

УДК 539.3

EDN EPBADO (<https://elibrary.ru/epbado>)

DOI 10.33113/mkmk.ras.2024.30.03.02



СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С СЕГМЕНТОМ ОБОЛОЧКИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ГРУНТЕ, НА ОСНОВАНИИ МЕТОДА КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК*

Локтева Н.А., Во Ван Дай

*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)», г. Москва, Россия
Технический университет Ле Куи Дона,
г. Ханой, Социалистическая республика Вьетнам*

АННОТАЦИЯ

В данной статье представлен подход к решению связанных задач о взаимодействии волны в грунте с преградой, где в качестве преграды используется сегмент цилиндрической оболочки. Движение грунта моделировалось с помощью модели упругой среды, в качестве модели преграды была взята оболочка Кирхгофа-Лява. Рассматривается бесконечный вдоль собственной оси цилиндр. В ходе решения было рассмотрено движение грунта, найдены поверхностные функции влияния для него, а также перемещения и напряжения в набегающей гармонической цилиндрической волне, которая непосредственно воздействовала на преграду. Так как наиболее эффективными вибропоглощающими свойствами обладают ветрозащитные экраны, имеющие ту же форму что и набегающая волна, то в качестве преграды рассматривался сегмент цилиндра. В качестве условий контакта бралось равенство перемещений среды и преграды. Основной задачей являлось определение перемещений в любой точке грунта после прохождения волной преграды.

Одной из проблем при решении подобного класса задач является нахождение аналитического решения для условий закрепления вибропоглощающей преграды, отличных от шарнирных. Для решения данной проблемы применялся метод компенсирующих нагрузок, позволяющий обеспечить выполнение любых граничных условий, соответствующих различным реальным способам закрепления вибропоглощающих экранов.

Таким образом, решение поставленной задачи было разбито на три этапа. На первом этапе задавалось движение цилиндрической оболочки под воздействием цилиндрической гармонической волны. На втором этапе изучалось движение упругой среды и цилиндрической волны, индуцированной в ней. Далее решалась связанная задача о взаимодействии волны и преграды в упругой среде. Решение было получено для полной цилиндрической оболочки. После чего были определены функции влияния перемещений и на основании метода компенсирующих нагрузок в точках цилиндра, соответствующих границам вибропоглощающего экрана, было обеспечено выполнение граничных условий. В качестве примера были рассмотрены граничные условия, соответствующие жесткой заделке.

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-19-00845, <https://rscf.ru/project/24-19-00845/>.

Ключевые слова: однородная изотропная оболочка Кирхгофа-Лява; гармоническая цилиндрическая волна; функция влияния; поверхностная функция влияния; ряд Фурье; нормальное перемещение; касательное перемещение

INTERACTION OF CYLINDRICAL HARMONIC WAVES WITH A SHELL SEGMENT LOCATED IN THE GROUND USING THE METHOD OF COMPENSATING LOADS

Lokteva N.A., Vo Van Dai

Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russia
Le Quy Don Technical University, Ha Noi, Socialist Republic of Vietnam

ABSTRACT

This article presents an approach to solving related problems of the interaction of a wave in the ground with an obstacle, where a segment of a cylindrical shell is used as an obstacle. The ground movement was simulated using an elastic medium model; the Kirchhoff-Love shell was taken as a model of the obstacle. We consider a cylinder infinite along its own axis. During the solution, the motion of the soil was considered, the surface influence functions for it were found, as well as the displacement and stress in the oncoming harmonic cylindrical wave, which directly affected the obstacle. Since wind shields having the same shape as the oncoming wave have the most effective vibration-absorbing properties, a cylinder segment was considered as a barrier. The equality of the displacements of the medium and the obstacle was taken as contact conditions. The main task was to determine displacements at any point in the ground after the wave passed an obstacle.

One of the problems in solving this class of problems is finding an analytical solution for the conditions for securing a vibration-absorbing barrier other than hinged ones. To solve this problem, the method of compensating loads was used, which makes it possible to ensure the fulfillment of any boundary conditions corresponding to various real methods of securing vibration-absorbing screens.

Thus, the solution to the problem was divided into three stages. At the first stage, the motion of a cylindrical shell under the influence of a cylindrical harmonic wave was specified. At the second stage, the motion of an elastic medium and a cylindrical wave induced in it was studied. Next, a related problem about the interaction of a wave and an obstacle in an elastic medium was solved. The solution was obtained for a complete cylindrical shell. After that, the functions of the influence of displacements were determined and, based on the method of compensating loads, the fulfillment of boundary conditions was ensured at points of the cylinder corresponding to the boundaries of the vibration-absorbing screens. As an example, the boundary conditions corresponding to a rigid embedment were considered.

Keywords: homogeneous isotropic Kirchhoff-Love shell; harmonic cylindrical wave; influence function; surface influence function; Fourier series; normal movement; tangential movement

ВВЕДЕНИЕ

В основе изучаемой проблемы лежит практическая задача об изоляции зданий и сооружений от негативного воздействия вибраций, индуцированных транспортными или промышленными объектами. В целом, существует достаточно большое количество причин возникновения колебаний и вибраций в грунте как антропогенной природы, так и возникающих по естественным причинам. Однако все они в той или иной степени оказывают негативное

воздействие на фундаменты зданий и сооружений [1]. Источником неблагоприятного воздействия могут выступать: транспорт [2,3,4], производственное оборудование, строительные работы, землетрясение [5]. На данный момент существует большое количество работ, посвященных защите от землетрясений [6]. Если первые две причины, как правило, создают некомфортные условия существования для человека, то землетрясения являются одним из самых опасных источников движения. В соответствии с характером различают следующие виды вибрационных воздействий [5]: продолжительные, импульсные и прерывистые вибрации. Импульсное воздействие, как правило, связано с взрывами, падением оборудования, столкновением транспорта с конструкциями [7]. Стационарное воздействие является наиболее распространенным видом воздействия на фундаменты зданий, и на данный момент существует достаточно большое количество способов решения данной проблемы.

