}, \quad (1.4)$$

определенные разностью компонент основного метрического тензора до и после деформации тела и являющиеся ковариантными компонентами тензора деформаций Коши-Грина, в современной механике деформируемого твердого тела принимаются за меру деформаций и при конечных их значениях [16 и др.],

а величины  $\sigma_*^{ij}$ , являющиеся контравариантными компонентами симметричного тензора напряжений, по В.В. Новожилову [1,2] называются обобщенными напряжениями. Как следует из равенства (1.2), компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  энергетически согласованы с компонентами тензора напряжений  $\sigma_*^{ij}$  и являются для них обобщенными перемещениями (тензоры с компонентами  $\sigma_*^{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  составляют сопряженную пару, их свертка определяет удельную потенциальную энергию деформации [3]). Именно поэтому в современной механике деформируемого твердого тела физические (определяющие) соотношения формулируют между напряжениями и деформациями в виде зависимостей  $\sigma_*^{ij} = \sigma_*^{ij}(\varepsilon_{ij})$  как при малых, так и конечных деформациях тела. В частности, в принятой системе координат для линейно-упругого материала они представляются в виде зависимостей обобщенного закона Гука, в случае изотропии свойств принимающих вид

$$\sigma_*^{11} = E_{11}^* \varepsilon_{11} + E_{12}^* \varepsilon_{22} + E_{33}^* \varepsilon_{33}, \quad \sigma_*^{12} = \sigma_*^{21} = 2G^* \varepsilon_{12}, \quad \overline{1,2,3}, \quad (1.5)$$

где

$$E_{11}^* = E^*(1-\nu_*)/\Delta_*, \quad E_{12}^* = E^* \nu_*/\Delta_*, \quad \overline{1,2,3}, \quad (1.6)$$

$$G^* = E^*/[2(1+\nu_*)], \quad \Delta_* = (1-2\nu_*)(1+\nu_*).$$

Входящие в равенства (1.6) две независимые характеристики материала модуль упругости  $E^*$  и коэффициент Пуассона  $\nu^*$  (или  $E^*$  и модуль сдвига  $G^*$ ) определяются из условных диаграмм деформирования путем проведения соответствующих экспериментов.

Истинными деформациями удлинений  $\varepsilon_i$  и сдвигов  $\sin \gamma_{ij}$  являются величины

$$\varepsilon_i = dl_i^*/dl_i - 1 = \sqrt{1+2\varepsilon_{ii}} - 1, \quad (1.7)$$

$$\sin \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} (1+2\varepsilon_{ii})^{-1/2} (1+2\varepsilon_{jj})^{-1/2} = 2\varepsilon_{ij} (1+\varepsilon_i)^{-1} (1+\varepsilon_j)^{-1},$$

исходя из которых легко устанавливаются зависимости

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = (1+\varepsilon_\alpha)(1+\varepsilon_\beta) \sin \gamma_{\alpha\beta}, \quad (\alpha \neq \beta), \quad 2\varepsilon_{11} = \varepsilon_1(\varepsilon_1+2).$$

Истинными напряжениями  $\sigma^{ij} \neq \sigma^{ji}$ , отнесенными к единицам деформированных площадей  $S_i^*$ , по В.В. Новожилову [1,2] являются компоненты векторов  $\sigma^i$  в представлениях  $\sigma^i = \sigma^{ij} \mathbf{e}_j^*$ , где  $\mathbf{e}_j^* = \mathbf{R}_j^*/|\mathbf{R}_j^*| = (1+\varepsilon_j)^{-1} (\delta_{ji} + e_{ji}) \mathbf{e}_i$  – единичные векторы, направленные по касательным к деформированным координатным линиям  $x_*^i$  в точке  $M^*(x^i)$ , в которую переходит точка  $M(x^i)$  после деформирования. Так как [1,2]  $S_i \sigma_*^i = S_i^* \sigma^i$ , то между компонентами  $\sigma_*^{ij}$  и  $\sigma^{ij}$  имеют место зависимости [1,2]

$$\sigma_*^{ij} = \frac{S_i^* \sigma^{ij}}{S_i (1+\varepsilon_j)}, \quad \frac{S_1^*}{S_1} = \sqrt{(1+2\varepsilon_{22})(1+2\varepsilon_{33}) - 4\varepsilon_{23}^2}, \quad \overline{1,2,3}.$$

Они преобразуются к виду

$$\sigma_{11}^* = \frac{\sigma_{11}}{1 + \varepsilon_1} (1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \cos \gamma_{23}, \quad (1.8)$$

$$\sigma_{12}^* = \sigma_{12} (1 + \varepsilon_3) \cos \gamma_{23} = \sigma_{21} (1 + \varepsilon_3) \cos \gamma_{13} = \sigma_{21}^*, \quad \overline{1,2,3},$$

которые оказываются весьма удобными для проведения дальнейшего анализа.

Если исходить из истинных диаграмм деформирования образцов, то вместо первых соотношений (1.5) в линейно упругом приближении можно записать зависимости вида

$$\sigma_{11} = E_{11} \varepsilon_1 + E_{12} \varepsilon_2 + E_{13} \varepsilon_3, \quad \overline{1,2,3}, \quad (1.9)$$

где

$$E_{11} = E(1 - \nu)/\Delta, \quad E_{12} = E\nu/\Delta, \quad \Delta = (1 - 2\nu)(1 + \nu), \quad (1.10)$$

а в силу  $\sigma_{12} \neq \sigma_{21}$ ,  $\sigma_{13} \neq \sigma_{31}$ ,  $\sigma_{23} \neq \sigma_{32}$  зависимости между  $\sigma_{ij}$  и истинными деформациями сдвигов  $\sin \gamma_{ij}$ , в отличие от соотношений (1.7), даже для изотропного материала в простейшем приближении необходимо представить в виде

$$\sigma_{12} = G \sin \gamma_{12} f_{23}(\cos \gamma_{23}), \quad \overline{1,2,3}, \quad (1.11)$$

где  $f_{ij} \neq f_{ji}$  – некоторые функции, характеризующие сопротивление материала на конечные сдвиговые деформации, которые в соответствии с равенствами (1.8) должны быть связаны зависимостями вида

$$f_{23} \cos \gamma_{23} = f_{13} \cos \gamma_{13}, \quad f_{23} \cos \gamma_{23} = f_{12} \cos \gamma_{12}, \quad f_{13} \cos \gamma_{13} = f_{12} \cos \gamma_{12}.$$

Эти зависимости выполняются, в частности, при

$$f_{23} = 1/\cos \gamma_{23}, \quad f_{13} = 1/\cos \gamma_{13}, \quad f_{12} = 1/\cos \gamma_{12}.$$

Наконец, для векторов обобщенных напряжений  $\sigma_*^i$  примем представления  $\sigma_*^i = s_*^{ij} e_j$ , где, как нетрудно показать

$$s_*^{ij} = \sigma_*^{ik} (\delta_{kj} + e_{kj}). \quad (1.12)$$

Тогда при использовании представления  $\mathbf{F}^* = F_*^i e_i$  для элемента тела с объемным элементом  $dV_0 = dx^1 dx^2 dx^3$  уравнения статического равновесия тела относительно компонент  $s_*^{ij}$  и  $F_*^i$  запишутся в виде

$$s_{*,j}^{ij} + F_*^i = 0. \quad (1.13)$$

Предположим, что граничная поверхность тела  $S_0$  ограничена координатными плоскостями, соответствующими  $x^i = x_-^i$ ,  $x^i = x_+^i$ , и на них заданы векторы поверхностных внешних сил в двух вариантах представлений  $\mathbf{p}_*^i = p_*^{ij} e_j$ ,  $\mathbf{p}^i = p^ij e_j$  и так, что

$$\mathbf{p}_*^i = \frac{S_i^*}{S_i} \mathbf{p}^i. \quad (1.14)$$

Тогда в точках граничных поверхностей для уравнений (1.13) должны быть заданы граничные условия вида

$$\sigma_*^{ik} (\delta_{kj} + e_{kj}) = p_*^{ij} \quad \text{при} \quad \delta u_j \neq 0. \quad (1.15)$$

В дальнейшем принципиальное значение имеет рассмотрение простейшего частного вида деформирования тела, во всех точках которого  $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$ .

