



УТОЧНЕННАЯ ТРАНСФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ, ЗАКРЕПЛЕННОГО НА УПРУГОМ ОПОРНОМ ЭЛЕМЕНТЕ*

Паймушин В.Н.^{1,2}, Шишкин В.М.³

¹ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», г. Казань, Россия

²ФГБОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», г. Казань, Россия

³ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров, Россия

АННОТАЦИЯ

С использованием инструментально-аппаратных средств фиксации амплитуд виброускорений разработана методика экспериментального исследования вынужденных изгибных колебаний консольно закрепленного стержня-полосы, соединенного на одной из лицевых поверхностей с опорным элементом на участке закрепления конечных размеров, при действии осевой гармонической силы, приложенной на торце закрепленного участка. Построена уточненная модель деформирования закрепленного участка на основе уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко с учетом деформаций поперечного обжатия и заданных перемещений опорного элемента. Процесс деформирования незакрепленной (консольной) части стержня описывается классической моделью Кирхгофа-Лява. Сформулированы кинематические условия сопряжения закрепленной и незакрепленной частей стержня. С учетом данных условий на основе вариационного уравнения Гамильтона-Остроградского получены уравнения движения незакрепленной и закрепленной частей стержня-полосы, соответствующие им граничные условия, а также силовые условия сопряжения закрепленного и незакрепленного участков стержня. Найдено точное аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях стержня при нагружении его гармонической осевой силой, приложенной к торцевому сечению закрепленного участка, а также гармонической поперечной силой на конце незакрепленного участка. Проведены вычислительные эксперименты для стержня-полосы, выполненного из алюминиевого сплава Д16АТ с учетом заданных перемещений опорного элемента в виде стального швеллера. Установлено, что при действии осевой силы, приложенной на торце закрепленного участка, колебания незакрепленной части стержня практически полностью определяются заданными перемещениями опорного элемента, а при действии внешней поперечной силы на конце незакрепленной части – практически не зависят от них.

Ключевые слова: стержень-полоса; участок закрепления конечной длины; поперечное обжатие; опорный элемент; трансформационная модель; вычислительные эксперименты; напряженно-деформированное состояние

* Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (проект №23-19-00021).

REFINED TRANSFORMATION MODEL DYNAMIC DEFORMATION OF ROD-STRIPS CONSIDERING THE COMPLIANCE OF THE SUPPORTING ELEMENT

Paimushin V.N.^{1,2}, Shishkin V.M.³

¹*Kazan National Research Technical University, Kazan, Russia*

²*Kazan Federal (Privolzhsky) University, Kazan, Russia*

³*Vyatka State University, Kirov, Russia*

ABSTRACT

Using instrumental and hardware means for recording the amplitudes of vibration accelerations, a method has been developed for experimental study of forced bending vibrations of a cantilevered rod-strip connected on one of the front surfaces to a supporting element in the fastening area of finite dimensions, under the action of an axial harmonic force applied at the end of the fixed section. A refined model of deformation of the fixed section was constructed based on the refined shear model of S.P. Timoshenko, taking into account the transverse compression deformations and specified movements of the support element. The process of deformation of the loose (cantilever) part of the rod is described by the classical Kirchhoff-Love model. Kinematic conditions for the coupling of the fixed and loose parts of the rod are formulated. Taking into account these conditions, on the basis of the Hamilton-Ostrogradsky variational equation, the equations of motion of the loose and fixed parts of the rod-strip, the corresponding boundary conditions, as well as the force conditions for the coupling of the fixed and loose sections of the rod are obtained. An exact analytical solution has been found to the problem of forced vibrations of a rod when loaded with a harmonic axial force applied to the end section of the fixed section, as well as a harmonic transverse force at the end of the loose section. Computational experiments were carried out for a rod-strip made of aluminum alloy D16AT, taking into account the specified movements of the support element in the form of a steel channel. It has been established that under the action of an axial force applied at the end of the fixed section, the vibrations of the loose part of the rod are almost completely determined by the specified movements of the support element, and under the action of an external transverse force at the end of the loose part, they are practically independent of them.

Keywords: rod-strip; final length fastening area; transverse compression; support element; transformation model; computational experiments; stress-strain state

ВВЕДЕНИЕ

Для исследования процессов деформирования тонкостенных элементов конструкций (в том числе и плоских стержней) при различных вариантах закрепления и нагружения возможна пространственная постановка соответствующих задач и построение их численных решений на основе современных коммерческих пакетов прикладных программ [1,2 и др.], что является желательным, но малоэффективным при их малой относительной толщине. В связи с этим значительное внимание в научной литературе уделялось проблемам редукции трехмерных уравнений механики деформирования к одномерным и двумерным уравнениям теории стержней, пластин и оболочек. Для тонкостенных элементов конструкций из композитных материалов такие уравнения построены в развитие классической теории [3,4 и др.] и с учетом поперечных сдвигов и поперечного обжатия. Научная литература, посвященная

указанным проблемам, весьма обширна и многогранна. Из нее, в частности, можно выделить работы, посвященные построению высокоточных геометрически линейных и нелинейных моделей деформирования тонкостенных элементов конструкций с учетом поперечных сдвигов и поперечного обжатия, а также разработке на их основе тех или иных аналитических и численных методов решения соответствующих статических и динамических задач [5-13 и др.].

Однако необходимо отметить, что во всех работах, посвященных разработке для тонкостенных элементов конструкций уточненных вариантов теории высокого порядка, практически не уделяется должного внимания проблемам формулировки граничных условий при тех или иных вариантах соединения с другими элементами конструкций или их закрепления на жестких опорных элементах. Так, например, при постановке и решении задач механики деформирования тонкостенных элементов конструкций реальные условия их закрепления на жестких опорных элементах конечных размеров обычно заменяют условиями шарнирного опирания или жесткого защемления [см., например, 14,15], что, безусловно, вносит погрешность в решениях данных задач за счет неучета податливости (деформативности) закрепленных частей отмеченных элементов. В работах [16-19], исходя из результатов проведенных экспериментальных исследований [20,21], было показано, что теоретическое исследование наблюдаемого в экспериментах явления прохождения вибраций через участки закрепления конечных размеров в многоопорных неразрезных стержнях требует обязательного учета деформативности данных участков. В них при проведении теоретических исследований предполагалось, что прохождение изгибных колебаний через участок закрепления конечной длины осуществляется за счет трансформации изгибного напряженно-деформированного состояния (НДС) динамически нагруженного участка стержня в продольные поперечно-сдвиговые формы колебаний участка закрепления с последующей их ретрансформацией в изгибные колебания соседнего участка.

Следует отметить, что соединение неразрезных стержней с опорными элементами конечной длины или с другими элементами конструкции, обычно, осуществляется внахлест, т.е. по одной из лицевых поверхностей. Особенно это характерно для тонкостенных элементов, выполненных из композитных материалов. В отмеченных работах [16-19] для учета податливости участков закрепления конечной длины на одной из лицевых поверхностей была использована сдвиговая модель С.П. Тимошенко, основанная на линейной аппроксимации тангенциальных перемещений по поперечной координате, когда прогиб считается независимым от этой координаты. При этом, как было установлено проведенными численными экспериментами, явление прохождения вибраций через участок закрепления конечной длины при использовании данной модели теоретическим путем удастся выявить лишь в стержнях, выполненных из однонаправленно армированных волокнистых композитных материалов, характеризующихся низкой жесткостью на сдвиг, а в стержнях из металлических конструкционных материалов отмеченное явление удастся выявить лишь при весьма малой конструктивно неприемлемой длине закрепленного участка (не более трех толщин стержня).

Однако, результаты экспериментальных исследований [20,21], проведенных с тонкими стержнями, изготовленными из алюминиевых сплавов Д16АТ и АМг-6, показывают, что прохождение вибраций через участки закрепления конечной длины наблюдается и при значительно большей их длине, составляющей

примерно семнадцать толщин данных стержней. Данный факт, по всей видимости, объясняется тем, что нахождение вибраций оказывает влияние не только деформативность закрепленных участков, но и податливость опорных элементов. Причем второй фактор в зависимости от вида нагружения и закрепления стержня может быть доминирующим.

В настоящей статье исследуются вынужденные колебания стержня-полосы с участком закрепления конечной длины на одной из лицевых поверхностей при действии внешней осевой силы на торце закрепленного участка. Для сравнения рассматривается вариант динамического нагружения сосредоточенной поперечной силой на конце незакрепленного участка стержня. В отличие от работ [22,23], при построении трансформационной модели деформирования закрепленного участка в обоих случаях нагружения учитываются заданные перемещения на поверхности контакта его с опорным элементом, обусловленные деформативностью данного элемента.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

В качестве объекта исследования рассматривается стержень-полоса 1, неподвижно закрепленный по части лицевой поверхности на опорном элементе 2 (рис.1) и нагруженный на торце осевой гармонической силой $P = \tilde{P}e^{i\omega\tau}$ с амплитудой \tilde{P} и круговой частотой ω (i – мнимая единица, τ – время), возбуждающей преимущественно изгибные колебания незакрепленной части стержня. Следует отметить, что данный способ возбуждения вынужденных колебаний отмеченной части стержня при проведении физического эксперимента является наиболее жестким и трудно реализуемым, поскольку позволяет возбудить заметные колебания только в режиме резонанса и не более чем по двум собственным формам [22].

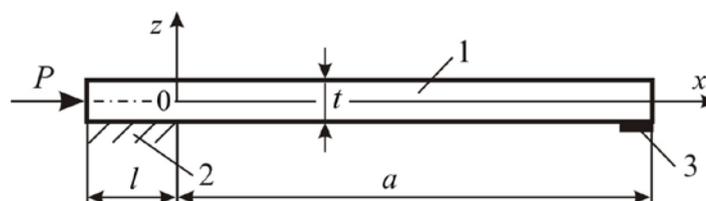


Рис.1. Схема нагружения и закрепления стержня-полосы.

Стержень выполнен из алюминиевого сплава Д16АТ и имеет следующие размеры: $t = 2.9$ мм, $l = 46$ мм, $a = 200$ мм, $b = 20$ мм (ширина стержня). Испытываемый образец соединён с опорным элементом в виде швеллера №10 с помощью сплошного клеевого слоя согласно схеме, представленной на рис.2 ($c_1 = 880$ мм, $c_2 = 220$ мм).