Современные методы и системы вибро- и сейсмозащиты можно разделить на две основные группы [5]: защита от вибраций, закладываемая в конструкцию на уровне проектирования и включающая в себя гасящие вибрации устройства; и подход, основанный на создании вибропоглощающих преград [5,6]. В последнем случае в качестве преграды могут рассматриваться как вертикальные виброзащитные экраны, так и траншеи. При этом необходимо учитывать, что вибропоглощающие экраны демонстрируют наибольшую эффективность в том случае, если их форма совпадает с формой набегающей волны.

В рамках данной работы изучается взаимодействие вибропоглощающего экрана, помещенного в упругую среду, моделирующую грунт, и цилиндрической гармонической волны. Вибропоглощающий экран представляет из себя жестко закрепленный по краям сегмент цилиндра. Движение грунта моделируется с помощью модели упругой среды, в качестве модели преграды была взята цилиндрическая оболочка Кирхгофа-Лява, бесконечная вдоль собственной оси. В ходе решения было рассмотрено движение грунта, найдены поверхностные функции влияния для него, а также перемещения и напряжения в набегающей гармонической цилиндрической волне, которая непосредственно воздействовала на преграду. Существует достаточно много решений подобных задач [8,9]. Особенностью данной постановки задачи является способ закрепления оболочки, моделирующей экран. При использовании видов закрепления, отличных от шарнирного, возникают существенные математические сложности, так как становится невозможным подобрать такие собственные функции, чтобы возможно было выполнить аналитическое решение в коэффициентах рядов.

Для решения поставленной задачи использован метод компенсирующих нагрузок [10], который позволяет решать подобные задачи для любых реальных видов закрепления преград. Подход, реализованный в данной работе, во многом перекликается с решением обратных задач в нестационарной постановке, реализованных в таких работах как [11,12,13,14], где рассматривается движение пластины типа Тимошенко. Решение подобных задач строится на определении так называемых функций влияния, определяемых как в вышеуказанных работах.

Применяя функции влияния, полученные для оболочки Кирхгофа-Лява, становится возможным определить величины компенсирующих нагрузок, которые необходимо приложить в точках цилиндра, находящегося под воздействием волны, чтобы получить граничные условия, соответствующие граничным условиям сегмента оболочки.

Результатом данной работы является подход, позволяющий определить перемещения в любой точке упругой среды после прохождения волной вибропоглощающей преграды. В качестве примера был рассмотрен сегмент цилиндрической оболочки с жестко закрепленными краями и получено перемещение на границе преграды и упругой среды.

Выбранная модель взаимодействия сегмента оболочки и грунта позволяет варьировать геометрические параметры и свойства материала преграды, и реализовывать различные способы закрепления сегмента цилиндра, получая таким образом преграду с оптимальными вибропоглощающими свойствами.

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе изучается взаимодействие жестко закрепленного сегмента оболочки, расположенной в грунте и подвергающейся воздействию гармонической цилиндрической волны.

Рассматривается сегмент тонкой упругой изотропной оболочки типа Кирхгофа-Лява [15] постоянной толщины h и радиуса r , угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (рис.1).

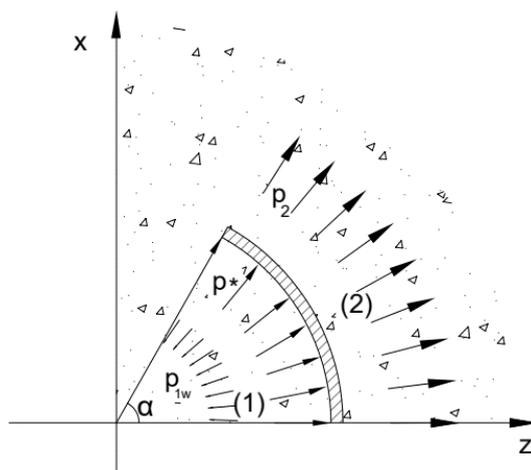


Рис.1. Взаимодействие преграды с гармонической цилиндрической волной в грунте.

Задача решается в цилиндрической системе координат Ora , связанной с осью цилиндрической оболочки. Сегмент оболочки помещен в грунт и делит пространство на две зоны «1» и «2». Сегмент бесконечен по координате y , что позволяет решать задачу в плоской постановке. На него воздействует гармоническая цилиндрическая волна, источник которой совпадает с началом координат

$$p_*(r, \alpha, t) = p_a(r, \alpha) e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Индекс в амплитудном выражении давления в дальнейшем опускается. Индуцированная волна взаимодействует с сегментом оболочки. При этом прошедшая преграду волна обозначается p_2 , отраженная волна – p_{1w} .

Рассматриваются два случая закрепления сегмента оболочки.

В первом случае считается, что левый край сегмента жестко закреплен, а правый – свободен. Граничные условия соответствующие данному виду закрепления приведены в выражении (2)

$$\begin{aligned} w(r, \alpha)|_{\alpha=0} = 0, \quad w'(r, \alpha)|_{\alpha=0} = 0, \\ w''(r, \alpha)|_{\alpha=\frac{\pi}{6}} = 0, \quad w'''(r, \alpha)|_{\alpha=\frac{\pi}{6}} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Во втором случае рассматривается жесткое закрепление с обоих краев сегмента. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} w(r, \alpha)|_{\alpha=0, \alpha=\frac{\pi}{6}} = 0, \\ w'(r, \alpha)|_{\alpha=0, \alpha=\frac{\pi}{6}} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Как известно, задачи о движении пластин и оболочек достаточно просто решаются в коэффициентах рядов при одном конкретном виде закрепления – шарнирном опирании. В данной работе предлагается подход, основанный на методе эквивалентных граничных условий, когда находится решение для шарнирного опирания или, как в нашем случае, для всей оболочки целиком, а далее приложением сосредоточенных сил и моментов обеспечивается выполнение граничных условий в соответствующих точках оболочки.

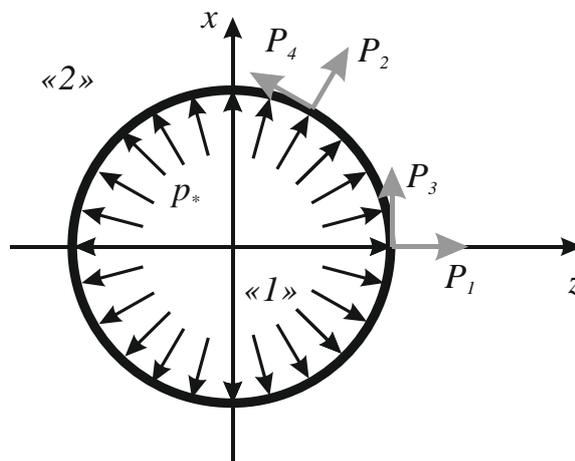


Рис.2. Система компенсирующих нагрузок, обеспечивающих выполнение граничных условий для сегмента оболочки под воздействием волны в грунте.