Такой случай может реализоваться при его всестороннем растяжении-сжатии тела поверхностными нагрузками ( $F_i^* = 0$ ), если материал тела изотропный или ортотропный с осями ортотропии, совпадающими с осями используемой системы координат. Очевидно, равенства  $\gamma_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ) могут быть выполнены только при выполнении равенств

$$e_{12} = e_{21} = e_{13} = e_{31} = e_{23} = e_{32} = 0, \quad (1.16)$$

в силу которых зависимости (1.3) принимают вид

$$2\varepsilon_{11} = 2e_{11} + e_{11}^2, \quad 2\varepsilon_{22} = 2e_{22} + e_{22}^2, \quad 2\varepsilon_{33} = 2e_{33} + e_{33}^2. \quad (1.17)$$

Следовательно, в соответствии с (1.7) для деформаций удлинений абсолютно точными являются соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} - 1 = \sqrt{(1 + e_{11})^2} - 1 = e_{11} = \partial u^1 / \partial x^1, \\ \varepsilon_2 &= \partial u^2 / \partial x^2, \quad \varepsilon_3 = \partial u^3 / \partial x^3 \end{aligned} \quad (1.18)$$

при произвольных перемещениях и деформациях.

При учете равенств (1.8), (1.16) и (1.18) формулы (1.12) запишем в виде

$$\begin{aligned} s_*^{11} &= \sigma_*^{11} (1 + e_{11}) = \sigma^{11} (1 + e_{22})(1 + e_{33}), \\ s_*^{22} &= \sigma^{22} (1 + e_{11})(1 + e_{33}), \quad s_*^{33} = \sigma^{33} (1 + e_{11})(1 + e_{22}), \\ s_*^{ij} &= 0 \quad \text{при } i \neq j. \end{aligned} \quad (1.19)$$

## 2. ЗАДАЧА ОБ УПРУГОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Рассмотрим стержень, имеющий до деформации площадь поперечного сечения  $\Omega$ , у которого к торцевым сечениям  $x = 0$ ,  $x = L$  приложены равномерно распределенные растягивающие поверхностные усилия  $p^* = P/\Omega$ . В рассматриваемом случае имеют место равенства (1.16), (1.17). Поэтому в силу равенств  $p_*^{11} = p^*$ ,  $p_*^{ij} = 0$  при  $i \neq 1$  и  $j \neq 1$  интегралами уравнений равновесия (1.13) при учете граничных условий (1.15) и зависимостей (1.12) являются равенства

$$s_*^{11} = \sigma_*^{11} (1 + e_{11}) = p^*, \quad \sigma_*^{22} = 0, \quad \sigma_*^{33} = 0; \quad e_{11} = \partial u^1 / \partial x^1 = du/dx. \quad (2.1)$$

Если исходить из соотношений (1.5), которые в литературе используются совместно с кинематическими соотношениями (1.3), принимающими в рассматриваемом случае вид (1.17), то первое равенство (2.1) в силу следующих из двух последних равенств зависимостей

$$\varepsilon_{22} = -\nu^* \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{33} = -\nu^* \varepsilon_{22} \quad (2.2)$$

приводится к кубическому алгебраическому уравнению вида

$$e_{11}^3 + 3e_{11}^2 + 2e_{11} = 2c^*, \quad c^* = P/(E^* \Omega). \quad (2.3)$$

Равенства (2.1) при учете зависимостей (1.8) в рассматриваемом случае можно также представить в виде

$$\sigma^{11} (1 + e_{22})(1 + e_{33}) = P/\Omega, \quad \sigma^{22} = 0, \quad \sigma^{33} = 0. \quad (2.4)$$

Если теперь исходить из соотношений (1.9), то последние два равенства (2.4) приводят к зависимостям

$$\varepsilon_1 = -\nu \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = -\nu \varepsilon_3, \quad (2.5)$$

а первое равенство при учете зависимостей (2.5) дает кубическое уравнение

$$\nu^2 e_{11}^3 - 2\nu e_{11}^2 + e_{11} = c, \quad c = P/(E\Omega), \quad (2.6)$$

которое принципиально отличается от уравнения (2.3). Для того чтобы убедиться в этом, составим уравнение

$$dc/de_{11} = 3\nu^2 e_{11}^2 - 4\nu e_{11} + 1 = 0. \quad (2.7)$$

Их двух его корней

$$e_{11}^{(1)} = 1/\nu, \quad e_{11}^{(2)} = 1/(3\nu) \quad (2.8)$$

наибольший интерес представляет из них второй корень, которому соответствует значение нагрузки

$$P_{cr}^{(2)} = 4E\Omega/(27\nu), \quad (2.9)$$

а первому корню соответствует значение  $P_{cr}^{(1)} = 0$ .

По аналогии с известным классическим решением, найденным в предположении о несжимаемости материала стержня при растяжении, силу  $P_{cr}^{(2)}$  следует называть критической силой, при достижении которой процесс растяжения становится неустойчивым. Этому значению нагрузки в соответствии с равенством  $du/dx = 1/(3\nu)$  соответствует критическое удлинение стержня

$$u_{cr} = L/(3\nu). \quad (2.10)$$

Если же по аналогии с уравнением (2.7), исходя из уравнения (2.3), составить уравнение

$$dc^*/de_{11} = 3e_{11}^2 + 6e_{11} + 2 = 0,$$

корни которого  $e_{11}^{(1,2)} = -1 \pm 0.57$ , то при их использовании для  $P_{cr}$  приходим к бессодержательному результату.

Если же ввести предположение о малости деформаций  $\varepsilon_\alpha$ , то с точностью  $1 + \varepsilon_\alpha \approx 1$  вместо уравнения (2.4) приходим к равенству

$$e_{11} = c. \quad (2.11)$$

В приближении  $E^* = E$ ,  $c^* = c$  при  $\nu = 0.3$  графики зависимостей  $c$  от  $e_{11}$ , построенные на основании равенств (2.3), (2.6) и (2.11), приведены на рис.1.

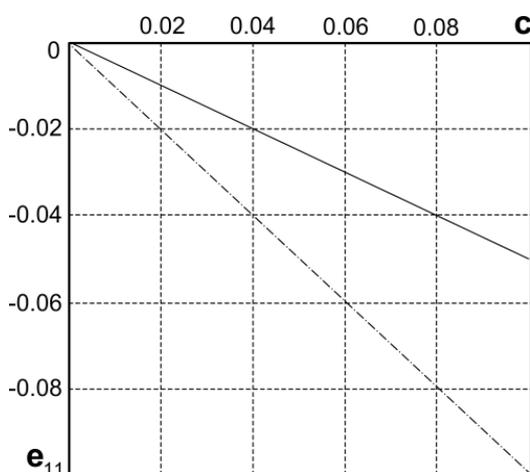


Рис.1. Зависимости  $e_{11} = e_{11}(c)$ . Штриховая линия – решение  $e_{11} = c$ , сплошная линия – решение (2.9).

При малых деформациях  $\varepsilon_1 = e_{11}$  с точностью  $1 + \varepsilon_1 \approx 1$  указанные зависимости практически совпадают, но принципиально различаются при больших значениях  $|\varepsilon_1|$ . Из трех построенных зависимостей физически содержательной в части возможности описания неустойчивости стержня при растяжении является только зависимость (2.6), имеющая точку максимума  $c$  при  $e_{11} = 1/(3\nu) = 1.111$ . Абсолютное большинство материалов при таких больших деформациях не могут сохранять свойство упругости. В частности, у пластичных сталей даже при малых значениях  $\varepsilon_1$  начинается процесс пластического течения. Но, как показано в работах [31 и др.], только при учете конечности деформаций (т.е. при использовании соотношений (1.7)) и использовании соотношений вида (1.9) с учетом упруго-пластического поведения материала удастся теоретическим путем определить место образования шейки при растяжении.

### 3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА ЭЛАСТОМЕРНЫХ ОБРАЗЦАХ НА РАСТЯЖЕНИЕ

Рассмотрим деформируемое твёрдое тело (тест-образец) прямоугольного поперечного сечения, имеющее толщину  $h$ , ширину  $b$  и подверженному осевому растяжению силой  $P$ . На рис.2 в плоскости  $xOy$  показан элемент тест-образца  $ACBD$  длиной  $b$  в начальном (недеформированном) состоянии, отнесённый к ортогональной декартовой системе координат и тот же элемент  $A^*C^*B^*D^*$  в деформированном состоянии. На них показаны также повернутые на угол  $\pi/4$  оси  $Ox'$ ,  $Oy'$  ортогональной системы координат, которая в деформированном состоянии преобразуется в оси  $Ox'_*$ ,  $Oy'_*$ .