Интенсивность возможных изгибных колебаний консольной части стержня фиксируется цифровым акселерометром 3 на основе сенсора MPU-9250. Осевая нагрузка создается электромагнитным воздействием соленоида, возбуждение которого совершается генератором звуковых частот. Экспериментальное выявление резонансных частот изгибных колебаний консольной части стержня требует обеспечения тщательного частотного анализа. В этой связи стационарные значения ускорений \ddot{w} точки на конце консоли фиксировались через временной интервал $\Delta\tau = 60$ с для каждой генерируемой частоты, а частота осевого силового

воздействия изменялась в диапазоне $20 \div 400$ Гц с шагом $\Delta f = 0.5$ Гц.

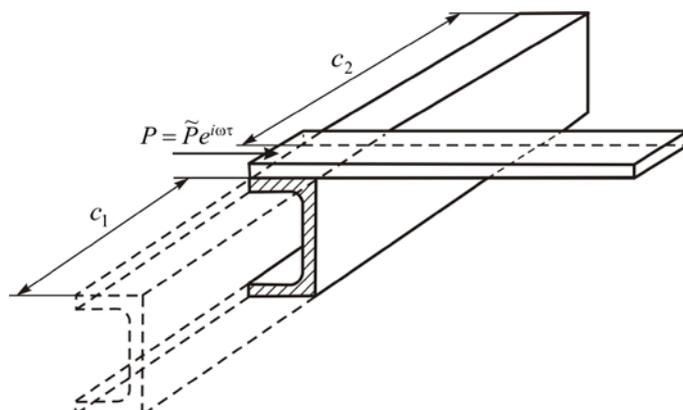


Рис.2. Схема опорного элемента и закрепления на нем стержня-полосы.

На рис.3 представлена зависимость амплитудных значений ускорений \tilde{w} точки на конце консоли от частоты f возбуждаемых изгибных колебаний, на которой имеются ярко выраженные пики значений \tilde{w} при экспериментальных частотах $f_1^{(exp)} = 51.5$ Гц, $f_2^{(exp)} = 110.5$ Гц и $f_3^{(exp)} = 331$ Гц. В силу весьма малой изгибной жесткости консольной части стержня в сравнении с изгибными и крутильной жесткостями используемого в экспериментах опорного элемента в виде стального швеллера №10 (его характеристики приведены в разделе 5) в проведенных ранее [22,23] исследованиях предполагалось, что возбуждаемые в экспериментах изгибные колебания консольной части стержня обусловлены исключительно трансформацией продольно-поперечно-сдвиговых колебаний, возбуждаемых на закрепленном участке стержня, в изгибные колебания его консольной незакрепленной части.

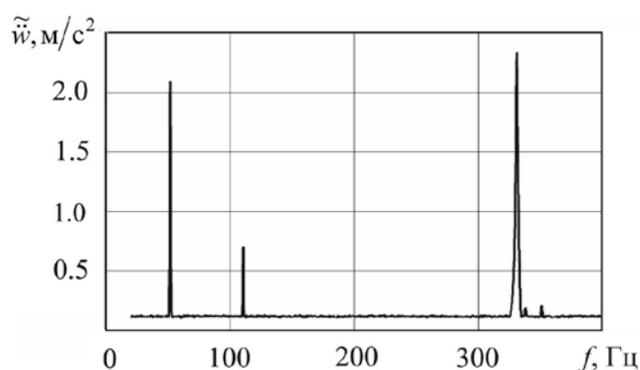


Рис.3. Зависимость амплитуды ускорения \tilde{w} конца консоли от частоты f внешней осевой силы.

С целью теоретического обоснования полученных экспериментальных частот $f_1^{(exp)} = 51.5$ Гц, $f_2^{(exp)} = 110.5$ Гц и $f_3^{(exp)} = 331$ Гц определены три низшие частоты свободных колебаний стержня-полосы с жесткой заделкой в сечении $x = 0$, найденные по формуле для консольной балки прямоугольного поперечного сечения [24]

$$\omega_j = k_j^2 \frac{t}{a^2} \sqrt{\frac{E_1}{12\rho}}, \quad k_1 = 1.87510, \quad k_2 = 4.69409, \quad k_3 = 7.85476, \quad (1)$$

дающей при динамическом модуле упругости сплава Д16АТ $E = 55.4$ ГПа [24] и плотности $\rho = 2800$ кг/м³ расчетные циклические частоты $f_1^{(r)} = \omega_1/(2\pi) = 52.095$ Гц, $f_2^{(r)} = \omega_2/(2\pi) = 326.472$ Гц и $f_3^{(r)} = \omega_3/(2\pi) = 914.133$ Гц, из которых частота $f_3^{(r)}$ значительно выходит за указанный выше диапазон изменения экспериментальных частот $20 \div 400$ Гц, а расчетные частоты $f_1^{(r)}$ и $f_2^{(r)}$ получились достаточно близкими к указанным выше экспериментальным частотам $f_1^{(\text{exp})} = 51.5$ Гц и $f_3^{(\text{exp})} = 331$ Гц. Это свидетельствует о том, что данные экспериментальные частоты соответствуют резонансным колебаниям стержня, происходящим по двум низшим собственным формам, а наличие пикового значения амплитуды ускорения \ddot{w} на экспериментальной частоте $f_2^{(\text{exp})} = 110.5$ Гц (см. рис.3), остается пока необъяснимым. В работе [22] была предпринята попытка теоретического обоснования появления данного резонансного пика для рассматриваемого стержня с использованием трансформационной геометрически нелинейной модели деформирования. Проведенные в ней численные эксперименты показали, что вынужденные колебания через закрепленную часть стержня проходят лишь на расчетных частотах близких к экспериментальным частотам $f_1^{(\text{exp})} = 51.5$ Гц и $f_3^{(\text{exp})} = 331$ Гц, однако заметные виброускорения \ddot{w} конца незакрепленной части стержня наблюдаются только при значительном искусственном снижении модуля сдвига G относительно его номинального значения (примерно до отношения $G/E = 0.02$). Отсюда можно сделать вывод о том, что наличие амплитуды ускорения \ddot{w} на экспериментальной частоте $f_2^{(\text{exp})} = 110.5$ Гц, по всей видимости, объясняется близостью данной частоты к одной из собственных частот колебаний упругого опорного элемента, в результате чего могут появиться заметные амплитуды перемещений самого опорного элемента и жестко скрепленного с ним стержня-полосы, а амплитуды ускорений \ddot{w} на экспериментальных частотах $f_1^{(\text{exp})} = 51.5$ Гц и $f_3^{(\text{exp})} = 331$ Гц практически полностью обусловлены податливостью опорного элемента при действии осевой гармонической силы $P = \tilde{P}e^{i\omega t}$ на торце закрепленного участка стержня. В связи с изложенным представляется необходимым построение соответствующей более содержательной расчетной модели, позволяющей учитывать перемещения упругого опорного элемента при анализе вынужденных колебаний рассматриваемой механической системы, состоящей из стержня-полосы и данного элемента, а также оценивать эффект их влияния на динамическую реакцию стержня в случае различных точек приложения и направления вынуждающих сил.

Однако необходимо заметить, что построение единой расчетной модели для системы, состоящей из опорного элемента и скрепленного с ним стержня-полосы, связано со значительными трудностями, обусловленными различием моделей деформирования отмеченных частей системы и необходимостью выполнения кинематических и силовых условий сопряжения данных частей на поверхности контакта $z = -t/2$. Но с учетом того, что масса и жесткость

опорного элемента многократно превышают аналогичные характеристики стержня, представляется возможным и целесообразным их раздельное рассмотрение с определением перемещений u^* , w^* опорного элемента на поверхности его соединения с закрепленной частью стержня при действии заданной силы $P = \tilde{P}e^{i\omega t}$ и построением решения задачи о вынужденных колебаниях стержня с учетом отмеченной силы и полученных перемещений u^* , w^* .

2. УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЗАКРЕПЛЕННОГО УЧАСТКА СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ ПРИ ЗАДАННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ОПОРНОГО ЭЛЕМЕНТА

Предположим, что на участке закрепления в точках граничной плоскости $z = -t/2$ перемещения $U^{(0)}$, $W^{(0)}$ в отличие от [16-19], подчинены условиям (в общем случае будем считать, что $u^* = u^*(x, \tau)$, $w^* = w^*(x, \tau)$)

$$U^{(0)}(x, z = -t/2) = u^*, \quad W^{(0)}(x, z = -t/2) = w^*, \quad (2)$$

где $u^* = u^*(x, \tau)$, $w^* = w^*(x, \tau)$ – заданные перемещения опорного элемента на поверхности контакта его с отмеченной плоскостью стержня. При использовании аппроксимаций

$$U^{(0)} = u^{(0)} + z\gamma^{(0)}, \quad W^{(0)} = w^{(0)} + z\varphi^{(0)}, \quad -t/2 \leq z \leq t/2 \quad (3)$$

условия (2) принимают вид

$$u^{(0)} - \frac{t}{2}\gamma^{(0)} = u^*, \quad w^{(0)} - \frac{t}{2}\varphi^{(0)} = w^*, \quad (4)$$

где $\gamma^{(0)}$ – угол поворота поперечного сечения закрепленного участка стержня, $\varphi^{(0)}$ – функция, учитывающая поперечное обжатие данного участка. Из (4) следуют равенства

$$\gamma^{(0)} = \frac{2}{t}(u^{(0)} - u^*), \quad \varphi^{(0)} = \frac{2}{t}(w^{(0)} - w^*),$$

которые при их подстановке в (3) приводят к зависимостям

$$U^{(0)} = \left(1 + \frac{2z}{t}\right)u^{(0)} - \frac{2z}{t}u^*, \quad W^{(0)} = \left(1 + \frac{2z}{t}\right)w^{(0)} - \frac{2z}{t}w^*. \quad (5)$$

Исходя из (5), в геометрически линейном приближении для определения компонент деформации приходим к выражениям

$$\varepsilon_x^{(0)} = \frac{\partial U^{(0)}}{\partial x} = \left(1 + \frac{2z}{t}\right)u_{,x}^{(0)} - \frac{2z}{t}u_{,x}^*, \quad \varepsilon_z^{(0)} = \frac{\partial W^{(0)}}{\partial z} = \frac{2}{t}(w^{(0)} - w^*), \quad (6)$$

$$\gamma_{xz}^{(0)} = \frac{\partial U^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} = \frac{2}{t}(u^{(0)} - u^*) + \left(1 + \frac{2z}{t}\right)w_{,x}^{(0)} - \frac{2z}{t}w_{,x}^*.$$

Нижний индекс x после запятой здесь и далее означает дифференцирование соответствующей переменной по координате x . Выражения для определения компонент напряжений, используя (6) и соотношения обобщенного закона Гука

$$\sigma_x^{(0)} = \bar{E}_1(\varepsilon_x^{(0)} + \nu_{31}\varepsilon_z^{(0)}), \quad \sigma_z^{(0)} = \bar{E}_3(\varepsilon_z^{(0)} + \nu_{13}\varepsilon_x^{(0)}), \quad \sigma_{xz}^{(0)} = G_{13}\gamma_{xz}^{(0)},$$

запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)} &= \bar{E}_1 \left[\left(1 + \frac{2z}{t} \right) u_{,x}^{(0)} - \frac{2z}{t} u_{,x}^* + \frac{2\nu_{31}}{t} (w^{(0)} - w^*) \right], \\ \sigma_z^{(0)} &= \bar{E}_3 \nu_{13} \left[\left(1 + \frac{2z}{t} \right) u_{,x}^{(0)} - \frac{2z}{t} u_{,x}^* \right] + \frac{2\bar{E}_3}{t} (w^{(0)} - w^*), \\ \sigma_{xz}^{(0)} &= G_{13} \left[\frac{2}{t} (u^{(0)} - u^*) + \left(1 + \frac{2z}{t} \right) w_{,x}^{(0)} - \frac{2z}{t} w_{,x}^* \right],\end{aligned}\tag{7}$$

где \bar{E}_1, \bar{E}_3 – упругие характеристики, выражающиеся через модули упругости E_1, E_3 и коэффициенты Пуассона ν_{13}, ν_{31}

$$\bar{E}_1 = E_1 / (1 - \nu_{13}\nu_{31}); \quad \bar{E}_3 = E_3 / (1 - \nu_{13}\nu_{31}); \quad E_1\nu_{31} = E_3\nu_{13}.$$

На участке закрепления вариация потенциальной энергии деформации будет определяться выражением

$$\begin{aligned}\nu\delta\Pi^{(0)} &= \int_{-l}^0 \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^{(0)}\delta\varepsilon_x^{(0)} + \sigma_z^{(0)}\delta\varepsilon_z^{(0)} + \sigma_{xz}^{(0)}\delta\gamma_{xz}^{(0)}) dx dz = \\ &= \int_{-l}^0 (T_x^{(0)}\delta u_{,x}^{(0)} + T_z^{(0)}\delta w^{(0)} + N_{xz}^{(0)}\delta w_{,x}^{(0)} + T_{xz}^{(0)}\delta u^{(0)}) dx = \\ &= (T_x^{(0)}\delta u^{(0)} + N_{xz}^{(0)}\delta w^{(0)}) \Big|_{x=-l}^{x=0} - \\ &- \int_{-l}^0 [(T_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)})\delta u^{(0)} + (N_{xz,x}^{(0)} - T_z^{(0)})\delta w^{(0)}] dx,\end{aligned}\tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}T_x^{(0)} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x^{(0)} \left(1 + \frac{2z}{t} \right) dz, \quad T_z^{(0)} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_z^{(0)} \frac{2}{t} dz, \\ N_{xz}^{(0)} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^{(0)} \left(1 + \frac{2z}{t} \right) dz, \quad T_{xz}^{(0)} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^{(0)} \frac{2}{t} dz.\end{aligned}\tag{9}$$

После подстановки в (9) зависимостей (7) и нахождения определенных интегралов приходим к соотношениям упругости

$$\begin{aligned}T_x^{(0)} &= \bar{E}_1 \left(\frac{4t}{3} u_{,x}^{(0)} + 2\nu_{31} w^{(0)} \right) - \bar{E}_1 \left(\frac{t}{3} u_{,x}^* + 2\nu_{31} w^* \right), \\ T_z^{(0)} &= \bar{E}_3 \left(\frac{4}{t} w^{(0)} + 2\nu_{31} u_{,x}^{(0)} \right) - \frac{4\bar{E}_3}{t} w^*, \\ N_{xz}^{(0)} &= G_{13} \left(\frac{4t}{3} w_{,x}^{(0)} + 2u^{(0)} \right) - G_{13} \left(\frac{t}{3} w_{,x}^* + 2u^* \right), \\ T_{xz}^{(0)} &= 2G_{13} \left(w_{,x}^{(0)} + \frac{2}{t} u^{(0)} \right) - \frac{4G_{13}}{t} u^*.\end{aligned}\tag{10}$$

В соответствии с (5) выражение для вариации работы инерционных сил закрепленного участка будет иметь вид

$$\begin{aligned}\delta K^{(0)} &= -\int_{-l}^0 \int_{-t/2}^{t/2} \rho \left(\ddot{U}^{(0)} \delta U^{(0)} + \ddot{W}^{(0)} \delta W^{(0)} \right) dx dz = \\ &= -\frac{\rho t}{3} \int_{-l}^0 \left[\left(4\ddot{u}^{(0)} - \ddot{u}^* \right) \delta u^{(0)} + \left(4\ddot{w}^{(0)} - \ddot{w}^* \right) \delta w^{(0)} \right] dx.\end{aligned}\quad (11)$$

3. МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕЗАКРЕПЛЕННОГО УЧАСТКА И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СТЕРЖНЯ

Процесс деформирования незакрепленного участка стержня длиной a (рис.1) будем описывать классической моделью Кирхгофа-Лява, в соответствии с которой для перемещений U и W произвольной точки поперечного сечения примем представления

$$U = u - zw_{,x}, \quad W = w, \quad 0 \leq x \leq a, \quad -t/2 \leq z \leq t/2, \quad (12)$$

где u, w – соответственно, продольное перемещение и прогиб осевой линии Ox . При слабом изгибе стержня представлениям (12) соответствуют в геометрически линейном приближении осевые деформации

$$\varepsilon_x = u_{,x} - zw_{,xx}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad -t/2 \leq z \leq t/2 \quad (13)$$

и вариация потенциальной энергии деформации

$$\delta \Pi = \int_0^a \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \delta \varepsilon_x dx dz = E_1 \int_0^a \int_{-t/2}^{t/2} \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dx dz.$$

Последнее выражение после учета в нем (13) и интегрирования по переменной z можно представить в виде

$$\begin{aligned}\delta \Pi &= \int_0^a \left(T_x \delta u_{,x} - M_x \delta w_{,xx} \right) dx = \\ &= \left(T_x \delta u - M_x \delta w_{,x} + Q_z \delta w \right) \Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a \left(T_{x,x} \delta u + Q_{z,x} \delta w \right) dx,\end{aligned}\quad (14)$$

где T_x, M_x, Q_z – соответственно осевая сила, изгибающий момент и поперечная сила в произвольном сечении незакрепленной части стержня, определяемые выражениями

$$\begin{aligned}T_x &= B u_{,x}, \quad M_x = -D w_{,xx}, \quad Q_z = M_{x,x} = -D w_{,xxx}, \\ B &= E_1 t, \quad D = E_1 t^3 / 12.\end{aligned}\quad (15)$$

В соответствии с (12) запишем выражение для вариации работы инерционных сил

$$\begin{aligned}\delta K &= -\int_0^a \int_{-t/2}^{t/2} \rho \left[\left(\ddot{u} - z \ddot{w}_{,x} \right) \left(\delta u - z \delta w_{,x} \right) + \ddot{w} \delta w \right] dx dz = \\ &= -\rho t \int_0^a \left(\ddot{u} \delta u + \frac{t^2}{12} \ddot{w}_{,x} \delta w_{,x} + \ddot{w} \delta w \right) dx.\end{aligned}\quad (16)$$

Пренебрегая в (16) подчеркнутым слагаемым, обусловленным силами инерции при повороте поперечного сечения стержня, приходим к выражению

$$\delta K = -\rho t \int_0^a \left(\ddot{u} \delta u + \ddot{w} \delta w \right) dx. \quad (17)$$

Подчинив представления (5) и (12) условиям непрерывности перемещений стержня в сечении $x = 0$, записываемым в виде $U^{(0)}|_{x=0} = U|_{x=0}$, $W^{(0)}|_{x=0} = W|_{x=0}$, путем приравнивания соответствующих коэффициентов при одинаковых степенях z получим кинематические условия сопряжения участков

$$u^{(0)}|_{x=0} = u|_{x=0}, \quad w^{(0)}|_{x=0} = w|_{x=0}, \quad \frac{2}{t}(u^{(0)} - u^*)|_{x=0} = -w_{,x}|_{x=0}. \quad (18)$$

Для получения уравнений движения закрепленной и незакрепленной частей стержня воспользуемся вариационным уравнением Гамильтона-Остроградского

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} (\delta\Pi^{(0)} - \delta K^{(0)} + \delta\Pi - \delta K - \delta A) d\tau = 0. \quad (19)$$

При нагружении стержня осевой силой P , приложенной в сечении $x = -l$ закрепленной части стержня (рис.1), вариация работы данной силы определяется равенством

$$\delta A = P\delta u^{(0)}|_{x=-l}. \quad (20)$$

Подставляя теперь составленные соотношения (8), (11), (14), (17) и (20) в уравнение (19) и используя условия сопряжения (18), получаем

$$\begin{aligned} & (T_x \delta u - M_x \delta w_{,x} + Q_z \delta w)|_{x=a} + (N_{xz}^{(0)} - Q_z) \delta w|_{x=0} - N_{xz}^{(0)} \delta w^{(0)}|_{x=-l} - \\ & - (P + T_x^{(0)}) \delta u^{(0)}|_{x=-l} + \left(T_x^{(0)} - T_x - \frac{2}{t} M_x \right) \delta u^{(0)}|_{x=0} - \\ & - \int_{-l}^0 \left[T_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)} - \frac{\rho t}{3} (4\ddot{u}^{(0)} - \ddot{u}^*) \right] \delta u^{(0)} dx - \\ & - \int_{-l}^0 \left[N_{xz,x}^{(0)} - T_z^{(0)} - \frac{\rho t}{3} (4\ddot{w}^{(0)} - \ddot{w}^*) \right] \delta w^{(0)} dx - \\ & - \int_0^a [(T_{x,x} - \rho t \ddot{u}) \delta u + (Q_{z,x} - \rho t \ddot{w}) \delta w] dx = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) в силу произвольности вариаций $\delta u^{(0)}$, δu , $\delta w^{(0)}$, δw , $\delta w_{,x}$ и отличия их от нуля следуют: уравнения движения закрепленного участка

$$T_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)} - \frac{\rho t}{3} (4\ddot{u}^{(0)} - \ddot{u}^*) = 0, \quad N_{xz,x}^{(0)} - T_z^{(0)} - \frac{\rho t}{3} (4\ddot{w}^{(0)} - \ddot{w}^*) = 0 \quad (22)$$

и соответствующие им граничные условия в сечении $x = -l$

$$T_x^{(0)}|_{x=-l} = -P, \quad N_{xz}^{(0)}|_{x=-l} = 0; \quad (23)$$

уравнения движения незакрепленного участка стержня

$$T_{x,x} - \rho t \ddot{u} = 0, \quad Q_{z,x} - \rho t \ddot{w} = 0 \quad (24)$$