При решении данной задачи используются уравнения движения оболочки типа Кирхгофа-Лява, уравнения движения сред в потенциалах. Учитывается гармоничность набегающей волны и, как следствие, изменение по гармоничному закону всех функций.

Затем необходимо определить число и величины сосредоточенных сил и моментов, которые бы обеспечили выполнение граничных условий. Для этого находятся функции влияния для перемещений под воздействием Дельта-функции, приложенной по нормали к оболочке и по касательной.

Исходя из условий поставленной задачи и особенностей модели оболочки, приложим две нормальные силы и две касательные в точках, соответствующих крайним точкам изучаемого сегмента (рис.2).

Перемещение средней линии оболочки складывается из перемещения, возникающего под воздействием цилиндрической волны, и перемещений под воздействием компенсирующих нагрузок в виде сил и моментов,

определяемых как свертки их величин с соответствующими функциями влияния. Величины сил и моментов определяются из граничных условий

$$w(r, \alpha, \omega) = w^p(r, \alpha, \omega) + [P_1 * G_w^v(r, a_1, \omega) + P_2 * G_w^v(r, a_2, \omega)] + [P_3 * G_w^r(r, a_3, \omega) + P_4 * G_w^r(r, a_4, \omega)]. \quad (4)$$

В выражении (4) введены следующие обозначения: $w(r, \alpha, \omega)$ – нормальное перемещение среды «2» на границе с оболочкой, совпадающее с перемещением ее средней линии; $w^p(r, \alpha, \omega)$ – перемещение средней линии оболочки под воздействием цилиндрической волны; P_n – величины приложенных сосредоточенных сил, где $n = 1, 2, 3, 4$; $G_w^v(r, a_n, \omega)$ – функция влияния, найденная от дельта-функции, приложенной по нормали к оболочке; $G_w^r(r, a_n, \omega)$ – по касательной; a_n – угловая координата точки приложения соответствующей силы P_n .

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОБОЛОЧКИ КИРХГОФА-ЛЯВА

Движение цилиндра описывается системой уравнений Кирхгофа-Лява, которые в пространственном случае имеют вид [15]

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{z\alpha}}{\partial z} + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha z}}{\partial z} \right) + q_\alpha, \\ \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\alpha z}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + q_z, \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{T_{\alpha\alpha}}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{\alpha z}}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 M_{zz}}{\partial z^2} + p, \end{aligned} \quad (5)$$

где ρ – плотность материала оболочки, R – радиус оболочки, h – толщина оболочки, w – нормальное перемещение, u_α, u_z – компоненты вектора тангенциальных перемещений, M_{ij} – компоненты тензора погонных моментов, T_{ij} – компоненты тензора тангенциальных усилий, p – нормальное давление, q_i – тангенциальное давление.

С учетом плоской постановки задачи и однородности препятствия, система уравнений (5) переписывается как

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= h(\lambda + 2\mu) \frac{1}{R^2} u_{\alpha,\alpha\alpha} + \frac{h(\lambda + 2\mu)}{R^2} w_{,\alpha} + q_\alpha, \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{1}{R^2} \left(h(\lambda + 2\mu) - I(\lambda + 2\mu) \frac{1}{R^4} \right) w + \\ &+ \frac{2I(\lambda + 2\mu)}{R^4} w_{,\alpha\alpha} - h(\lambda + 2\mu) \frac{1}{R^2} u_{\alpha,\alpha} + \frac{I(\lambda + 2\mu)}{R^4} w_{,\alpha\alpha\alpha\alpha} + p. \end{aligned} \quad (6)$$

Все функции, входящие в систему (6), являются гармоническими и имеют следующий вид

$$u_\alpha = u_{\alpha\alpha} e^{i\omega t}, \quad w = w_\alpha e^{i\omega t}. \quad (7)$$

С учетом (7) уравнение движения оболочки (6) под воздействие цилиндрической гармонической волны примет вид

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho h u_\alpha &= h(\lambda + 2\mu) \frac{1}{R^2} u_{\alpha,\alpha\alpha} + \frac{h(\lambda + 2\mu)}{R^2} w_{,\alpha} + q_\alpha; \\ -\omega^2 \rho h w &= w \left[I(\lambda + 2\mu) \frac{w}{R^4} - \frac{w}{R^2} h(\lambda + 2\mu) \right] - h(\lambda + 2\mu) \frac{1}{R^2} u_{\alpha,\alpha} + \\ &+ \frac{2I(\lambda + 2\mu)}{R^4} w_{,\alpha\alpha} + \frac{I(\lambda + 2\mu)}{R^4} w_{,\alpha\alpha\alpha\alpha} + p. \end{aligned} \quad (8)$$

Разложим все функции, входящие в уравнения движения пластины в тригонометрические ряды

$$u(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin n\alpha; \quad w(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos n\alpha; \quad p(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos n\alpha. \quad (9)$$

С учетом разложения в ряды (9), система (8) примет вид

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho h u_n &= -\frac{hc_3^2 n^2}{R^2} u_n + \frac{nhc_3^2}{R^2} w_n; \\ -\omega^2 \rho h w_n &= w_n \left[Ic_3^2 \frac{1}{R^4} - \frac{1}{R^2} hc_3^2 - \frac{2n^2 Ic_3^2}{R^4} \frac{n^4 Ic_3^2}{R^4} \right] + \frac{hc_3^2 n^2}{R^2} u_n + p_n; \\ c_3^2 &= \sqrt{|\lambda + 2\mu|}, \end{aligned} \quad (10)$$

где p_{1w} – отраженная волна в среде «1»; p_* – давление набегающей волны в среде «1», p_2 – давление в прошедшей преграду волне в среде «2». При этом в коэффициентах рядов давление определяется как

$$p_n = p_{*n} - p_{1wn} + p_{2n}. \quad (11)$$

Давления в волнах соответствуют напряжениям в упругой среде

$$p_* = \sigma_{33}^{(*)}, \quad p_{1w} = -\sigma_{33}^{(1)}, \quad p_2 = -\sigma_{33}^{(2)}. \quad (12)$$