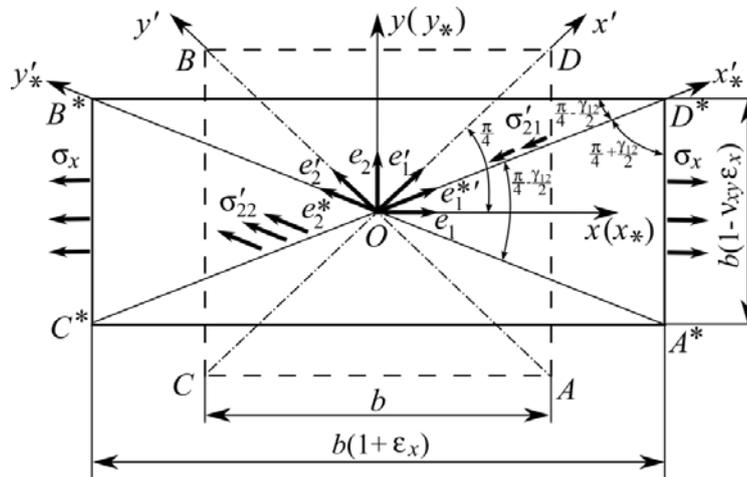


Рис.2. Картина деформирования прямоугольного тест-образца.

При растяжении силой  $P$  образца, имеющего до деформации площадь  $F = bh$ , в поперечных сечениях  $x = const$  формируется однородное напряжённо-деформированное состояние с компонентами

$$\sigma_x^* = \frac{P}{F}, \quad \varepsilon_x = u_{,x}, \quad \varepsilon_y = -\nu_{xy}\varepsilon_x, \quad \varepsilon_z = -\nu_{xz}\varepsilon_x, \quad (3.1)$$

$$\sigma_x = \frac{P}{F_*} = \frac{P}{F(1-\nu_{xy}\varepsilon_x)(1-\nu_{xz}\varepsilon_x)} = \frac{\sigma_x^*}{(1-\nu_{xy}\varepsilon_x)(1-\nu_{xz}\varepsilon_x)}, \quad (3.2)$$

где  $\varepsilon_x$ ,  $\nu_{xy} = \nu_{xy}(\varepsilon_x)$ ,  $\nu_{xz} = \nu_{xz}(\varepsilon_x)$  – фиксируемые при каждом уровне  $P$  (а, следовательно, и  $\sigma_x^*$ ) экспериментальные значения истинной по В.В. Новожилову осевой деформации  $\varepsilon_x$  и коэффициента Пуассона материала тест-образца.

Кратности удлинений  $\lambda_x = 1 + \varepsilon_x$ ,  $\lambda_y = 1 + \varepsilon_y$ ,  $\lambda_z = 1 + \varepsilon_z$  и кратность изменения объёма [3] в соответствии с (3.1) будут равны

$$\lambda_x = 1 + \varepsilon_x, \quad \lambda_y = 1 - \nu_{xy}\varepsilon_x, \quad \lambda_z = 1 - \nu_{xz}\varepsilon_x, \quad (3.3)$$

$$J = \lambda_x \lambda_y \lambda_z = (1 + \varepsilon_x)(1 - \nu_{xy}\varepsilon_x)(1 - \nu_{xz}\varepsilon_x).$$

Сечения  $y' = const$  и  $x' = const$ , имеющие до деформации площадь поперечного сечения  $F' = h \cdot AB = hb\sqrt{2} = \sqrt{2}F$ , после деформации будут иметь площадь

$$F_*' = h_* A^* B^* = h(1 - \nu_{xz}\varepsilon_x) A^* B^*, \quad (3.4)$$

где

$$A^* B^* = \sqrt{(A^* D^*)^2 + (D^* B^*)^2} = b\sqrt{(1 - \nu_{xy}\varepsilon_x)^2 + (1 + \varepsilon_x)^2}. \quad (3.5)$$

В наклонном сечении  $y_*' = 0$  введём в рассмотрение вектор истинных напряжений  $\sigma'_y = \sigma'_{21} \mathbf{e}_1^* + \sigma'_{22} \mathbf{e}_2^*$ , в котором  $\mathbf{e}_1^*$ ,  $\mathbf{e}_2^*$  – единичные векторы системы координат  $Ox_*' y_*'$  в деформированном состоянии, повернутой до деформации на угол  $\pi/4$  (рис.1).

Уравнения равновесия элемента  $A^* B^* D^*$  в деформированной конфигурации, очевидно, запишется в виде

$$\sigma_x h b (1 - \nu_{xy}\varepsilon_x)(1 - \nu_{xz}\varepsilon_x) = (\sigma'_{21} + \sigma'_{22}) A^* B^* h (1 - \nu_{xz}\varepsilon_x) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{12}}{2}\right), \quad (3.6)$$

$$\sigma'_{21} - \sigma'_{22} = 0.$$

Из первого уравнения системы (3.6) при использовании (3.5) в силу второго уравнения следует зависимость

$$\sigma'_{21} = \frac{\sigma_x}{2} \frac{1 - \nu_{xy}\varepsilon_x}{\sqrt{(1 - \nu_{xy}\varepsilon_x)^2 + (1 + \varepsilon_x)^2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{12}}{2}\right)}. \quad (3.7)$$

Имеют место преобразования

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{12}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\gamma_{12}}{2} + \sin \frac{\gamma_{12}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma_{12}}{2}} + \sin^2 \frac{\gamma_{12}}{2} \right), \quad (3.8)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{12}}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{12}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{12}}{2}\right)} = \frac{\cos \frac{\gamma_{12}}{2} - \sin \frac{\gamma_{12}}{2}}{\cos \frac{\gamma_{12}}{2} + \sin \frac{\gamma_{12}}{2}} = \frac{1 - \nu_{xy}\varepsilon_x}{1 + \varepsilon_x} = r_y. \quad (3.9)$$

Следовательно,

$$\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma_{12}}{2}} + \sin \frac{\gamma_{12}}{2} = r_y \left( \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma_{12}}{2}} + \sin \frac{\gamma_{12}}{2} \right), \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} (1 - r_y) \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma_{12}}{2}} &= (1 + r_y) \sin \frac{\gamma_{12}}{2}, \\ \left( (1 + r_y)^2 + (1 - r_y)^2 \right) \sin^2 \frac{\gamma_{12}}{2} &= (1 - r_y)^2, \\ \sin^2 \frac{\gamma_{12}}{2} &= \frac{(1 - r_y)^2}{(1 + r_y)^2 + (1 - r_y)^2} = \frac{(1 - r_y)^2}{2(1 + r_y^2)}, \quad \sin \frac{\gamma_{12}}{2} = \frac{1 - r_y}{\sqrt{2(1 + r_y^2)}}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

и при этом

$$\sin \gamma_{12} = 2 \sin \frac{\gamma_{12}}{2} \cos \frac{\gamma_{12}}{2} = 2 \sin \frac{\gamma_{12}}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma_{12}}{2}}. \quad (3.12)$$

Таким образом, имеет место точная геометрическая зависимость

$$\sin \gamma_{12} = \frac{2(1 - r_y)}{\sqrt{2(1 + r_y^2)}} \sqrt{1 - \frac{(1 - r_y)^2}{2(1 + r_y^2)}} = \frac{1 - r_y^2}{1 + r_y^2}, \quad (3.13)$$

где

$$r_y = \frac{1 - \nu_{xy} \varepsilon_x}{1 + \varepsilon_x}, \quad (3.14)$$

а формула (3.8) в силу последней формулы из (3.11) запишется в виде

$$\cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{12}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \sqrt{1 - \frac{(1 - r_y)^2}{2(1 + r_y^2)}} + \frac{1 - r_y}{\sqrt{2(1 + r_y^2)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + r_y^2}}, \quad (3.15)$$

в которой  $r_y$  определяется также по формуле (3.14).

При подстановке (3.15) в (3.7) и использовании (3.14) приходим к необходимой для отработки экспериментальных данных зависимости

$$\sigma'_{21} = \frac{\sigma_x}{2} \varphi_{12}(\varepsilon_x) = \tilde{\varphi}_{12}(\varepsilon_x), \quad (3.16)$$

позволяющей при учёте зависимости (3.7) построить также и экспериментальную зависимость

$$\sigma'_{21} = \sigma'_{21}(\sin \gamma_{12}), \quad (3.17)$$

если при их построении использовать зависимость (3.2) между обобщённым (по В.В. Новожилову) напряжением  $\sigma_x^*$  и истинным напряжением  $\sigma_x$ .