и соответствующие им граничные условия на свободном крае $x = a$

$$T_x|_{x=a} = 0, \quad M_x|_{x=a} = 0, \quad Q_z|_{x=a} = 0; \quad (25)$$

а также силовые условия сопряжения участков, формулируемые в сечении $x = 0$

$$\left(T_x^{(0)} - T_x - \frac{2}{t} M_x \right)|_{x=0} = 0, \quad (N_{xz}^{(0)} - Q_z)|_{x=0} = 0. \quad (26)$$

4. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ ПРИ ЗАДААННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ОПОРНОГО ЭЛЕМЕНТА

Полученные уравнения движения (22) закрепленного участка стержня при подстановке в них зависимостей (10) принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 \left(\frac{4t}{3} u_{,xx}^{(0)} + 2v_{31} w_{,x}^{(0)} \right) - 2G_{13} \left(w_{,x}^{(0)} + \frac{2}{t} u^{(0)} \right) - \frac{4\rho t}{3} \ddot{u}^{(0)} = \\ = \bar{E}_1 \left(\frac{t}{3} u_{,xx}^* + 2v_{31} w_{,x}^* \right) - \frac{4G_{13}}{t} u^* - \frac{\rho t}{3} \ddot{u}^*, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} G_{13} \left(\frac{4t}{3} w_{,xx}^{(0)} + 2u_{,x}^{(0)} \right) - \bar{E}_3 \left(\frac{4}{t} w^{(0)} + 2v_{31} u_{,x}^{(0)} \right) - \frac{4\rho t}{3} \ddot{w}^{(0)} = \\ = G_{13} \left(\frac{t}{3} w_{,xx}^* + 2u_{,x}^* \right) - \frac{4\bar{E}_3}{t} w^* - \frac{\rho t}{3} \ddot{w}^*. \end{aligned} \quad (28)$$

В представленных уравнениях в правых частях в первом приближении могут быть сохранены только подчеркнутые слагаемые, если считать, что $u^*(x, \tau) = u^*(\tau)$, $w^*(x, \tau) = w^*(\tau)$. Предположим, что сила $P = P(\tau)$ (рис.1) меняется по гармоническому закону $P = \tilde{P}e^{i\omega\tau}$. Тогда в предельно упрощенном приближении путем представления решений уравнений (27), (28) и заданных перемещений u^* , w^* виде

$$u^{(0)} = \tilde{u}^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad w^{(0)} = \tilde{w}^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad u^* = 0, \quad w^* = \tilde{w}^* e^{i\omega\tau}$$

получим

$$\tilde{u}_{,xx}^{(0)} - \tilde{r}_0 \tilde{u}^{(0)} - \tilde{r}_1 \tilde{w}_{,x}^{(0)} = 0, \quad (29)$$

$$\tilde{w}_{,xx}^{(0)} - \tilde{r}_2 \tilde{w}^{(0)} - \tilde{r}_3 \tilde{u}_{,x}^{(0)} = -r_5, \quad (30)$$

где при сохранении в правой части (28) только подчеркнутых слагаемых и использовании преобразований

$$\frac{4\bar{E}_3}{t} w^* + \frac{\rho t}{3} \ddot{w}^* = r_4 \tilde{w}^* e^{i\omega\tau}, \quad r_4 = \frac{4\bar{E}_3}{t} - \frac{\rho t \omega^2}{3}$$

введен коэффициент

$$r_5 = \frac{3r_4}{4G_{13}t} w^* = \left(\frac{3\bar{E}_3}{G_{13}t^2} - \frac{\rho\omega^2}{4G_{13}} \right) w^*,$$

а также приняты обозначения [23]

$$\tilde{r}_0 = \frac{3G_{13}}{\bar{E}_1 t^2} - \frac{\rho\omega^2}{\bar{E}_1}, \quad \tilde{r}_1 = \frac{3}{2t} \left(\frac{G_{13}}{\bar{E}_1} - v_{31} \right),$$

$$\tilde{r}_2 = \frac{3\bar{E}_3}{G_{13}t^2} - \frac{\rho\omega^2}{G_{13}}, \quad \tilde{r}_3 = \frac{3}{2t} \left(\frac{\bar{E}_3 v_{13}}{G_{13}} - 1 \right).$$

После введения в рассмотрение разрешающей функции $\Phi^{(0)}$ в виде

$$\tilde{u}^{(0)} = \Phi_{,x}^{(0)}, \quad \tilde{w}^{(0)} = -\frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}_1} \Phi^{(0)} + \frac{1}{\tilde{r}_1} \Phi_{,xx}^{(0)} \quad (31)$$

уравнение (29) удовлетворяется тождественно, а вместо (30) приходим к уравнению

$$\Phi_{,xxx}^{(0)} - n_2 \Phi_{,xx}^{(0)} + n_0 \Phi^{(0)} = -\tilde{r}_1 \tilde{r}_5 \quad (32)$$

с коэффициентами $n_0 = \tilde{r}_0 \tilde{r}_2$, $n_2 = \tilde{r}_0 + \tilde{r}_2 + \tilde{r}_1 \tilde{r}_3$. Решение уравнения (32) будет иметь вид

$$\Phi^{(0)} = \sum_{j=1}^4 g_j^{(0)} e^{\lambda_j x} - \frac{\tilde{r}_5 \tilde{r}_1}{\tilde{r}_2 \tilde{r}_0},$$

где $g_1^{(0)}$, $g_2^{(0)}$, $g_3^{(0)}$, $g_4^{(0)}$ – постоянные интегрирования, а

$$\lambda_1 = \left(n_2/2 + \sqrt{n_2^2/4 - n_0} \right)^{1/2}, \quad \lambda_2 = - \left(n_2/2 + \sqrt{n_2^2/4 - n_0} \right)^{1/2},$$

$$\lambda_3 = \left(n_2/2 - \sqrt{n_2^2/4 - n_0} \right)^{1/2}, \quad \lambda_4 = - \left(n_2/2 - \sqrt{n_2^2/4 - n_0} \right)^{1/2}$$

– корни характеристического уравнения, составленного для (32) при нулевой правой части.

Если вместо $u^* = 0$ принять представление $u^* = \tilde{u}^* e^{i\omega t}$ и уравнение (29) записать в приближении

$$\tilde{u}_{,xx}^{(0)} - \tilde{r}_0 \tilde{u}^{(0)} - \tilde{r}_1 \tilde{w}_{,x}^{(0)} = -\tilde{r}_6 \tilde{u}^*, \quad (33)$$

где

$$\tilde{r}_6 = \frac{3G_{13}}{\bar{E}_1 t^2} - \frac{\rho \omega^2}{4\bar{E}_1},$$

то вместо (31) необходимо ввести в рассмотрение зависимости

$$\tilde{u}^{(0)} = \Phi_{,x}^{(0)} + \frac{\tilde{r}_6}{\tilde{r}_0} \tilde{u}^*, \quad \tilde{w}^{(0)} = -\frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}_1} \Phi^{(0)} + \frac{1}{\tilde{r}_1} \Phi_{,xx}^{(0)},$$

тождественно удовлетворяющие уравнению (33) и приводящие, по-прежнему, к уравнению (32).

И, наконец, принимая для заданных перемещений u^* , w^* аппроксимации

$$u^* = \tilde{u}^* e^{i\omega t}, \quad w^* = \left[\tilde{w}^*(0) + x\tilde{\theta}^* \right] e^{i\omega t}, \quad w_{,x}^* = \tilde{\theta}^* e^{i\omega t}, \quad -l \leq x \leq 0 \quad (34)$$

при $\tilde{u}^* = \text{const}$, $\tilde{\theta}^* = \text{const}$ ($\tilde{\theta}^*$ – амплитуда угла закручивания опорного элемента), запишем уравнения (27), (28) в виде

$$\tilde{u}_{,xx}^{(0)} - \tilde{r}_0 \tilde{u}^{(0)} - \tilde{r}_1 \tilde{w}_{,x}^{(0)} = \frac{3v_{31}}{2t} \tilde{\theta}^* - \tilde{r}_6 \tilde{u}^*, \quad (35)$$

$$\tilde{w}_{,xx}^{(0)} - \tilde{r}_2 \tilde{w}^{(0)} - \tilde{r}_3 \tilde{u}_{,x}^{(0)} = -\tilde{r}_5 \left[\tilde{w}^*(0) + x\tilde{\theta}^* \right], \quad (36)$$

где

$$\tilde{r}_5 = \frac{r_5}{w^*} = \frac{3\bar{E}_3}{G_{13} t^2} - \frac{\rho \omega^2}{4G_{13}}.$$

Амплитуда перемещения $\tilde{w}^*(0)$ в сечении $x = 0$ определяется выражением $\tilde{w}^*(0) = \tilde{w}_c^* - \tilde{\theta}^* x_c$, где \tilde{w}_c^* , $x_c < 0$ – соответственно амплитуда прогиба и абсцисса центра тяжести поперечного сечения опорного элемента.

В рассматриваемом приближении (34) уравнение (35) тождественно удовлетворяется при введении функции перемещений в соответствии с представлениями

$$\tilde{u}^{(0)} = \Phi_{,x}^{(0)} - \frac{1}{\tilde{r}_0} \left(\frac{3v_{31}}{2t} \tilde{\theta}^* - \tilde{r}_6 \tilde{u}^* \right), \quad \tilde{w}^{(0)} = -\frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}_1} \Phi^{(0)} + \frac{1}{\tilde{r}_1} \Phi_{,xx}^{(0)}, \quad (37)$$

а подстановка (37) в (36) приводит к разрешающему уравнению

$$\Phi_{,xxxx}^{(0)} - n_2 \Phi_{,xx}^{(0)} + n_0 \Phi^{(0)} = -\tilde{r}_1 \tilde{r}_5 \left[\tilde{w}^*(0) + x \tilde{\theta}^* \right],$$

имеющему общее решение вида

$$\Phi^{(0)} = \sum_{j=1}^4 g_j^{(0)} e^{\lambda_j x} - \frac{\tilde{r}_5 \tilde{r}_1}{\tilde{r}_2 \tilde{r}_0} \left[\tilde{w}^*(0) + x \tilde{\theta}^* \right]. \quad (38)$$

С учетом полученного решения (38) зависимости (37) принимают вид

$$\tilde{u}^{(0)} = \sum_{j=1}^4 g_j^{(0)} \lambda_j e^{\lambda_j x} - \frac{\tilde{\theta}^*}{\tilde{r}_0} \left(\frac{\tilde{r}_5 \tilde{r}_1}{\tilde{r}_2} + \frac{3\nu_{31}}{2t} \right) + \frac{\tilde{r}_6}{\tilde{r}_0} \tilde{u}^*, \quad (39)$$

$$\tilde{w}^{(0)} = \sum_{j=1}^4 \beta_j g_j^{(0)} e^{\lambda_j x} + \frac{\tilde{r}_5}{\tilde{r}_2} \left[\tilde{w}^*(0) + x \tilde{\theta}^* \right],$$

где принято обозначение $\beta_j = (-\tilde{r}_0 + \lambda_j^2) / \tilde{r}_1$.