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ГРУНТ

В качестве модели грунта будем использовать однородную упругую изотропную среду [17]. В данной работе реализован подход, аналогичный [16]. Замкнутая система уравнений, описывающая ее плоское движение, имеет вид:

– Соотношения Коши

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w}{\partial r}; \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{r} \right); \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{r}; \quad \theta = \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}. \quad (13)$$

– Физический закон

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{11}; \quad \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{33} + \lambda \varepsilon_{11}; \quad \sigma_{13} = 2\mu \varepsilon_{13}. \quad (14)$$

– Уравнения движения относительно скалярного потенциала φ и компонент ψ векторного потенциала перемещений

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = c_1^2 \Delta \varphi, \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = c_2^2 \Delta \psi; \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_{ep}}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho_{ep}}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}. \quad (15)$$

– Связь потенциалов и перемещений

$$u_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \quad (16)$$

где u и w – перемещения вдоль осей Ox и Oz соответственно; c_1 и c_2 – скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига; σ_{ij} и ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; θ – коэффициент объемного расширения; ρ_{gr} и λ, μ – плотность и упругие постоянные Ламе грунта.

Все функции, входящие в уравнения движения грунта, раскладываются в тригонометрические ряды:

– Перемещения

$$w^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n^{(i)}(r) \cos \alpha n; \quad u_1^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}^{(i)}(r) \sin \alpha n, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

– Потенциалы

$$\varphi^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(i)}(r) \cos \alpha n; \quad \psi^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^{(i)}(r) \sin \alpha n, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

– Деформации

$$\varepsilon_{11}^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{11n}^{(i)}(r) \cos \alpha n; \quad \varepsilon_{13}^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{13n}^{(i)}(r) \sin \alpha n; \quad (19)$$

$$\varepsilon_{33}^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{33n}^{(i)}(r) \cos \alpha n; \quad \theta^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{(i)}(r) \cos \alpha n, \quad i = 1, 2.$$

– Напряжения

$$\sigma_{11}^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11n}^{(i)}(r) \cos \alpha n, \quad \sigma_{13}^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{13n}^{(i)}(r) \sin \alpha n, \quad (20)$$

$$\sigma_{33}^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{33n}^{(i)}(r) \cos \alpha n, \quad i = 1, 2.$$

4. ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С ОБОЛОЧКОЙ КИРХГОФА-ЛЯВА

Для задания набегающей волны рассмотрим плоскую одномерную волну растяжения-сжатия ($\psi \equiv 0$), распространяющуюся по радиусу из центра цилиндра.

Так как изучается воздействие гармонической волны, то все функции будут представляться как произведение их амплитудных значений на гармонический закон

$$\varphi = \varphi_a e^{i\omega t}. \quad (21)$$

Рассмотри цилиндрические волны, распространяющиеся от источника, расположенного в начале координат $O(0,0)$. Вводим цилиндрическую систему

координат с центром в Ora . Считая, что $\varphi_a = \varphi_a(r_1)$ получаем следующее уравнение Гельмгольца в полярных координатах

$$r^{-1} (r\varphi_a)' + k_1^2 \varphi_a = 0. \quad (22)$$

Общее решение уравнения (22) имеет вид

$$\varphi_a = A_\varphi H_0^{(2)}(k_1 r) + B_\varphi H_0^{(1)}(k_1 r), \quad (23)$$

где $H_\nu^{(1)}(\zeta)$ и $H_\nu^{(2)}(\zeta)$ – функции Ханкеля порядка ν ; A_φ, B_φ – произвольные постоянные.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + ik_1 \varphi = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Тогда условию Зоммерфельда на бесконечности (24) удовлетворяет решение

$$\varphi_a^{(1)} = A_\varphi H_0^{(2)}(k_1 r); \quad \varphi_a^{(2)} = B_\varphi H_0^{(1)}(k_1 r). \quad (25)$$

Подставляя этот результат в (16), получаем следующие формулы для перемещений

$$u = -A_\varphi k_1 \frac{x - x_1}{r_1} H_1^{(2)}(k_1 r) e^{i\omega t}, \quad (26)$$

$$w = -A_\varphi k_1 \frac{z + d}{r_1} H_1^{(2)}(k_1 r) e^{i\omega t}.$$

Далее задаются напряжения в набегающей волне

$$\sigma_{33}|_{z=0} = -\frac{A_\varphi}{r_{10}^2} \left[(1 + \gamma) r_{10} k_1 H_1^{(2)}(r_{10}) - r_{330}^2 k_1 H_2^{(2)}(r_{100}) \right] = p_*. \quad (27)$$

где A_φ – произвольная постоянная;

$$r_{10} = \sqrt{x^2 + d^2}, \quad r_{330} = \sqrt{kx^2 + d^2}; \quad \gamma = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}. \quad (28)$$

5. РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ВОЛНЫ ОТ ГРАНИЦЫ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА

Для решения задачи в перемещениях необходимо установить взаимосвязь между кинематическими параметрами пластины и амплитудой давления волны в акустической среде.

Предполагается, что на границе $r = \rho$ акустического полупространства задано нормальное перемещение, изменяющееся по времени по гармоническому закону. Уравнение движения упругой среды относительно потенциала поля перемещений записывается следующим образом

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi(r, \alpha, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi(r, \alpha, t)}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(r, \alpha, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi(r, \alpha, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi(r, \alpha, t)}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(r, \alpha, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Для понижения степени производной по углу α , функции потенциалов раскладываются в тригонометрические ряды аналогично (18). Тогда, из формул (29) получаем следующие выражения

$$r^{-1}(r\varphi_{an})' + \beta_{1n}^2\varphi_{an} = 0; \quad (30)$$

$$r^{-1}(r\psi_{an})' + \beta_{2n}^2\psi_{an} = 0;$$

где β_{1n}, β_{2n} – коэффициенты разделения переменных, определяющиеся как

$$\beta_{1n} = \sqrt{\left(k_1^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)}, \quad \beta_{2n} = \sqrt{\left(k_2^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)}; \quad (31)$$

$$k_1 = \omega/c_1, \quad k_2 = \omega/c_2.$$

Решение данного уравнения аналогично (26) и имеет вид

$$\varphi_{an} = C_1 H_0^{(2)}(r\beta_{1n}) + C_2 H_0^{(1)}(r\beta_{1n}), \quad (32)$$

$$\psi_{an} = D_1 H_0^{(2)}(r\beta_{2n}) + D_2 H_0^{(1)}(r\beta_{2n}),$$

где $H_\nu^{(1)}(\zeta)$ и $H_\nu^{(2)}(\zeta)$ – функции Ханкеля порядка ν ; C_1, C_2, D_1, D_2 – произвольные постоянные.