Если ввести в рассмотрение наклонное сечение  $z'_* = 0$  и действующий в этом сечении вектор истинных напряжений  $\boldsymbol{\sigma}'_z = \sigma'_{31} \mathbf{e}_1^{r*} + \sigma'_{33} \mathbf{e}_3^{r*}$ , в котором  $\mathbf{e}_1^{r*}, \mathbf{e}_3^{r*}$  – единичные векторы повернутой до деформации на угол  $\pi/4$  системы координат  $Ox'_*z'_*$  в деформированном состоянии, то для определения меры сдвиговой деформации  $\sin \gamma_{13}$  и касательного напряжения  $\sigma'_{31}$  можно составить соотношения и уравнения, аналогичные приведенным выше соотношениям и уравнениям (3.6)-(3.17).

#### 4. ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕХНИЧЕСКОЙ РЕЗИНЫ ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

С целью определения механических характеристик технической резины, которую, как принято считать в научной литературе [3], следует отнести к классу эластомерных материалов, на основе построенных в разделе 3 аналитических зависимостей проведена серия экспериментов на растяжение тест-образцов, вид которых показан на рис.3. Полуфабрикат такой резины представляет собой листовой материал номинальной толщиной  $h = 1.8$  мм. Из листа по шаблону были вырезаны тест-образцы, геометрические размеры которых соответствуют образцу типа 2 согласно ГОСТ 270-75. Общая длина образцов  $L$  составила 110 мм, ширина рабочей части  $b = 2.8$  мм, а её длина  $l_0 = 30$  мм.

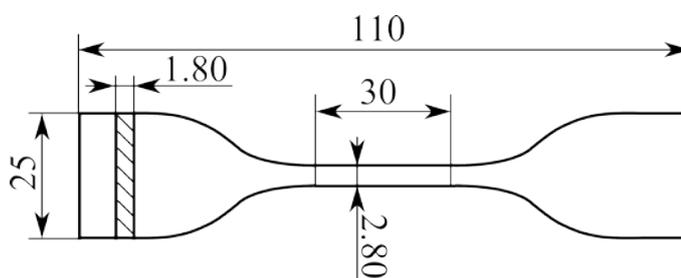


Рис.3. Эскиз тест-образца для испытаний (тип 2 по ГОСТ 270-75).

Эксперименты на растяжение проводились на электромеханической универсальной испытательной машине Shimadzu. Для замера растягивающего усилия использовался установленный на машину тензодинамометр с пределами измерения  $\pm 50$  кН, образцы зажимались в тисковые захваты для эластомерных материалов и пластмасс (рис.4).



Рис.4. Общий вид тест-образца в захватах испытательной машины.

Нагружение проводилось кинематическим способом путем перемещения траверсы машины со скоростью 100 мм/мин до разрыва тест-образца в режиме

квазистатического нагружения. Диаграммы деформирования трёх тест-образцов, представленные в величинах обобщённых напряжений  $\sigma_x^*$  и истинных осевых деформаций  $\varepsilon_x$  (мера деформаций Коши [17]), вычисленных в соответствии с (3.1), приведены на рис.5. Осевая деформация на каждом  $i$ -ом этапе нагружения определялась на основе величины перемещения подвижного захвата машины по формуле  $\varepsilon_x = u_{,x} = (l_i - l_0)/l_0$ , где  $l_i = l_0 + u_i$  ( $u_i$  – перемещение подвижного захвата при фиксируемом значении растягивающей нагрузки  $P_i$ ). Фиксируемые на каждом этапе нагружения предельные значения напряжения  $\sigma_x^*$  и деформации  $\varepsilon_x$ , осреднённые по трём экспериментальным значениям, оказались равными  $\sigma_x^* = 7$  МПа,  $\varepsilon_x = 4.5$ .

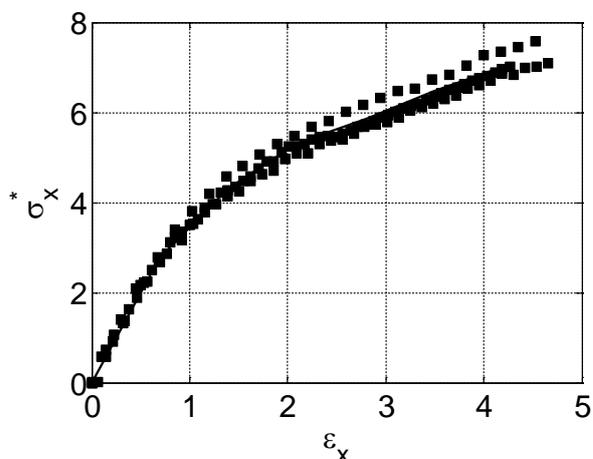


Рис.5. Условные диаграммы деформирования  $\sigma_x^* = \sigma_x^*(\varepsilon_x)$  трёх тест-образцов (утолщённая линия – осреднённая по трём тест-образцам диаграмма), МПа.

С целью определения зависимостей коэффициентов Пуассона в поперечном направлении  $\nu_{xy} = \nu_{xy}(\varepsilon_x)$  и в направлении толщины  $\nu_{xz} = \nu_{xz}(\varepsilon_x)$  для одного из тест-образцов отдельно проведён эксперимент на растяжение с измерением величин  $b_i$  и  $h_i$  на каждом  $i$ -ом этапе нагружения, которое проводилось ступенчато: траверса перемещалась на 2.5 мм и останавливалась на 10 секунд для замера текущей ширины и толщины тест-образца с помощью штангенциркуля. Нагружение проводилось до разрыва рабочей части образца. Полученные результаты представлены на рис.6. Видно, что при увеличении осевой деформации происходит уменьшение поперечных размеров рабочей части вплоть до разрушения. Однако, как можно заметить, в пределах малых деформаций процесс уменьшения площади поперечного сечения происходит интенсивнее, чем при больших деформациях (при приближении к значению  $\varepsilon_x \approx 3.5$  скорость уменьшения  $F^*$  замедляется).

Как известно [3], у эластомеров при деформировании ярко проявляются вязкоупругие свойства. У используемой в экспериментах технической резины их изучение в условиях сдвиговых деформаций было проведено, в частности, в работе [32]. В свете полученных в ней результатов определяемые на каждом  $i$ -ом этапе нагружения деформации  $\varepsilon_x$  включают в себя как упругие,

так и вязкоупругие составляющие (деформации ползучести). Определение таких составляющих деформаций представляет собой отдельную самостоятельную проблему, не являющуюся предметом описываемых в данной статье исследований.

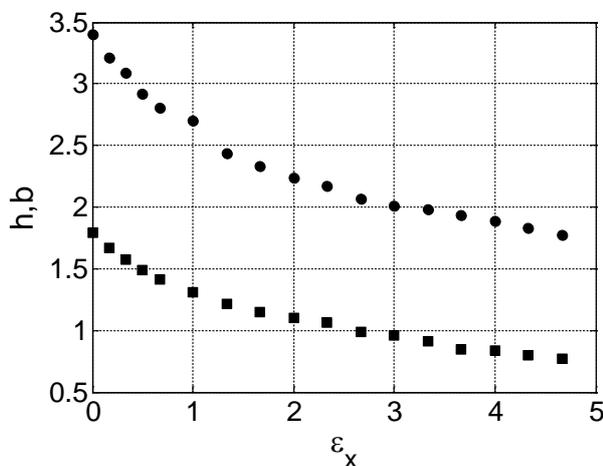


Рис.6. Зависимость ширины  $b$  (круглые маркеры) и толщины  $h$  (квадратные маркеры) тест-образца от осевой деформации, мм.

На основе зависимостей (3.1) и результатов, представленных на рис.6, определены значения коэффициентов Пуассона  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{xz}$  на всём диапазоне изменения осевых деформаций до разрушения. Видно (рис.6) и как было установлено в [17], эти коэффициенты не являются постоянными величинами (что характерно для абсолютного большинства конструкционных материалов), а являются функциями от  $\epsilon_x$ . Такие функции  $\nu_{xy} = \nu_{xy}(\epsilon_x)$  и  $\nu_{xz} = \nu_{xz}(\epsilon_x)$ , найденные на основе полученных экспериментальных данных, построены на рис.7.