В сечении $x = -l$ в соответствии с (23) и представлениями

$$T_x^{(0)} = \tilde{T}_x^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad N_{xz}^{(0)} = \tilde{N}_{xz}^{(0)} e^{i\omega\tau} \quad (40)$$

должны выполняться условия

$$\tilde{T}_x^{(0)} \Big|_{x=-l} = -\tilde{P}, \quad \tilde{N}_{xz}^{(0)} \Big|_{x=-l} = 0,$$

которые с учетом (34), (39), а также первой и третьей зависимостей в (10) дают два уравнения

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 \sum_{j=1}^4 \left(\frac{4t}{3} \lambda_j^2 + 2\nu_{31} \beta_j \right) g_j^{(0)} e^{-\lambda_j l} &= -2\bar{E}_1 \nu_{31} \left[\tilde{w}^*(0) - l \tilde{\theta}^* \right] \left(\frac{\tilde{r}_5}{\tilde{r}_2} - 1 \right) - \tilde{P}; \\ \sum_{j=1}^4 \left(\frac{4t}{3} \beta_j + 2 \right) g_j^{(0)} \lambda_j e^{-\lambda_j l} &= \tilde{\theta}^* \left(-\frac{4t}{3} \frac{\tilde{r}_5}{\tilde{r}_2} + 2 \frac{\tilde{r}_1 \tilde{r}_5}{\tilde{r}_0 \tilde{r}_2} + 3 \frac{\nu_{31}}{\tilde{r}_0 t} + \frac{t}{3} \right) + 2\tilde{u}^* \left(1 - \frac{\tilde{r}_6}{\tilde{r}_0} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Перейдем к решению уравнений движения (24) незакрепленной части стержня. С учетом (15) уравнения (24) можно записать в виде

$$u_{,xx} - \frac{\rho t}{B} \ddot{u} = 0, \quad w_{,xxxx} + \frac{\rho t}{D} \ddot{w} = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (42)$$

Решения данных уравнений будем искать в форме

$$u(x, \tau) = \tilde{u}(x) e^{i\omega\tau}, \quad w(x, \tau) = \tilde{w}(x) e^{i\omega\tau}. \quad (43)$$

С учетом (43) уравнения (42) приводятся к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно амплитуд перемещений \tilde{u} и \tilde{w}

$$\tilde{u}_{,xx} + k^2 \tilde{u} = 0, \quad \tilde{w}_{,xxxx} - k_w^4 \tilde{w} = 0, \quad (44)$$

где $k^2 = \rho t \omega^2 / B$, $k_w^4 = \rho t \omega^2 / D$. Решения уравнений (44) имеют вид

$$\tilde{u}(x) = d_1 \sin(kx) + d_2 \cos(kx), \quad (45)$$

$$\tilde{w} = c_1 \sin(k_w x) + c_2 \cos(k_w x) + c_3 e^{k_w x} + c_4 e^{-k_w x}. \quad (46)$$

Здесь $d_1, d_2, c_1, c_2, c_3, c_4$ – постоянные интегрирования.

В соответствии с первой зависимостью в (15) и первым из представлений (43) усилие T_x в незакрепленной части стержня будет определяться выражением

$$T_x = \tilde{T}_x e^{i\omega\tau}, \quad (47)$$

где

$$\tilde{T}_x = B\tilde{u}_{,x} = Bk[d_1 \cos(kx) - d_2 \sin(kx)]. \quad (48)$$

Изгибающие моменты и поперечные силы в отмеченной части стержня определяются зависимостями $M_x = -Dw_{,xx}$, $Q_z = M_{x,x} = -Dw_{,xxx}$, которые в соответствии со вторым представлением в (43) можно записать в виде

$$M_x = \tilde{M}_x e^{i\omega\tau} = -D\tilde{w}_{,xx} e^{i\omega\tau}, \quad Q_z = \tilde{Q}_z e^{i\omega\tau} = -D\tilde{w}_{,xxx} e^{i\omega\tau}. \quad (49)$$

Отсюда с учетом (46) следуют амплитуды изгибающих моментов и поперечных сил

$$\begin{aligned} \tilde{M}_x &= -Dk_w^2 [-c_1 \sin(k_w x) - c_2 \cos(k_w x) + c_3 e^{k_w x} + c_4 e^{-k_w x}]; \\ \tilde{Q}_z &= -Dk_w^3 [-c_1 \cos(k_w x) + c_2 \sin(k_w x) + c_3 e^{k_w x} - c_4 e^{-k_w x}]. \end{aligned} \quad (50)$$

Согласно (25) и представлениям (47), (49) в сечении $x = a$ должны выполняться условия $\tilde{T}_x|_{x=a} = 0$, $\tilde{M}_x|_{x=a} = 0$, $\tilde{Q}_z|_{x=a} = 0$, которые при подстановке в них зависимостей (48) и (50) дают три алгебраических уравнения

$$\begin{aligned} d_1 \cos(ka) - d_2 \sin(ka) &= 0, \\ -c_1 \sin(k_w a) - c_2 \cos(k_w a) + c_3 e^{k_w a} + c_4 e^{-k_w a} &= 0, \\ -c_1 \cos(k_w a) + c_2 \sin(k_w a) + c_3 e^{k_w a} - c_4 e^{-k_w a} &= 0. \end{aligned} \quad (51)$$

При использовании для представления закрепленного и незакрепленного участков стержня, соответственно, моделей (5) и (12) в сечении $x = 0$ должны выполняться кинематические условия сопряжения (18), которые при использовании аппроксимаций (34) и полученных зависимостей (39), (45), (46) в дополнение к (41) и (51) доставляют еще три уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \lambda_j g_j^{(0)} - d_2 &= \frac{\tilde{\theta}^*}{\tilde{r}_0} \left(\frac{\tilde{r}_3 \tilde{r}_1}{\tilde{r}_2} + \frac{3v_{31}}{2t} \right) - \tilde{u}^* \frac{\tilde{r}_6}{\tilde{r}_0}; \\ \sum_{j=1}^4 \beta_j g_j^{(0)} - c_2 - c_3 - c_4 &= -\frac{\tilde{r}_5}{\tilde{r}_2} \tilde{w}^*(0); \\ \frac{2}{t} \sum_{j=1}^4 \lambda_j g_j^{(0)} + k_w (c_1 + c_3 - c_4) &= \frac{2}{t} \left[\frac{\tilde{\theta}^*}{\tilde{r}_0} \left(\frac{\tilde{r}_3 \tilde{r}_1}{\tilde{r}_2} + \frac{3v_{31}}{2t} \right) + \tilde{u}^* \left(1 - \frac{\tilde{r}_6}{\tilde{r}_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

И, наконец, кроме условий (18) в сечении $x = 0$ необходимо также удовлетворить силовым условиям сопряжения (26), которые с учетом представлений (40), (47), (49), а также зависимостей (10), (39), (48) и (50) дают еще два уравнения

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 \sum_{j=1}^4 \left(\frac{4t}{3} \lambda_j^2 + 2v_{31} \beta_j \right) g_j^{(0)} - Bkd_1 + \frac{2}{t} Dk_w^2 (-c_2 + c_3 + c_4) &= \\ &= 2\bar{E}_1 v_{31} \left(1 - \frac{\tilde{r}_5}{\tilde{r}_2} \right) \tilde{w}^*(0); \\ \sum_{j=1}^4 \left(\frac{4t}{3} \beta_j + 2 \right) g_j^{(0)} \lambda_j + \frac{Dk_w^3}{G_{13}} (-c_1 + c_3 - c_4) &= \\ &= \tilde{\theta}^* \left(-\frac{4t}{3} \frac{\tilde{r}_5}{\tilde{r}_2} + 2 \frac{\tilde{r}_1 \tilde{r}_5}{\tilde{r}_0 \tilde{r}_2} + 3 \frac{v_{31}}{\tilde{r}_0 t} + \frac{t}{3} \right) + 2\tilde{u}^* \left(1 - \frac{\tilde{r}_6}{\tilde{r}_0} \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Полученные уравнения (41), (51)-(53) образуют систему десяти линейных

алгебраических уравнений, из которой однозначно определяются постоянные интегрирования $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)}, g_4^{(0)}, d_1, d_2, c_1, c_2, c_3, c_4$, что дает возможность полностью определить НДС закрепленного и незакрепленного участков стержня при действии осевой силы $P = \tilde{P}e^{i\omega t}$, приложенной в торцевом сечении закрепленного участка с учетом заданных перемещений u^*, w^* на поверхности контакта его с упругим опорным элементом.

Представляет интерес рассмотреть учет отмеченных перемещений u^*, w^* при действии внешней поперечной силы $P = \tilde{P}e^{i\omega t}$, приложенной в сечении $x = a$ незакрепленного участка стержня. Нетрудно показать, что в этом случае по-прежнему будут справедливы полученные уравнения движения (22), (24) и силовые условия сопряжения (26), а вместо (23) и (25) в сечениях $x = -l$ и $x = a$ следует соответственно использовать граничные условия $T_x^{(0)}|_{x=-l} = 0, N_{xz}^{(0)}|_{x=-l} = 0$ и $T_x|_{x=a} = 0, M_x|_{x=a} = 0, Q_z|_{x=a} = P$. Постоянные интегрирования $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)}, g_4^{(0)}, d_1, d_2, c_1, c_2, c_3, c_4$, как и прежде, будут определяться из системы уравнений (41), (51)-(53) при удалении силы \tilde{P} из первого уравнения в (41) и заменой нуля в правой части последнего из уравнений (51) величиной $-\tilde{P}/(Dk_w^3)$.