Получаем, что условию излучения Зоммерфельда в случае $r \rightarrow \infty$, удовлетворяет решение

$$\varphi_{an}^{(2)} = C_1 H_0^{(2)}(\beta_{1n}r), \quad \psi_{an}^{(2)} = D_1 H_0^{(2)}(\beta_{2n}r). \quad (33)$$

В случае, если $r \rightarrow 0$

$$\varphi_{an}^{(1)} = C_2 H_0^{(1)}(\beta_{1n}r), \quad \psi_{an}^{(1)} = D_2 H_0^{(1)}(\beta_{2n}r). \quad (34)$$

Далее необходимо найти константы C_1, C_2, D_1, D_2 . На границе среды задается единичное поле перемещений, тогда граничное условие запишется как

$$w_a|_{r=\rho} = W_s \sum_{n=0}^{\infty} \cos \alpha n = 1, \quad u|_{r=\rho} = 0, \quad (35)$$

$$\text{где } W_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\alpha n) d\alpha.$$

Константы интегрирования C_1, C_2, D_1, D_2 определяются из граничного условия (35), после чего полученные значения подставляются в (33) и (34). Тогда из (16) будут получены нормальные перемещения в средах «1» и «2»

$$w_n^{(1)} = -\frac{\beta_{1n} W_n \cdot \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{2n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{1n}) H_1^{(1)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(1)}(\beta_{2n}) H_0^{(1)}(\beta_{1n})} H_1^{(1)}(r\beta_{1n}), \quad (36)$$

$$w_n^{(2)} = -\frac{\beta_{1n} W_n \cdot \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{2n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{1n}) H_1^{(2)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(2)}(\beta_{2n}) H_0^{(2)}(\beta_{1n})} H_1^{(2)}(r\beta_{1n}).$$

Из (13) значения деформаций в соответствующих средах

$$\varepsilon_{rm}^{(1)} = \frac{\beta_{1n} \beta_{1n} W_n \cdot \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{2n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{1n}) H_1^{(1)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(1)}(\beta_{2n}) H_0^{(1)}(\beta_{1n})} H_2^{(1)}(r\beta_{1n}); \quad (37)$$

$$\varepsilon_{rm}^{(2)} = \frac{\beta_{1n} \beta_{1n} W_n \cdot \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{2n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{1n}) H_1^{(2)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(2)}(\beta_{2n}) H_0^{(2)}(\beta_{1n})} H_2^{(2)}(r\beta_{1n}).$$

Значения напряжений в соответствующих средах будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_{33n}^{(1)} &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{33n}^{(1)}, \\ \sigma_{33n}^{(2)} &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{33n}^{(2)}. \end{aligned} \tag{38}$$

Тогда решая совместно выражения (38), (27) и (10), получаем значения перемещений

$$\begin{aligned} w_n^p(r) &= \frac{P^*}{R_1(r, \omega)}, \\ R_1(r, \omega) &= -\omega^2 \rho h + \frac{1}{R^2} hc_3^2 - Ic_3^2 \frac{1}{R^4} - \frac{hc_3^2 n^2}{R^2} \frac{hc_3^2 n}{R^2 \left(-\omega^2 \rho h + \frac{hc_3^2 n^2}{R^2} \right)} + \\ &+ \frac{2n^2 Ic_3^2}{R^4} - \frac{n^4 Ic_3^2}{R^4} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{rr}^{(1)} - (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{rr}^{(2)}. \end{aligned} \tag{39}$$

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОЙ ПО ОТНОШЕНИЮ К ОБОЛОЧКЕ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ

Для решения поставленной задачи необходимо определить функции влияния от двух дельта-функций, приложенных по нормали к оболочке в точках с координатами α_i , соответствующими краям изучаемого сегмента оболочки (рис.3).

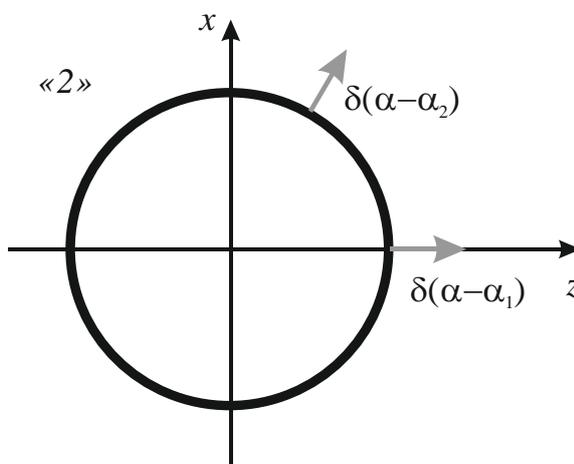


Рис.3. Воздействующие на оболочку нормальные к ней дельта-функции.

Разложим дельта-функцию, приложенную в произвольной точке с координатой α_i , в тригонометрический ряд

$$\delta(\alpha - \alpha_i) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \cos n\alpha. \tag{40}$$

Для построения функции влияния рассмотрим систему уравнений (10) сразу в коэффициентах рядов с приложенной в качестве внешней нагрузки функцией $\delta(\alpha - \alpha_i)$. Решая данную систему уравнений, получим искомые функции влияния

$$G_{in}^v = \frac{\frac{nhc_3^2}{R^2} G_{wn}^v}{-\omega^2 \rho h + hc_3^2 \frac{n^2}{R^2}}, \quad (41)$$

$$G_{wn}^v = \frac{\frac{2}{\pi} \cos n\alpha_i}{K_2(\omega, n) - hc_3^2 \frac{n^2}{R^2} K_1(\omega, n)}, \quad (42)$$

где

$$K_1(\omega, n) = \frac{\frac{nhc_3^2}{R^2}}{-\omega^2 \rho h + hc_3^2 \frac{n^2}{R^2}}, \quad (43)$$

$$K_2(\omega, n) = -\omega^2 \rho h + \frac{hc_3^2}{R^2} + \frac{Ic_3^2}{R^4} (2n^2 - n^4 - 1).$$

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЙ, КАСАТЕЛЬНЫХ ПО ОТНОШЕНИЮ К ОБОЛОЧКЕ

Определим функции влияния для перемещений под воздействием дельта-функции, действующей по касательной к оболочке (рис.4).