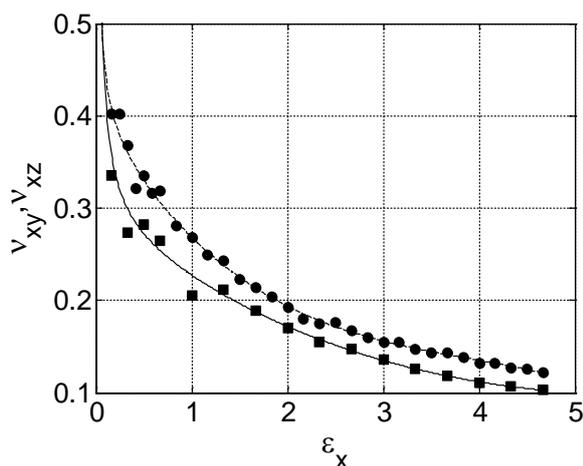


Рис.7. Зависимость коэффициента Пуассона  $\nu_{xy} = \nu_{xy}(\epsilon_x)$  (квадратные маркеры и сплошная линия),  $\nu_{xz} = \nu_{xz}(\epsilon_x)$  (круглые маркеры и штриховая линия) от осевых деформаций  $\epsilon_x$ .

На нём и далее значки маркеров соответствуют исходным экспериментальным данным, а сплошные линии – аппроксимации исходных данных полиномиальной

функцией вида  $\nu_{xy}(\varepsilon_x) = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_x^{n-i}$ ,  $j = x, z$ . Степень полинома  $n$  подбиралась из условия наилучшего совпадения с искомой экспериментальной функцией.

Полученные экспериментальные результаты показали (рис.7), что значения  $\nu_{xy}$  и  $\nu_{xz}$  лишь при малых деформациях близки к значению 0.5, значения  $\nu_{xy}$  на всём диапазоне изменения осевых деформаций лежат ниже значений  $\nu_{xz}$ . Такую анизотропию свойств, по-видимому, можно объяснить способом производства листовой резины, при котором резиновая масса прокатывается через валки. В результате прокатки цепочки молекул ориентируются в плоскости  $xOy$ , вследствие чего материал в направлениях осей  $Ox$  и  $Oy$  становится более податливым (исследуемый материал, по-видимому, можно отнести к классу трансверсально-изотропных [33]).

По найденным функциям Пуассона с помощью зависимости (3.2) можно построить истинную диаграмму деформирования, которая приведена на рис.8. Видно, что на всём исследованном диапазоне изменения  $\varepsilon_x$  полученная диаграмма практически является линейной и может быть описана известным законом Гука

$$\sigma_x = E_u \varepsilon_x, \quad (4.1)$$

где  $E_u = 5.5$  МПа – истинное значение модуля упругости. Данная зависимость является частным случаем соотношений вида (1.9) обобщенного закона Гука, полученная на основе равенств  $\sigma_{22} = 0$ ,  $\sigma_{33} = 0$  и доставляющих зависимости  $\varepsilon_y = -\nu_{xy} \varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z = -\nu_{xz} \varepsilon_x$ . Для сравнения на том же рис.8 приведена условная диаграмма деформирования  $\sigma_x^* = \sigma_x^*(\varepsilon_x)$ , позволяющая определить значения текущего модуля упругости. Видно, что они значительно ниже значения  $E_u = 5.5$  МПа.

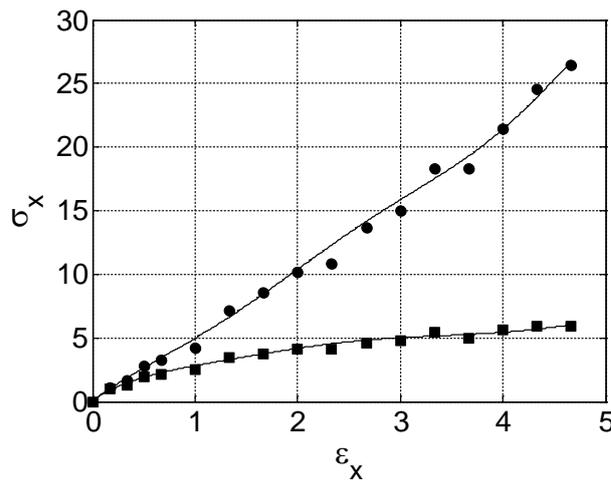


Рис.8. Истинная (круглые маркеры) и обобщённая (квадратные маркеры) диаграммы деформирования  $\sigma_x = \sigma_x(\varepsilon_x)$ , МПа.

Таким образом, исследуемую резину, по-видимому, с большой степенью точности можно отнести к классу трансверсально-изотропных, введя в рассмотрение в качестве механических характеристик модуль упругости  $E = E_u$

в направлениях осей  $x, y$ , модуль упругости  $E_z$  в направлении толщины листа, определяемые из экспериментов коэффициенты (функции) Пуассона

$$\nu_{xy}(\varepsilon_x) = \nu_{yx}(\varepsilon_y), \quad \nu_{xz}(\varepsilon_x) = \nu_{yz}(\varepsilon_y). \tag{4.2}$$

В предположении о линейно упругом поведении такого материала в трехмерном случае вместо (1.9) допустимо записать соотношения обобщенного закона Гука в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu_{xy}(\varepsilon_y)}{E} \sigma_y - \frac{\nu_{xz}(\varepsilon_z)}{E_z} \sigma_z, \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}(\varepsilon_x)}{E} \sigma_x + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu_{zy}(\varepsilon_z)}{E_z} \sigma_z, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{xz}(\varepsilon_x)}{E} \sigma_x - \frac{\nu_{yz}(\varepsilon_y)}{E} \sigma_y + \frac{\sigma_z}{E_z}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

В них для рассматриваемого материала должны выполняться равенства

$$\nu_{xz}(\varepsilon_x) = \nu_{yz}(\varepsilon_y), \quad \nu_{zx}(\varepsilon_z) = \nu_{zy}(\varepsilon_z) \tag{4.4}$$

и иметь место формулы

$$E\nu_{zx}(\varepsilon_z) = E_z\nu_{xz}(\varepsilon_x), \quad E\nu_{zy}(\varepsilon_z) = E_z\nu_{yz}(\varepsilon_y). \tag{4.5}$$

Заметим, что при использовании равенства  $\nu_{zx} = E_z\nu_{xz}/E$ , следующего из первой формулы (4.5), вторая формула преобразуется к виду

$$\nu_{zx}(\varepsilon_z)\nu_{yz}(\varepsilon_y) = \nu_{zy}(\varepsilon_z)\nu_{xz}(\varepsilon_x),$$

которая тождественно выполняется в силу равенств (4.4).

Отметим, что предельные истинные напряжения при разрыве тест-образца достигли значения  $\sigma_x = 26$  МПа, а обобщённые –  $\sigma_x^* = 7$  Мпа.

Найденные экспериментальные зависимости  $\nu_{xy} = \nu_{xy}(\varepsilon_x)$  и  $\nu_{xz} = \nu_{xz}(\varepsilon_x)$  в соответствии с формулой (3.3) позволяют построить зависимость кратности изменения объема  $J$  от истинной осевой деформации  $\varepsilon_x$  (см. рис.9).

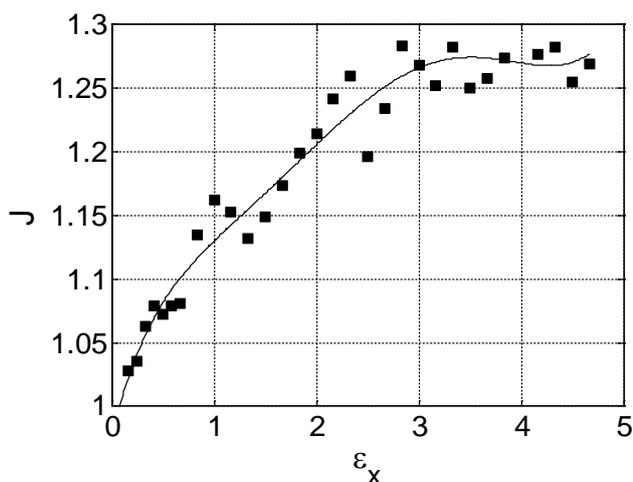


Рис.9. Зависимость кратности изменения объема  $J$  от осевой деформации  $\varepsilon_x$  (экспериментальные данные – квадратные маркеры, аппроксимация – сплошная линия).