Следует заметить, что разработанная методика решения задачи о вынужденных колебаниях стержня с учетом заданных перемещений u^*, w^* на поверхности $z = -t/2$ закрепленного участка не учитывает демпфирующие свойства материала. Поэтому она может давать корректное решение только при частотах, находящихся вдали от резонансной зоны, в то время как заметные колебания стержня должны наблюдаться в резонансных режимах нагружения, при которых демпфирующие свойства материала необходимо обязательно учитывать [26]. При гармоническом законе деформирования стержня это можно сделать с использованием известной гипотезы комплексного внутреннего трения [27-29] заменяя величины E_1, E_3 и G_{13} материала комплексными модулями упругости

$$E_1^* = E_1 + i \frac{E_1 \delta_1}{\pi}, \quad E_3^* = E_3 + i \frac{E_3 \delta_3}{\pi}, \quad G_{13}^* = G_{13} + i \frac{G_{13} \delta_{13}}{\pi},$$

где $\delta_1, \delta_3, \delta_{13}$ – логарифмические декременты колебаний (ЛДК), определяющие демпфирующие свойства материала соответственно при растяжении-сжатии его в направлениях осей Ox, Oz и при сдвиге в плоскости Oxz .

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

С целью проведения модального анализа опорного элемента и определения динамической реакции стержня при заданных перемещениях u^*, w^* проведены три вычислительных эксперимента.

Эксперимент 1. В качестве упругого опорного элемента рассматривается швеллер №10, имеющий следующие геометрические характеристики поперечного сечения (рис.4а): $h = 100$ мм; $l = 46$ мм; $s = 4.5$ мм; $d = 7.6$ мм; $r = 14.4$ мм; $F = 10.9$ см²; $I_x = 174$ см⁴; $I_z = 20.4$ см⁴; $I_k = 1.52$ см⁴ (момент инерции сечения при кручении). Материал швеллера – сталь Ст. 3 с механическими

характеристиками: $E = 164$ ГПа – динамический модуль упругости при растяжении-сжатии [30]; $\nu = 0.3$ – коэффициент Пуассона; $G = E/[2(1 + \nu)] = 63$ ГПа – динамический модуль упругости при сдвиге; $\delta_\epsilon = 0.024$, $\delta_\gamma = 0.015$ – ЛДК материала соответственно при растяжении-сжатии и сдвиге. Погонная масса швеллера $m = 8.59$ кг/м.

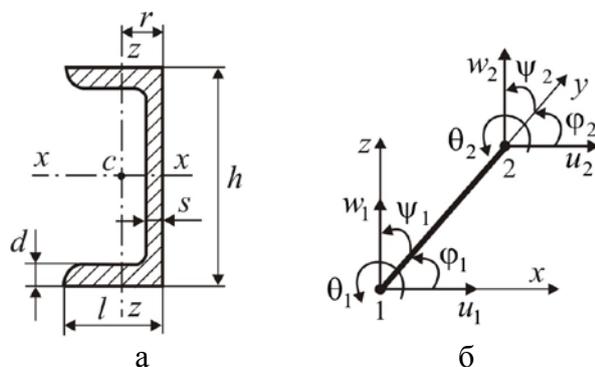


Рис.4. Поперечное сечение опорного элемента (а) и стержневой конечный элемент (б).

Для проведения модального анализа опорного элемента использовался метод конечных элементов (МКЭ) с разбиением его в продольном направлении на 112 стержневых конечных элементов одинаковой длины с тем расчетом, чтобы положение узла с номером 90 соответствовало середине ширины стержня. Считалось, что каждый элемент работает на кручение и изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис.5б). Концевые сечения опорного элемента считались жестко защемленными. Узловые перемещения конечного элемента определяются вектором $\mathbf{r}^{(e)} = \{u_1, w_1, \phi_1, \psi_1, \theta_1, u_2, w_2, \phi_2, \psi_2, \theta_2\}$.

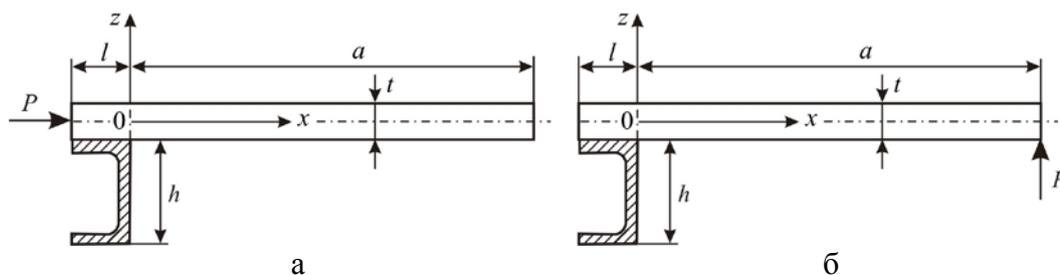


Рис.5. Варианты нагружения стержня-полосы.

В результате модального анализа, проведенного на основе метода итераций в подпространстве [31,32], определены десять собственных форм и частот колебаний швеллера, из которых низшая собственная частота $f_1^* = 111.554$ Гц, соответствующая крутильной форме колебаний, получилась достаточно близкой к экспериментальной частоте $f_2^{(exp)} = 110.5$ Гц.

Эксперимент 2. Рассматривается стержень-полоса (рис.5а), закрепленный по поверхности $z = -t/2$ на упругом опорном элементе (швеллере №10) и нагруженный на торце осевой гармонической силой $P = \tilde{P}e^{i\omega t}$ с амплитудой $\tilde{P} = 120$ Н/м (на единицу ширины стержня). Стержень выполнен из алюминиевого

сплава Д16АТ с динамическими модулями упругости [25] $E_1 = E_3 = 55.4$ ГПа, $G_{13} = 21.3$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu_{13} = 0.3$ и логарифмическими декрементами колебаний $\delta_1 = \delta_3 = 0.005$, $\delta_{13} = 0.002$. Размеры стержня: $t = 2.9$ мм; $l = 46$ мм; $a = 200$ мм; $b = 20$ мм (ширина стержня).

Для определения амплитуд узловых перемещений конечно-элементной модели опорного элемента от силы $P = \tilde{P}e^{i\omega t}$ с учетом демпфирующих свойств материала использовалась система разрешающих уравнений [17]

$$\mathbf{K}^* \mathbf{r}^* = \mathbf{R}, \quad (54)$$

где $\mathbf{K}^* = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} - i\omega \mathbf{C})$ – комплексная матрица динамической жесткости, содержащая матрицу жесткости \mathbf{K} , матрицу масс \mathbf{M} и матрицу вязкого демпфирования \mathbf{C} ; \mathbf{r}^* , \mathbf{R} – соответственно комплексный вектор узловых перемещений и вектор внешних узловых сил отмеченной модели. Поскольку сила $P = \tilde{P}e^{i\omega t}$ приложена не в центре тяжести поперечного сечения швеллера, а на расстоянии по вертикали $(h+t)/2$ от него (рис.5а), то в направлении узлового перемещения \tilde{u}_{90} в векторе \mathbf{R} записывалась амплитуда узловой силы $\tilde{P}b$ (b – ширина стержня), а в направлении угла поворота $\tilde{\theta}_{90}$ – амплитуда узлового крутящего момента $\tilde{M}_{90} = -\tilde{P}b(h+t)/2$. Остальные элементы вектора \mathbf{R} считались нулевыми. Для определения необходимых при моделировании НДС стержня амплитуд перемещений \tilde{u}^* , $\tilde{w}^*(0)$ и угла поворота $\tilde{\theta}^*$ использовалось линейное преобразование

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}^* \\ \tilde{w}^*(0) \\ \tilde{\theta}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h/2 \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{90} \\ \tilde{w}_{90} \\ \tilde{\theta}_{90} \end{Bmatrix}.$$

С целью определения частот свободных колебаний стержня по-прежнему использовался МКЭ с представлением его совокупностью одномерных конечных элементов [17], работающих в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко без учета деформаций поперечного обжатия. При этом закрепленная часть стержня разбивалась на 100 конечных элементов одинаковой длины. Незакрепленная часть стержня состояла из 300 элементов. В результате были найдены первые две частоты свободных колебаний стержня, имеющие значения $\hat{f}_1 = 51.737$ Гц и $\hat{f}_2 = 323.977$ Гц, которые оказались достаточно близкими к указанным в разделе 1 соответствующим экспериментальным частотам $f_1^{(\text{exp})} = 51.5$ Гц и $f_3^{(\text{exp})} = 331$ Гц, а также к расчетным частотам $f_1^{(r)} = 52.095$ Гц и $f_2^{(r)} = 326.472$ Гц, найденным по формуле (1) для консольной жестко защемленной балки. Собственные частоты f_1 и f_2 с учетом поперечного обжатия закрепленной части стержня определялись подбором путем незначительного уменьшения указанных выше частот \hat{f}_1 и \hat{f}_2 до достижения максимальных по модулю амплитуд колебаний $\tilde{w}(a)$ свободного конца стержня (снижение f_1 и f_2 по сравнению с \hat{f}_1 , \hat{f}_2 обусловлено некоторым увеличением податливости закрепленной части за счет учета ее поперечного обжатия). В результате были

получены значения $f_1 = 51.651$ Гц и $f_2 = 323.675$ Гц.

В Таблице 1 представлены значения \tilde{u}^* , $\tilde{w}^*(0)$, $\tilde{\theta}^*$ и амплитуды прогиба $\tilde{w}(a)$ свободного конца стержня, найденной в результате аналитического решения задачи о вынужденных колебаниях стержня от осевой силы $P = \tilde{P}e^{i\omega t}$, приложенной на торце закрепленной части, при трех расчетных резонансных частотах $f_1 = 51.651$ Гц, $f_1^* = 111.554$ Гц, $f_2 = 323.675$ Гц. В последнем столбце Таблицы 1 для сравнения приведены амплитуды прогиба $\tilde{w}(a)$, полученные на основе МКЭ с учетом указанных значений \tilde{u}^* , $\tilde{w}^*(0)$, $\tilde{\theta}^*$ при моделировании стержня набором отмеченных выше одномерных элементов (подчеркнутые значения $\tilde{w}(a)$ получены при собственных частотах $\hat{f}_1 = 51.737$ Гц и $\hat{f}_2 = 323.977$ Гц, соответствующих конечно-элементной модели стержня). Знак «-» в $\tilde{w}(a)$ означает, что на половине периода, когда сила P направлена вправо (рис.5а) сечение $x = a$ стержня перемещается вниз.