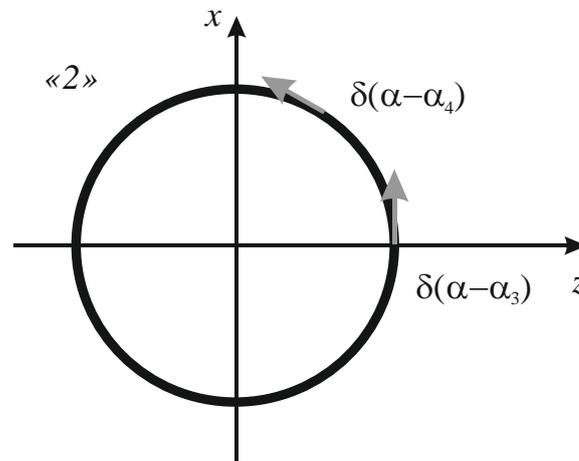


Рис.4. Воздействующие на оболочку касательных по отношению к ней дельта-функций.

Для этого рассмотрим воздействие дельта-функции на оболочку в точке с координатой α_i . Разложим ее в тригонометрический ряд по синусам

$$\delta(\alpha - \alpha_i) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \sin n\alpha. \quad (44)$$

Аналогично получаем функции влияния для нормальных и касательных перемещений, возникающих под воздействием приложенной по касательной дельта-функции к оболочке в точках закрепления сегмента оболочки

$$G_{un}^{\tau} = \frac{\frac{nhc_3^2}{R^2} G_{wn}^{\tau}}{-\omega^2 \rho h + hc_3^2 \frac{n^2}{R^2}}, \quad (45)$$

$$G_{wn}^{\tau} = \frac{\frac{2}{\pi} \sin n\alpha_i}{K_2(\omega, n) - hc_3^2 \frac{n^2}{R^2} K_1(\omega, n)}. \quad (46)$$

8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЗДЕЙСТВИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА СЕГМЕНТ ОБОЛОЧКИ

Из выражений (4), (41), (42), (45) и (46) получаем выражение нормального перемещения средней линии сегмента оболочки в грунте под воздействием цилиндрической гармонической волны

$$w(r, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^p \cos \alpha n + \left[P_1 \sum_{n=0}^{\infty} G_{wn}^v(a_1) \cos \alpha n + P_2 \sum_{n=0}^{\infty} G_{wn}^v(a_2) \cos \alpha n \right] + \left[P_3 \sum_{n=1}^{\infty} G_{wn}^{\tau}(a_3) \sin \alpha n + P_4 \sum_{n=1}^{\infty} G_{wn}^{\tau}(a_4) \sin \alpha n \right]. \quad (47)$$

Для определения неизвестных величин P_1, P_2, P_3, P_4 необходимо использовать граничные условия (2) и (3).

Подставляя граничные условия в данное уравнение (47), мы получаем систему линейно независимых уравнений, решая которую определяем значения искомых P_1, P_2, P_3, P_4 .

Найденные значения сил подставляются в уравнение (47) и в результате на искомом участке оболочки достигаются граничные условия.

9. ПРИМЕРЫ

В качестве примера были взяты следующие параметры грунта и преграды в грунте при частоте воздействия $\omega = 1$

Параметры грунта	Плотность $\rho_{gp} = 1600$ кг/м ³ , модуль упругости $E_{gp} = 10^9$ кг/м ²
Параметры оболочки	Толщина $h = 30$ мм = 0,03 м, материал – сталь 12Х18Н10Т: $E = 180000$ МПа = $18 \cdot 10^9$ кг/м ² , $\rho = 7900$ кг/м ³ , $\nu = 0,29$.

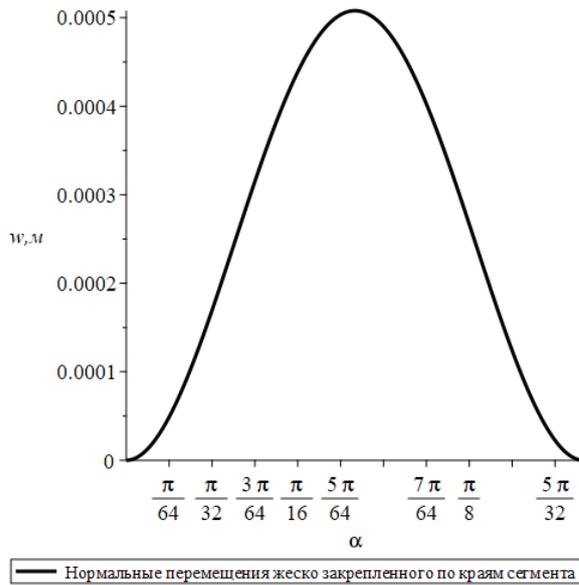


Рис.5. Нормальные перемещения сегмента оболочки, жестко закреплённого по краям в точках $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

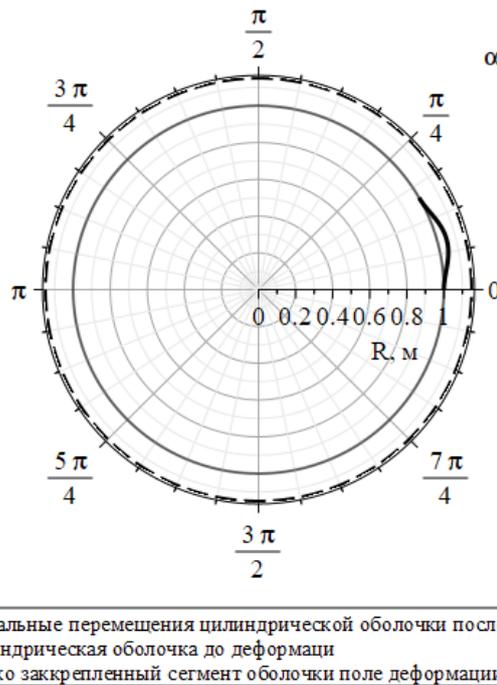


Рис.6. Нормальные перемещения сегмента жестко закрепленного сегмента оболочки по отношению к недеформированному состоянию и к деформации цилиндра. Масштаб для нормальных перемещений сегмента 10^2 .