Заметим, что в силу  $J \neq 1 \neq \text{const}$  исследуемая резина не может быть отнесена к классу несжимаемых эластомеров, детально исследованных, в частности, в монографии К.Ф. Черныха [3]. В силу  $\nu_{xy} \approx \nu_{xz} \approx 0.5$  её можно считать несжимаемой лишь при малых деформациях в начале процесса нагружения (рис.7). Кроме того, заметим, что диаграмма  $J = J(\varepsilon_x)$ , приведенная на рис.9, имеет предельную точку  $\varepsilon_x = \varepsilon_{(1)}^{cr}$ , а в свете результатов, изложенных в разделе 2, диаграмма  $\sigma_x^* = \sigma_x^*(\varepsilon_x)$ , приведенная на рис.8, также может иметь предельную точку.

Для их определения и исследования в рассматриваемом случае, исходя из зависимостей ( $\tilde{P} = P/(E_u F)$ )

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \varepsilon_x (1 - \nu_{xy} \varepsilon_x)(1 - \nu_{xz} \varepsilon_x) = \nu_{xy} \nu_{xz} \varepsilon_x^3 - (\nu_{xy} + \nu_{xz}) \varepsilon_x^2 + \varepsilon_x, \\ J &= (1 + \varepsilon_x)(1 - \nu_{xy} \varepsilon_x)(1 - \nu_{xz} \varepsilon_x) = (1 - \nu_{xy} \varepsilon_x)(1 - \nu_{xz} \varepsilon_x) + \\ &+ \varepsilon_x (1 - \nu_{xy} \varepsilon_x)(1 - \nu_{xz} \varepsilon_x) = \tilde{P} + (1 - \nu_{xy} \varepsilon_x)(1 - \nu_{xz} \varepsilon_x) = \tilde{P} + \frac{F}{F^*}, \end{aligned}$$

необходимо составить уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}}{d\varepsilon_x} &= \frac{d}{d\varepsilon_x} (\nu_{xy} \nu_{xz}) \varepsilon_x^3 + \left[ 3\nu_{xy} \nu_{xz} - \frac{d}{d\varepsilon_x} (\nu_{xy} + \nu_{xz}) \right] \varepsilon_x^2 - \\ &- 2(\nu_{xy} + \nu_{xz}) \varepsilon_x + 1 = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\varepsilon_x} &= \frac{d}{d\varepsilon_x} (\nu_{xy} \nu_{xz}) \varepsilon_x^2 + \left( 2\nu_{xy} \nu_{xz} - \frac{d\nu_{xy}}{d\varepsilon_x} - \frac{d\nu_{xz}}{d\varepsilon_x} \right) \varepsilon_x - \\ &- \nu_{xy} - \nu_{xz} + \frac{d\tilde{P}}{d\varepsilon_x} = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

решением которых могут быть определены их минимальные корни  $\varepsilon_{(1)}^{cr}$  и  $\varepsilon_{(2)}^{cr}$ .

Графики изменения производных  $d\tilde{P}/d\varepsilon_x$  и  $dJ/d\varepsilon_x$  по  $\varepsilon_x$  приведены на рис.10,11.

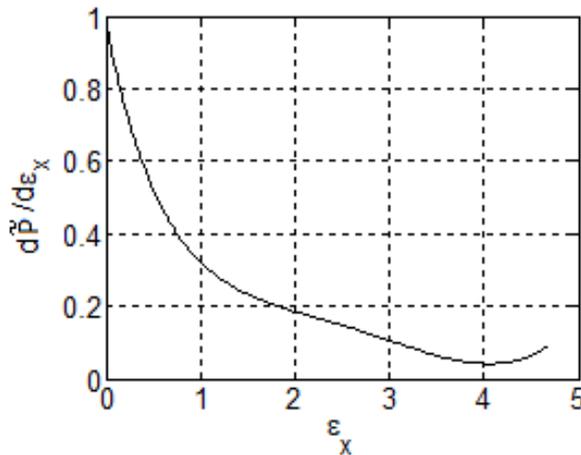


Рис.10. Зависимость  $d\tilde{P}/d\varepsilon_x$  от  $\varepsilon_x$ .

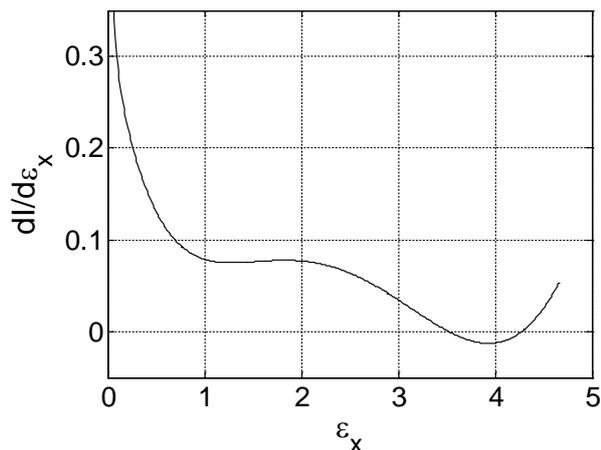


Рис.11. Зависимость  $dJ/d\varepsilon_x$  от  $\varepsilon_x$ .

Как можно заметить, уравнение (4.6) для исследуемой резины не имеет корней, тогда как минимальным корнем уравнения (4.7) является значение  $\varepsilon_x \approx 3.5$ . В предельно упрощенном случае, когда  $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu = \text{const}$ , корни уравнения (4.6) связаны со значениями  $P_{cr}^{(2)}$  и  $u_{cr}$ , определяемыми по формулам (2.9) и (2.10).

Мерой сдвиговой деформации при малых её значениях служит угол сдвига  $\gamma$ , связанный с деформацией  $\varepsilon_x$  при растяжении тест-образца зависимостью (см., например в [34,35])

$$\gamma_{12} = (1 + \nu_{xy})\varepsilon_x,$$

а при больших деформациях за меру сдвиговой деформации следует принимать величину  $\sin \gamma$ . Сравнение значений описанных мер сдвиговых деформаций, найденных на основе полученных экспериментальных данных, приведено на рис.12.

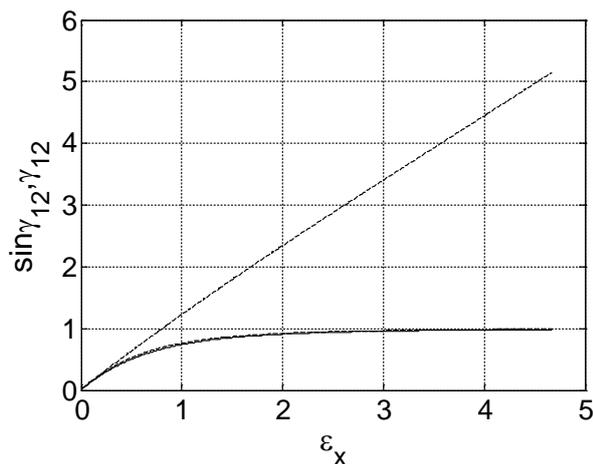


Рис.12. Зависимости мер сдвиговой деформации  $\gamma_{12}$  (штриховая линия) и  $\sin \gamma_{12}$  (сплошная линия) от осевой деформации  $\varepsilon_x$ .

На нём хорошо видно, что значения  $\gamma_{12}$  и  $\sin \gamma_{12}$ ,  $\sin \gamma_{13}$  можно считать практически совпадающими только до  $\varepsilon_x \approx 0.2$ , при максимальных же деформациях разница значений отличается в 5 раз. При деформировании тест-образцов

из «жестких» материалов деформации растяжения не превышают 0.2% для металлов в упругой зоне и 1% для композиционных материалов, что позволяет меры деформации  $\gamma$  и  $\sin \gamma$  считать эквивалентными.

Используя выражения (3.7), можно построить экспериментальные диаграммы деформирования в координатах « $\sigma'_{21} - \sin \gamma_{12}$ » и « $\sigma'_{31} - \sin \gamma_{13}$ », которые приведены на рис.13.

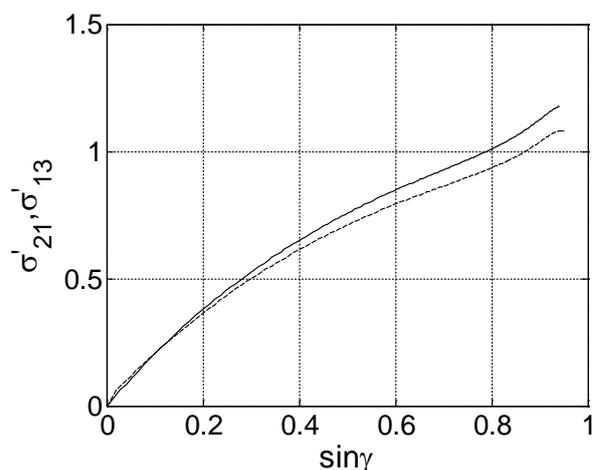


Рис.13. Диаграммы деформирования « $\sigma'_{21} - \sin \gamma_{12}$ » (сплошная линия) и « $\sigma'_{31} - \sin \gamma_{13}$ » (штриховая линия).