Таблица 1.

f , Гц	\tilde{u}^* , мм	$\tilde{w}^*(0)$, мм	$\tilde{\theta}^*$, рад	$\tilde{w}(a)$, мм	
				Аналитическое решение	МКЭ
51.651	0.0015	$-3.881 \cdot 10^{-4}$	$-2.695 \cdot 10^{-5}$	-4.240	<u>-4.248</u>
111.554	0.1112	-0.0320	-0.0022	0.244	0.244
323.675	0.0021	$-5.810 \cdot 10^{-4}$	$-4.035 \cdot 10^{-5}$	1.230	<u>1.234</u>

Из Таблицы 1 видно, что наибольшие по модулю значения \tilde{u}^* , $\tilde{w}^*(0)$, $\tilde{\theta}^*$ получаются, как и следовало ожидать, при резонансе на частоте $f = f_1^* = 111.554$ Гц, соответствующей низшей (крутильной) форме колебаний швеллера. Но, несмотря на это, амплитуда колебаний $\tilde{w}(a)$ свободного конца стержня получается при этом наименьшей, поскольку данная частота не является резонансной для самого стержня. Значения $\tilde{w}(a)$, найденные с использованием аналитического решения и МКЭ, получились во всех трех случаях практически одинаковыми. Проведенные численные эксперименты показали, что аналогичная ситуация наблюдается также и в отношении амплитуд нормальных и касательных напряжений в незакрепленной части стержня при всех заданных значениях \tilde{u}^* , $\tilde{w}^*(0)$, $\tilde{\theta}^*$. Однако, в закрепленной части стержня результаты для амплитуд напряжений, полученные с использованием аналитического решения и МКЭ, качественно и количественно оказались совершенно различными, что можно объяснить неучетом в конечно-элементном решении деформаций поперечного обжатия закрепленной части и практической неспособностью МКЭ к отслеживанию ярко выраженной локализации перемещений и напряжений вблизи сечения $x = 0$ отмеченной части, наблюдаемой (как будет показано ниже) при аналитическом решении задачи о вынужденных колебаниях стержня.

На рис.6-8 представлены амплитуды нормальных и касательных напряжений в закрепленной и незакрепленной частях стержня при резонансных колебаниях на частотах $f_1 = 51.651$ Гц, $f_1^* = 111.554$ Гц и $f_2 = 323.675$ Гц, полученные

с учетом представленных в Таблице 1 амплитуд перемещений \tilde{u}^* , $\tilde{w}^*(0)$ и угла поворота $\tilde{\theta}^*$ граничной поверхности $z = -t/2$ закрепленной части стержня при аналитическом решении задачи.

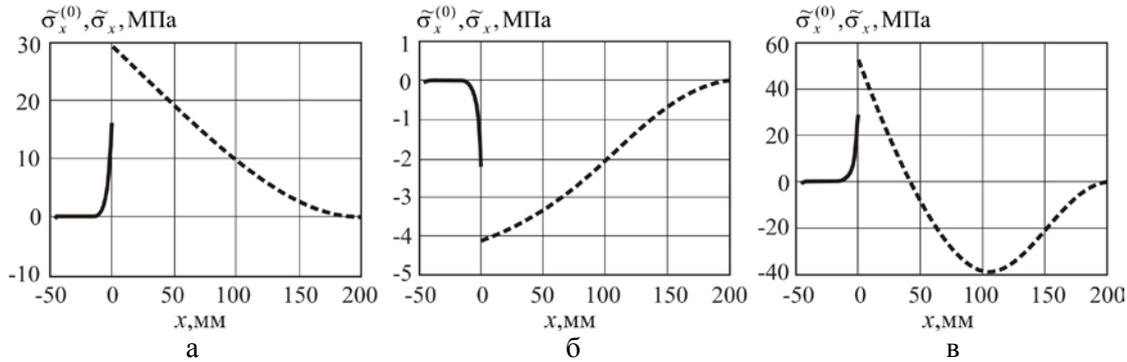


Рис.6. Амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}(x, z = t/2)$ и $\tilde{\sigma}_x(x, z = t/2)$ в стержне при частотах $f_1 = 51.651$ Гц (а), $f_1^* = 111.554$ Гц (б) и $f_2 = 323.675$ Гц (в): $\tilde{\sigma}_x^{(0)}(x, z = t/2)$ – сплошная линия; $\tilde{\sigma}_x(x, z = t/2)$ – пунктирная линия.

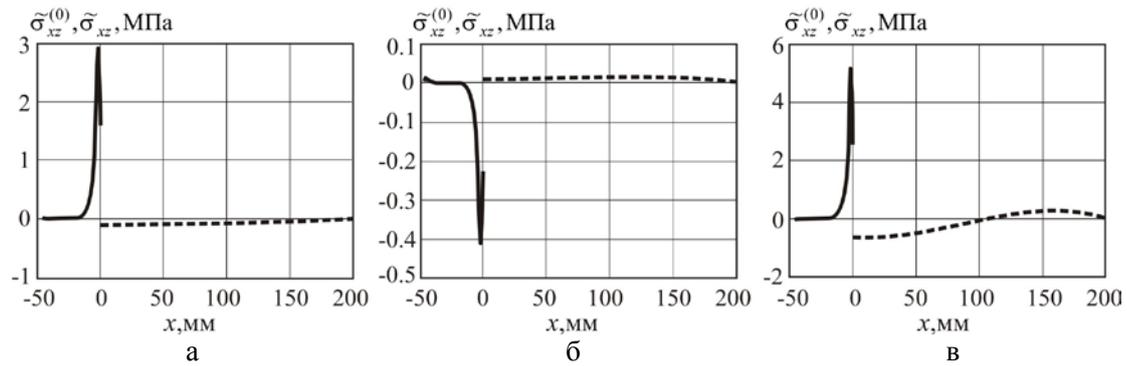


Рис.7. Амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}(x, z = 0)$ и $\tilde{\sigma}_{xz}(x)$ в стержне при частотах $f_1 = 51.651$ Гц (а), $f_1^* = 111.554$ Гц (б) и $f_2 = 323.675$ Гц (в): $\tilde{\sigma}^{(0)}(x, z = t/2)$ – сплошная линия; $\tilde{\sigma}(x, z = t/2)$ – пунктирная линия.

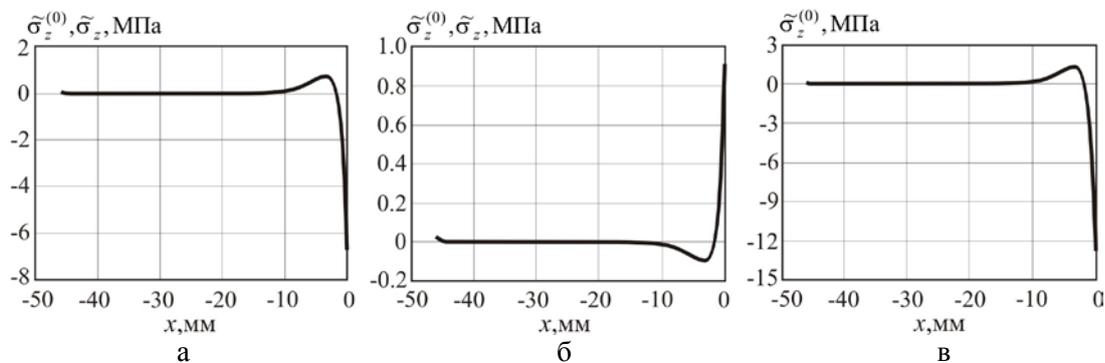


Рис.8. Амплитуды напряжений поперечного обжатия $\tilde{\sigma}_z^{(0)}(x, z = 0)$ в закрепленной части стержня при частотах $f_1 = 51.651$ Гц (а), $f_1^* = 111.554$ Гц (б)

и $f_2 = 323.675$ Гц (в).

Из рис.6-8 видно, что при вынужденных колебаниях стержня амплитуды напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$, $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ и $\tilde{\sigma}_z^{(0)}$ при всех трех отмеченных частотах имеют близи сечения $x = 0$ закрепленной части стержня ярко выраженную локализацию, а по мере удаления от данного сечения становятся практически нулевыми. Причем, наибольшие по модулю значения $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$, $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$, $\tilde{\sigma}_z^{(0)}$, как и следовало ожидать, наблюдаются при резонансных колебаниях стержня на собственных частотах $f_1 = 51.651$ Гц и $f_2 = 323.675$ Гц. Интересно отметить, что наибольшие по модулю значения $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ наблюдаются не в самом сечении $x = 0$ закрепленной части, а на незначительном расстоянии от него, что, обусловлено учетом деформаций поперечного обжатия в отмеченной части стержня. При переходе через границу от незакрепленной части стержня к участку закрепления конечной длины l наблюдается существенная трансформация нормальных и касательных напряжений (рис.6,7).

В работе [22], где решалась задача о вынужденных колебаниях рассматриваемого стержня (рис.5а), но при абсолютно жестком опорном элементе, т.е. без учета его перемещений \tilde{u}^* , $\tilde{w}^*(0)$ и угла закручивания $\tilde{\theta}^*$, отмечается, что степень проходимости колебаний через участок закрепления конечной длины l в незакрепленную часть стержня зависит от безразмерного параметра $k_0^2 = 3G_{13}l^2 / (E_1t^2)$. В плоских стержнях из металлических конструкционных материалов с модулями упругости E_1 и G_{13} , связанными зависимостью $G_{13} = E_1 / [2(1 + \nu_{13})]$, и достаточно большим отношением l^2/t^2 колебания в отмеченную часть стержня практически не проходят [22]. Для рассматриваемого стержня при заданных значениях E_1 , G_{13} , l и t параметр $k_0^2 = 290.2$, что намного (почти в двадцать раз) превышает максимальное значение, при котором еще возможно прохождение заметных колебаний в незакрепленную часть стержня за счет податливости его закрепленного участка. Однако, полученные результаты (см. таблицу 1) свидетельствуют о том, что отмеченная часть стержня при указанном значении параметра k_0^2 все-таки заметно колеблется. Отмеченный факт свидетельствует о том, что колебания незакрепленной части стержня практически полностью определяются заданными перемещениями u^* , w^* на поверхности $z = -t/2$ участка закрепления конечной длины, обусловленными податливостью опорного элемента. Причем, наиболее значительными эти колебания получаются при резонансе на собственных частотах f_1 и f_2 стержня. К такому же выводу можно придти, если провести расчет при заданных перемещениях u^* , w^* , но без учета амплитуды \tilde{P} силы $P = \tilde{P}e^{i\omega t}$ в первом из уравнений (41). Это дает практически такие же (с точностью до пяти знаков после десятичной точки) амплитуды изгибных колебаний $\tilde{w}(a)$ свободного конца стержня, что и с учетом \tilde{P} .