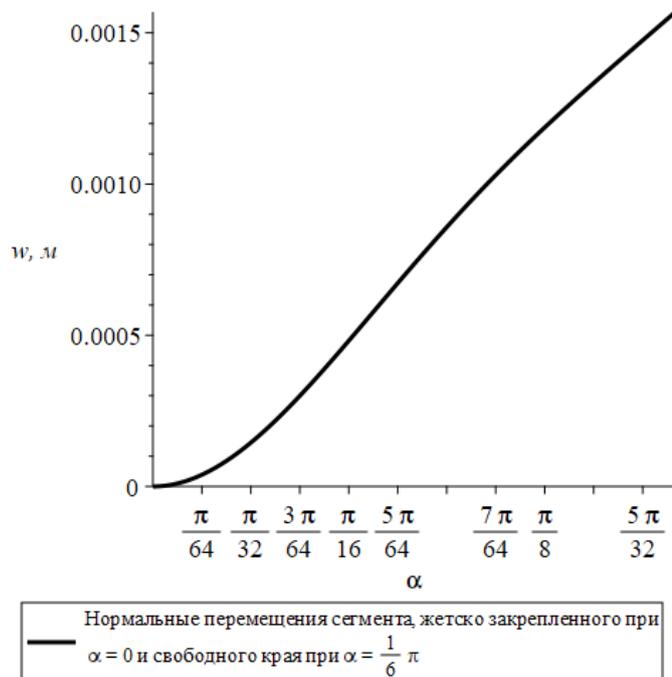


Рис.7. Нормальные перемещения сегмента оболочки, жестко закреплённого при $\alpha = 0$ и свободного при $\alpha = \pi/6$.

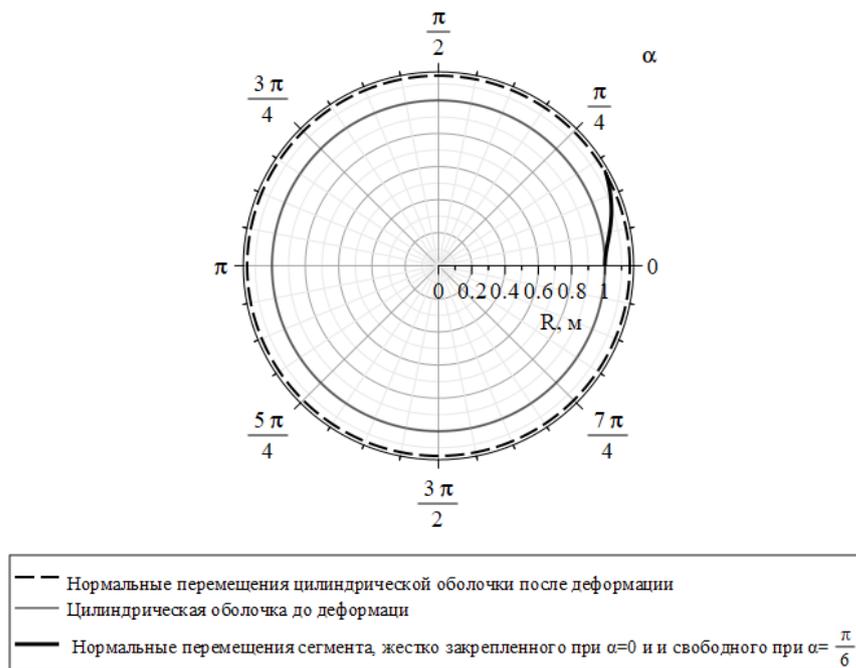


Рис.8. Нормальные перемещения сегмента, жестко закрепленного при $\alpha = 0$ и свободного при $\alpha = \pi/6$ по отношению к недеформированному состоянию и к деформации цилиндра. Масштаб для нормальных перемещений сегмента 10^2 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе продемонстрирован общий подход, позволяющий решать связанные задачи о взаимодействии упругой среды, в которой возбуждаются

гармонические цилиндрические волны и вибропоглощающей преграды в виде сегмента цилиндра.

Для этого рассмотрены отдельные задачи о движении упругой среды и цилиндрической оболочки целиком. Решена задача об определении кинематических и динамических параметров среды, в которой была индуцирована волна. Получено решение вспомогательной задачи об определении поверхностных функций влияния упругого полупространства при возникновении единичного поля перемещения на границе этого полупространства.

Для решения задачи о движении сегмента оболочки в упругой среде при заданных граничных условиях были определены функции влияния для нормальных и касательных перемещений оболочки. Из граничных условий были найдены величины компенсирующих нагрузок.