Видно, что с практически приемлемой степенью точности полученные экспериментальные диаграммы деформирования могут быть аппроксимированы кусочно-линейными функциями, зависимость  $\sigma'_{31}(\sin \gamma_{13})$  лежит ниже зависимости  $\sigma'_{21}(\sin \gamma_{12})$ , однако такую разницу в диаграммах в практических расчетах, по-видимому, можно и не учитывать.

Таким образом, исходя из построенных зависимостей  $\sigma'_{21} = \sigma'_{21}(\sin \gamma_{12})$  и  $\sigma'_{31} = \sigma'_{31}(\sin \gamma_{13})$  (рис.13), для касательного напряжения  $\sigma'_{21}$  можно использовать физические соотношения, составленные в приближении

$$\sigma'_{21}(\sin \gamma_{12}) = 1.9401 \sin \gamma_{12}, \quad 0 \leq \sin \gamma_{12} \leq 0,2;$$

$$\sigma'_{21}(\sin \gamma_{12}) = 0.8520 \sin \gamma_{12} + 0.3326, \quad 0,2 \leq \sin \gamma_{12} \leq 0,9.$$

Следовательно, для модуля сдвига исследуемой резины можно принять значения  $G_{12} \approx 1,94$  МПа при  $0 \leq \sin \gamma_{12} \leq 0,2$  и  $G_{12} \approx 0.85$  МПа при  $0,2 \leq \sin \gamma_{12} \leq 0,9$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Содержание раздела 3 статьи представляет собой теоретические основы для обработки результатов экспериментов на растяжение плоских тест-образцов из эластомеров с целью определения введенных в рассмотрение механических характеристик эластомера при конечных деформациях. Как следует из их анализа, наряду с модулем упругости  $E$ , связывающим истинное нормальное напряжение  $\sigma_x$  с истинной продольной деформацией  $\varepsilon_x$ , а также с модулями сдвига

$G_{xy}, G_{xz} = G_{yz}$ , связывающими истинные касательные напряжения  $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}$  с истинными мерами сдвиговых деформаций  $\sin \gamma_{xy}, \sin \gamma_{xz}$ , определяемые на основе описанных в статье экспериментов, «коэффициенты» Пуассона, являющиеся функциями от истинной продольной деформации, по физическому и геометрическому содержанию также следует отнести к механическим характеристикам исследуемого эластомера. Рассматриваемая техническая листовая резина в силу особенностей технологии ее изготовления оказалась обладающей свойствами трансверсально-изотропного материала. Если для эластомера будут выполняться равенства  $\nu_{xy}(\varepsilon_x) = \nu_{xz}(\varepsilon_x) = \nu(\varepsilon_x)$ , то к числу механических характеристик следует отнести зависимости  $\nu = \nu(\varepsilon_x)$ ,  $E = E(\varepsilon_x)$ ,  $G = G(\varepsilon_x)$ , определяемые с использованием полученных в статье теоретических зависимостей путем обработки результатов экспериментов лишь на растяжение.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. *Основы нелинейной теории упругости*. – М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 212 с.
2. Новожилов В.В. *Теория упругости*. – Л.: Судпромгиз, 1956. – 372 с.
3. Черных К.Ф. *Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах*. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отделение, 1986. – 336 с.
4. Rivlin R.S. *Some topics in finite elasticity* / In: Goodier J.N., Hoff N.J. (Eds.) “Structural Mechanics: Proceedings of the First Symposium on Naval Structural Mechanics”. Pergamon Press, Oxford, 1960, 169-198 p.
5. Ривлин Р.С. *Большие упругие деформации* / В книге: Реология. – М.: ИЛ. 1962.
6. Грин А., Адкинс Дж. *Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды*. – М.: Мир, 1965. – 455с.
7. Green A.E., Zerna W. *Theoretical Elasticity*. – Oxford, 1968. – 156 p.
8. Alexander H.A. *Constitutive relation for rubber-like materials* // Intern. J. Engng. Sci. – 1968. – No.6. – Pp.549-563.
9. Ogden R.W. *Large deformation of isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubber-like solids* // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. – 1977. – Vol.A328. – Pp.567-583.
10. Murnaghan F. *Finite deformation of an elastic solids*. – N.-Y.: John Wiley a. Sons, 1951. – 140 p.
11. Mooney M.A. *Theory of large elastic deformation* // J. Appl. Phys. – 1940. – No.11. – Pp.582-592.
12. Бидерман В.Л. *Вопросы расчета резиновых деталей* / В книге: Расчеты на прочность. Вып.3. – М.: ГНТИ, 1958.
13. Бартенев Г.М. Хазанович Т.Н. *О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров* // Высокомолекулярные соединения. – 1960. – Т.2. – №1. – С.20-28.
14. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. *Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения*. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
15. Шкутин Л.И. *Инкрементальная модель деформации стержня* // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т.40. – №4. – С.229-235.

16. Голованов А.И., Султанов Л.У. *Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред*. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 465 с.
17. Starkova O., Aniskevich A. *Poisson's ratio and the incompressibility relation for various strain measures with the example of a silica-filled SBR rubber in uniaxial tension tests* // Polymer Testing. – 2010. – Vol.29. – Pp.310-318.
18. Mott P.H., Dorgan J.R., Roland C.M. *The bulk modulus and Poisson's ratio of "incompressible" materials* // J. Sound and Vibration. – 2008. – Vol.312. – Pp.572-575.
19. Tschoegl N.W., Knauss G.W., Emri I. *Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review* // Mech. of Time-Dependent Materials. – 2002. – Vol.6. – Pp.3-51.
20. Smith C.W., Wootton R.J., Evans K.E. *Interpretation of experimental data for Poisson's ratio of highly nonlinear materials* // Exp. Mechanics. – 1999. – Vol.39. – No.4. – Pp.356-362.
21. Amin A.F.M.S., Alam M.S., Okui Y. *Measurement of lateral deformation in natural and high damping rubbers in large deformation uniaxial tests* // J. Testing and Evaluation. – 2003. – Vol.31. – No.6. – Pp.524-532.
22. Lakes R.S., Wineman A. *On Poisson's ratio in linearly viscoelastic solids* // J of Elasticity. – 2006. – Vol.85. – Pp.45-63.
23. Pritchard R.H., Lava P., Debruyne D., Terentjev E.M. *Precise determination of the Poisson ratio in soft materials with 2D digital image correlation* // Soft Matter. – 2013. – Vol.9. – 6037.
24. O'Brien D.J., Sottos N.R., White S.R. *Cure-dependent viscoelastic Poisson's ratio of epoxy* // Exp. Mech. – 2007. – Vol.47. – Pp.237-249.
25. Luo R.K. *Shear criterion and experimental verification for antivibration fatigue design* // Exp. Mech. – 2022. – Vol.62. – Pp.537-547.
26. Luo R.K. *Shear modulus-based prediction of the fatigue life of antivibration rubber components* // Int. J. of Fatigue. – 2022. – Vol.162. – 107010.
27. Addiego F., Dahoun A., G'Sell C., Hiver J.-M. *Characterization of volume strain at large deformation under uniaxial tension in high-density polyethylene* // Polymer. – 2006. – Vol.47. – Pp.4387-4399.
28. Cheng M., Chen W. *Experimental investigation of the stress-stretch behavior of EPDM rubber with loading rate effects* // Int. J. of Sol. and Struct. – 2003. – Vol.40. – Pp.4749-4768.
29. Parsons E., Boyce M.C., Parks D.M. *An experimental investigation of the large-strain tensile behavior of neat and rubber-toughened polycarbonate* // Polymer. – 2004. – Vol.45. – Pp.2665-2684.
30. Bechir H., Methia M., Yaya K. *Comparison behavior of two compressible isotropic hyperelastic models in framework of a coupled axial stretch to simple shear test* // Meccanica. – 2024. – Vol.59. – Pp.415-432.
31. Бережной Д.В., Паймушин В.Н. *О двух постановках упругопластических задач и теоретическое определение места образования шейки в образцах при растяжении* // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т.75. – №4. – С.635-659.
32. Паймушин В. Н., Фирсов В.А., Газизуллин Р.К., Холмогоров С.А., Шишкин В.М. *Теоретико-экспериментальный метод определения параметров кратковременной и длительной ползучести резины при сдвиге* // Механика композитных материалов. – 2019. – Т.55. – №4. – С.635-662.