Рассмотрены конкретные примеры взаимодействия преград и волны в упругой среде. Получены перемещения на границе среды и преграды для различных видов ее закрепления: консольного закрепления и жёсткого закрепления обоих краев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Umek A. *Dynamic responses of building foundations to incident elastic waves*. – PhD Thesis. Illinois Institute of Technology, 1973.
2. Knall V. *Railway noise and vibration: effects and criteria* // Journal of Sound and Vibration. – 1996. – Vol.193. – No.1. – Pp.9-20.
3. Xia H., Zhang N., Cao Y. M. *Experimental study of train-induced vibrations of environments and buildings* // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – Vol.280. – No.3-5. – Pp.1017-1029.
4. Yang Y.B., Hsu L.C. *A review of researches on ground-borne vibrations due to moving trains via underground tunnels* // Advances in Structural Engineering. – 2006. – Vol.9. – No.3. – Pp.377-392.
5. Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V. *A new principle for protection from seismic waves* / Proceedings of the International Conference on Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering. – Tokyo, Japan, 2009. – Pp.463-468.
6. Kuznetsov S.V. *Seismic waves and seismic barriers* // Acoustical Physics. – 2011. – Vol.57. – No.3. – Pp.420-426.
7. *Technical basis for guidelines to minimise annoyance due to blasting overpressure and ground vibration*. – Australian and New Zealand Environment Council, Canberra. – 1990. – Pp.6.
8. Костров Б.В. *Движение жесткой массивной полосы, впаивной в упругую среду, под действием плоской волны* // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т.28. – Вып.1. – С.99-110.
9. Рылько М.Я. *О движении в упругой среде жесткого прямоугольного включения под действием плоской волны* // Механика твердого тела. – 1977. – №1. – С.158-164.
10. Венцель Э.С., Джан-Темиров К.Е., Трофимов А.М., Негольша Е.В. *Метод компенсирующих нагрузок в задачах теории тонких пластинок и оболочек*. – Харьков: Б. и., 1992. – 92 с.
11. Fedotenkov G.V., Makarevskii D.I., Vahterova Y.A., Thang T.Q. *The inverse non-stationary problem of identification of defects in an elastic rod* // INCAS Bulletin. – 2021. – Vol.13. – Pp.57-66.

12. Fedotenkov G., Starovoitov E., Vahterova Y. *The inverse transient problem of identifying the law of change in the cross-sectional area of an elastic bar* // IX International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering (COUPLED PROBLEMS 2021). – 2021. – Vol.IS32. – Pp.1-9.
13. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. *The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length* // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol.18. – No.4. – Pp.687-692.
14. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol.40. – No.4. – Pp.439-447.
15. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах: Учеб. пособие: для вузов.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
16. Lokteva N.A. *The vibration insulation properties of a plate in an elastic medium under the influence of different types of waves* / In: Modeling of the Soil-Structure Interaction: Selected Topics. Mechanical Engineering Theory and Applications. – 2020. – Chapter 2. – Pp.29-47.
17. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. *Теория упругости и пластичности: Учеб. для вузов.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.

REFERENCES

1. Umek A. *Dynamic Responses of Building Foundations to Incident Elastic Waves.* PhD Thesis. Illinois Institute of Technology, 1973.
2. Knall V. *Railway Noise and Vibration: Effects and Criteria.* Journal of Sound and Vibration, 1996, Vol.193, No.1, Pp.9-20.
3. Xia H., Zhang N., Cao Y.M. *Experimental Study of Train -induced Vibrations of Environments and Buildings.* Journal of Sound and Vibration, 2005, Vol.280, No.3-5, Pp.1017-1029.
4. Yang Y.B., Hsu L.C. *A review of researches on ground-borne vibrations due to moving trains via underground tunnels.* Advances in Structural Engineering, 2006, Vol.9, No.3, Pp.377-392.
5. Djeran-Magre I., Kuznetsov S.V. *A new principle for protection from seismic waves.* Proceedings of the International Conference on Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering. Tokyo, Japan, 2009, Pp.463-468.
6. Kuznetsov S.V. *Seismic Waves and Seismic Barriers.* Acoustical Physics, 2011, Vol.57, No.3, Pp.420-426.
7. *Technical basis for guidelines to minimise annoyance due to blasting overpressure and ground vibration.* Australian and New Zealand Environment Council, Canberra, 1990, Pp.6.
8. Kostrov B.V. *Dvizhenie zhestkoj massivnoj polosy, vpayannoj v upruguyu sredu, pod dejstviem ploskoj volny [The movement of a rigid massive strip, soldered into an elastic environment, under the influence of a flat wave].* Prikladnaya matematika i mekhanika, 1964, Vol.28, Iss.1, Pp.99-110.
9. Rylko M.Ya. *O dvizhenii v uprugoj srede zhestkogo pryamougol'nogo vklyucheniya pod dejstviem ploskoj volny [On the movement in the elastic medium of a hard rectangular inclusion under the action of a flat wave].* Mekhanika tverdogo tela, 1977, No.I, Pp.158-164.

10. Venzel E.S., Dzhan-Temirov K.E., Trofimov A.M., Negol'sha E.V. *Metod kompensiruyushhikh nagruzok v zadachakh teorii tonkikh plastinok i obolochek [The method of compensating loads in the tasks of the theory of thin records and shells]*. Khar'kov, B. i., 1992, 92 p.
11. Fedotenkov G.V., Makarevskii D.I., Vahterova Y.A., Thung T.Q. *The inverse non-Stationary Problem of Identification of Defects in An Elastic Rod*. Incas Bulletin, 2021, Vol.13, Pp.57-66.
12. Fedotenkov G., Starovoitov E., Vahterova Y. *The inverse transient problem of identifying the law of change in the cross-sectional area of an elastic bar*. IX International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering (COUPLED PROBLEMS 2021), 2021, Vol.IS32, Pp.1-9.
13. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. *Inverse Problem of recovery an Unsteady Linear Load for An Elastic Rodite Length*. Journal of Appline Engineering Science, 2020, Vol.18, No.4, Pp.687-692.
14. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y. *Identification of non-Station Load Upon Timoshenko Beam*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, Vol.40, No.4, Pp.439-447.
15. Gorshkov A.G., Medvedsky A.L., Rabinsky L.N., Tarlakovsky D.V. *Volny v sploshnykh sredakh: Ucheb. posobie: dlya vuzov [Waves in solid media: textbook manual: For universities]*. Moskva, FIZMATLIT, 2004, 472 p.
16. Lokteva N.A. *The Vibration Insulation Properties of a Platic Medium Under the Influence of Different Types of Waves*. In: Modeling of the Soil-Structure Interaction: Selected Topics. Mechanical Engineering Theory and Applications, 2020, Chapter 2, Pp.29-47.
17. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Tarlakovsky D.V. *Teoriya uprugosti i plastichnosti: Uchebnik dlya vuzov [The theory of elasticity and plasticity: Textbook for universities]*. Moskva, FIZMATLIT, 2002, 416 p.

Поступила в редакцию 05 июня 2024 года.

Сведения об авторах:

Локтева Наталья Александровна – к.т.н., доц., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: nlok@rambler.ru

Во Ван Дай – инженер, Технический университет Ле Куи Дона, г. Ханой, Социалистическая республика Вьетнам; e-mail: vodaimta.15@gmail.com