33. Черных К.Ф. *Введение в анизотропную упругость*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 192 с.
34. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. *Физико-механические характеристики волокнистого композита на основе углеродной ЭЛUR-II и связующего XT-118* // Механика композитных материалов. – 2017. – Т.54. – №1. – С.5-20.
35. Paimushin V.N., Chate A.K., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Gazizullin R.K. *Multiscale buckling modes in the mechanics of fiber-reinforced plastics* (Advanced Structured Materials. Vol.207). – Switzerland AG.: Springer nature, 2024. – 164 p.

## REFERENCES

1. Novozilov V.V. *Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti [Fundamentals of nonlinear elasticity theory]*. Moskva-Leningrad, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoj literatury, 1948, 212 p.
2. Novozilov V.V. *Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]*. Leningrad, Sudpromgiz, 1956, 372 p.
3. Chernykh K.F. *Nelinejnaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nykh raschetakh [Nonlinear theory of elasticity in mechanical engineering calculations]*. Leningrad, Mashinostroenie, Leningradskoe otdelenie, 1986, 336 p.
4. Rivlin R.S. *Some topics in finite elasticity*. In: Goodier J.N., Hoff N.J. (Eds.), "Structural Mechanics: Proceedings of the First Symposium on Naval Structural Mechanics". Pergamon Press, Oxford, 1960, Pp.169-198.
5. Rivlin R.S. *Bol'shie uprugie deformatsii [Large elastic deformations]*. V knige: Reologiya, Moskva, IL, 1962.
6. Grin A., Adkins J. *Bol'shie uprugie deformatsii i nelinejnaya mekhanika sploshnoj sredy [Large elastic deformations and nonlinear continuum mechanics]*. Moskva, Mir, 1965, 455 p.
7. Green A.E., Zerna W. *Theoretical elasticity*. Oxford, 1968, 156 p.
8. Alexander H.A. *Constitutive relation for rubber-like materials*. Int. J. Engng. Sci., 1968, Vol.6, Pp.549-563.
9. Ogden R.W. *Large deformation of isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubber-like solids*. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 1977, A328, Pp.567-583.
10. Murnaghan F. *Finite deformation of an elastic solids*. N.-Y., John Wiley a. Sons, 1951.
11. Mooney M.A. *Theory of large elastic deformation*. J. Appl. Phys., 1940, Vol.11, Pp.582-592.
12. Biderman V.L. *Voprosy rascheta rezinovykh detalej [Questions of calculation of rubber parts]*. V knige: Raschety na prochnost'. Vypusk 3, Moskva, GNTI, 1985.
13. Bartenev G.M., Khazanovich T.N. *O zakone vysokoehlastichnykh deformatsij setochnykh polimerov [On the law of highly elastic deformations of network polymers]*. Vysokomolekulyarnye soedineniya, 1960, Vol.2, No.1, Pp.20-28.
14. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. *Bol'shie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya [Large elastic-plastic deformations: theory, algorithms, applications]*. Moskva, Nauka, 1986, 232 p.
15. Shkutin L.I. *Inkremental'naya model' deformatsii sterzhnya [Incremental model of rod deformation]*. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 1999, Vol.40, No.4, Pp.229-235.

16. Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Matematicheskie modeli vychislitel'noj nelinejnoj mekhaniki deformiruemykh sred [Mathematical models of computational nonlinear mechanics of deformable media]*. Kazan', Kazanskij gosudarstvennyj universitet, 2009, 465 p.
17. Starkova O., Aniskevich A. *Poisson's ratio and the incompressibility relation for various strain measures with the example of a silica-filled SBR rubber in uniaxial tension tests*. Polymer Testing, 2010, Vol.29, Pp.310-318.
18. Mott P.H., Dorgan J.R., Roland C.M. *The bulk modulus and Poisson's ratio of "incompressible" materials*. J. Sound and Vibration, 2008, Vol.312, Pp.572-575.
19. Tschoegl N.W., Knauss G.W., Emri I. *Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review*. Mech. of Time-Dependent Materials, 2002, Vol.6, Pp.3-51.
20. Smith C.W., Wootton R.J., Evans K.E. *Interpretation of experimental data for Poisson's ratio of highly nonlinear materials*. Exp. Mechanics, 1999, Vol.39, No.4, Pp.356-362.
21. Amin A.F.M.S., Alam M.S., Okui Y. *Measurement of lateral deformation in natural and high damping rubbers in large deformation uniaxial tests*. J. Testing and Evaluation, 2003, Vol.31, No.6, Pp.524-532.
22. Lakes R.S., Wineman A. *On Poisson's ratio in linearly viscoelastic solids*. J. of Elasticity, 2006, Vol.85, Pp.45-63.
23. Pritchard R.H., Lava P., Debruyne D., Terentjev E.M. *Precise determination of the Poisson ratio in soft materials with 2D digital image correlation*. Soft Matter, 2013, Vol.9, 6037.
24. O'Brien D.J., Sottos N.R., White S.R. *Cure-dependent viscoelastic Poisson's ratio of epoxy*. Exp. Mech, 2007, Vol.47, Pp.237-249.
25. Luo R.K. *Shear criterion and experimental verification for antivibration fatigue design*. Exp. Mech., 2022, Vol.62, Pp.537-547.
26. Luo R.K. *Shear modulus-based prediction of the fatigue life of antivibration rubber components*. Int. J. of Fatigue, 2022, Vol.162, 107010.
27. Addiego F., Dahoun A., G'Sell C., Hiver J.-M. *Characterization of volume strain at large deformation under uniaxial tension in high-density polyethylene*. Polymer, 2006, Vol.47, Pp.4387-4399.
28. Cheng M., Chen W. *Experimental investigation of the stress–stretch behavior of EPDM rubber with loading rate effects*. Int. J. of Sol. and Struct, 2003, Vol.40, Pp.4749-4768.
29. Parsons E., Boyce M.C., Parks D.M. *An experimental investigation of the large-strain tensile behavior of neat and rubber-toughened polycarbonate*. Polymer, 2004, Vol.45, Pp.2665-2684.
30. Bechir H., Methia M., Yaya K. *Comparison behavior of two compressible isotropic hyperelastic models in framework of a coupled axial stretch to simple shear test*. Meccanica, 2024, Vol.59, Pp.415-432.
31. Berezhnoi D.V. *Two formulations of elastoplastic problems and the theoretical determination of the location of neck formation in samples under tension*. J. Appl. Math. Mech., 2011, Vol.75, No.4, Pp.447-462.
32. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gazizullin R.K., Kholmogorov S.A., Shishkin V.M. *Theoretical-experimental method for determining the short- and long-term creep parameters of technical rubber in shear*. Mechanics of composite materials, 2019, Vol.55, No.4, Pp.435-454.

33. Chernykh K.F. *Vvedenie v anizotropnyuyu uprugost' [Introduction to Anisotropic Elasticity]*. Moskva, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1988, 192 p.
34. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. *Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder*. Mechanics of composite materials, 2018, Vol.54, No.1, Pp.2-12.
35. Paimushin V.N., Chate A.K., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Gazizullin R.K. *Multiscale buckling modes in the mechanics of fiber-reinforced plastics*. Advanced Structured Materials, Vol.207, Switzerland AG, Springer nature, 2024, 164 p.

Поступила в редакцию 03 сентября 2024 года.

---

Сведения об авторах:

Паймушин Виталий Николаевич – д.ф.-м.н., проф., Кафедра «Прочность конструкций», ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», г. Казань, Россия; e-mail: [vpajmushin@mail.ru](mailto:vpajmushin@mail.ru)

Холмогоров Сергей Андреевич – к.ф.-м.н., доц., Кафедра «Прочность конструкций», ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», г. Казань, Россия; e-mail: [hkazan@yandex.ru](mailto:hkazan@yandex.ru)

Якубовский Кирилл Константинович – асп., Кафедра «Прочность конструкций», ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», г. Казань, Россия; e-mail: [kirya.yakubovskiy.97@mail.ru](mailto:kirya.yakubovskiy.97@mail.ru)