Эксперимент 3. Рассматривается прежний стержень-полоса при нагружении его внешней поперечной силой $P = \tilde{P}e^{i\omega t}$ с амплитудой $\tilde{P} = 0.5$ Н/м, действующей в сечении $x = a$ (рис.5б). Стержень изготовлен из алюминиевого

сплава Д16АТ (механические характеристики данного сплава приведены в описании предыдущего эксперимента). Для определения амплитуд узловых перемещений конечно-элементной модели опорного элемента по-прежнему использовалась система разрешающих уравнений (54) при том, что амплитуда узловой силы $\tilde{P}b$ (b – ширина стержня) в векторе \mathbf{R} записывалась в направлении узлового перемещения \tilde{w}_{90} , а в направлении угла $\tilde{\theta}_{90}$ записывалась амплитуда узлового крутящего момента $\tilde{M}_{90} = \tilde{P}b(a+r)$, где r – расстояние по горизонтали от центра тяжести поперечного сечения швеллера (рис.4а) до начала оси Ox стержня. Остальные элементы вектора \mathbf{R} считались нулевыми.

В Таблице 2 представлены амплитуды перемещений \tilde{u}^* , $\tilde{w}^*(0)$ и угла закручивания $\tilde{\theta}^*$ опорного элемента, а также амплитуды прогибов $\tilde{w}(a)^+$, $\tilde{w}(a)^-$ свободного конца стержня, полученные соответственно с учетом и без учета перемещений отмеченного элемента при трех найденных ранее расчетных резонансных частотах $f_1 = 51.651$ Гц, $f_1^* = 111.554$ Гц, $f_2 = 323.675$ Гц.

Таблица 2.

f , Гц	\tilde{u}^* , мм	$\tilde{w}^*(0)$, мм	$\tilde{\theta}^*$, рад	$\tilde{w}(a)^+$, мм	$\tilde{w}(a)^-$, мм
51.651	$-2.340 \cdot 10^{-5}$	$6.810 \cdot 10^{-6}$	$4.679 \cdot 10^{-7}$	7.409	7.335
111.554	-0.0019	$5.549 \cdot 10^{-4}$	$3.853 \cdot 10^{-5}$	-0.007	-0.003
323.675	$-3.503 \cdot 10^{-5}$	$1.019 \cdot 10^{-5}$	$7.005 \cdot 10^{-7}$	-0.165	-0.187

Из Таблицы 2 видно, что наибольшие по модулю значения \tilde{u}^* , $\tilde{w}^*(0)$, $\tilde{\theta}^*$ получаются, как и в предыдущем вычислительном эксперименте, при частоте $f = f_1^* = 111.554$ Гц, соответствующей низшей (крутильной) форме колебаний швеллера. Однако амплитуды прогибов $\tilde{w}(a)^+$ и $\tilde{w}(a)^-$ свободного конца стержня получаются при этом совершенно незначительными, поскольку данная частота для стержня не является резонансной. Интересно отметить, что значения $\tilde{w}(a)^+$ и $\tilde{w}(a)^-$, полученные соответственно с учетом и без учета величин \tilde{u}^* , $\tilde{w}^*(0)$, $\tilde{\theta}^*$ при колебаниях стержня на собственных на частотах $f_1 = 51.651$ Гц и $f_2 = 323.675$ Гц, являются весьма близкими между собою, а при частоте $f_1^* = 111.554$ Гц величины $\tilde{w}(a)^+$ и $\tilde{w}(a)^-$ являются настолько незначительными, что можно говорить об их практическом отсутствии.

На рис.9,10 представлены амплитуды нормальных и касательных напряжений в закрепленной и незакрепленной частях стержня при резонансных колебаниях его соответственно на частотах $f_1 = 51.651$ Гц и $f_2 = 323.675$ Гц, полученные от внешней поперечной силы $P = \tilde{P}e^{i\omega t}$ в сечении $x = a$ стержня с учетом представленных в Таблице 2 амплитуд перемещений \tilde{u}^* , $\tilde{w}^*(0)$ и угла $\tilde{\theta}^*$. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что амплитуды отмеченных напряжений при частоте $f_1 = 51.651$ Гц, полученные без учета перемещений опорного элемента, практически совпадают с теми, что найдены с учетом данных перемещений, а при частоте $f_2 = 323.675$ Гц – приблизительно

на 12% выше их. Что касается напряжений, полученных при вынужденных колебаниях стержня на низшей собственной частоте швеллера $f_1^* = 111.554$ Гц, то они в обоих случаях оказались настолько низкими (примерно на два порядка ниже тех, которые получились при частотах f_1 и f_2), что их можно не принимать во внимание.

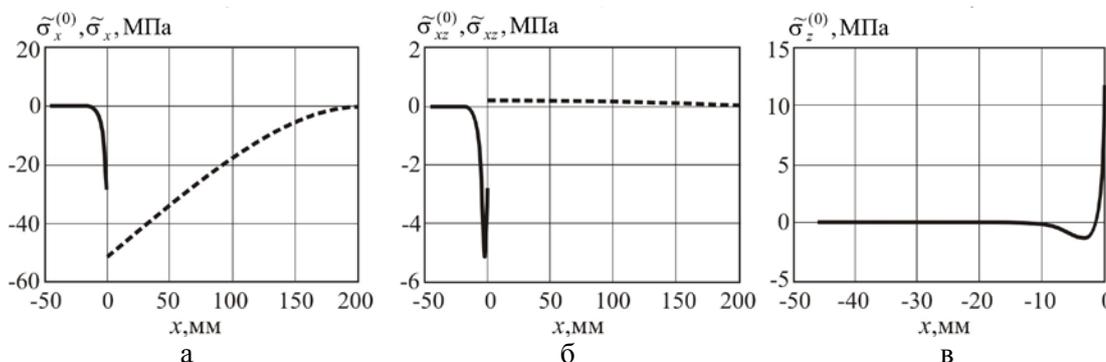


Рис.9. Амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}(x, z = t/2)$, $\tilde{\sigma}_x(x, z = t/2)$ (а), касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}(x, z = 0)$, $\tilde{\sigma}_{xz}(x)$ (б) и напряжений поперечного обжатия $\tilde{\sigma}_z^{(0)}(x, z = 0)$ (в) при частоте $f_1 = 51.651$ Гц: сплошные линии – $\tilde{\sigma}_x^{(0)}(x, z = t/2)$, $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}(x, z = 0)$, $\tilde{\sigma}_z^{(0)}(x, z = 0)$; пунктирные линии – $\tilde{\sigma}_x(x, z = t/2)$, $\tilde{\sigma}_{xz}(x)$.

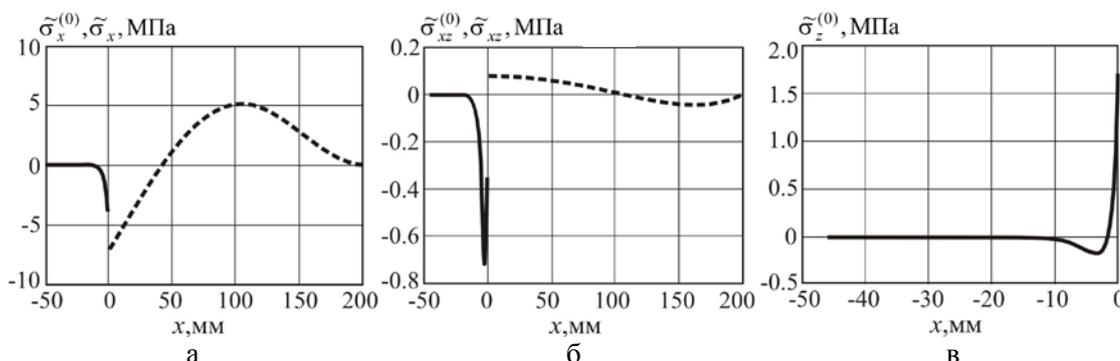


Рис.10. Амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}(x, z = t/2)$, $\tilde{\sigma}_x(x, z = t/2)$ (а), касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}(x, z = 0)$, $\tilde{\sigma}_{xz}(x)$ (б) и напряжений поперечного обжатия $\tilde{\sigma}_z^{(0)}(x, z = 0)$ (в) при частоте $f_2 = 323.675$ Гц: сплошные линии – $\tilde{\sigma}_x^{(0)}(x, z = t/2)$, $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}(x, z = 0)$, $\tilde{\sigma}_z^{(0)}(x, z = 0)$; пунктирные линии – $\tilde{\sigma}_x(x, z = t/2)$, $\tilde{\sigma}_{xz}(x)$.

Из рис.9,10 видно, что при вынужденных колебаниях стержня на частотах f_1 и f_2 амплитуды напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$, $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ и $\tilde{\sigma}_z^{(0)}$ вблизи сечения $x = 0$ закрепленной части стержня имеют снова (так же, как и при действии осевой силы на торце) ярко выраженную локализацию, а по мере удаления от данного сечения становятся практически нулевыми. При переходе через границу от незакрепленной части стержня к участку закрепления конечной длины l

наблюдается существенная трансформация нормальных и касательных напряжений (рис.9а,б,10а,б). Причем, максимальные по модулю значения амплитуд касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ в закрепленной части стержня при резонансных колебаниях на частоте $f_1 = 51.651$ Гц (рис.9б) многократно (почти в 30 раз) превышают аналогичные амплитуды $\tilde{\sigma}_{xz}$, полученные в его незакрепленной части.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием инструментально-аппаратных средств фиксации амплитуд виброускорений разработана методика экспериментального исследования вынужденных изгибных колебаний тонкостенного элемента конструкции в виде стержня-полосы с участком закрепления конечной длины на одной из лицевых поверхностей при осевом нагружении гармонической силой, приложенной к торцевому сечению закрепленного участка. Построена уточненная трансформационная модель деформирования отмеченного участка стержня на основе уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко с учетом деформаций поперечного обжатия при заданных перемещениях u^* , w^* на поверхности $z = -t/2$, обусловленных податливостью опорного элемента. Для описания процесса деформирования незакрепленной части стержня использована классическая модель Кирхгофа-Лява. Сформулированы кинематические условия сопряжения закрепленной и незакрепленной частей стержня. На основе вариационного уравнения Гамильтона-Остроградского с использованием отмеченных условий получены уравнения движения незакрепленной и закрепленной частей стержня, а также граничные условия к ним и силовые условия сопряжения отмеченных частей стержня. Построено решение задачи о вынужденных колебаниях стержня с учетом заданных перемещений u^* , w^* опорного элемента (швеллера №10) при действии осевой гармонической силы на торце закрепленного участка, а также внешней поперечной силы, приложенной на свободном конце незакрепленного участка. На основе проведенных вычислительных экспериментов показано, что в первом случае НДС закрепленной и незакрепленной частей стержня колебания незакрепленной части стержня практически полностью определяется заданными перемещениями u^* , w^* опорного элемента, а втором – почти не зависит от них.

Полученные в статье результаты, связанные с исследованием процесса деформирования стержня-полосы, имеющего участок закрепления конечной длины и находящегося в условиях вибрационного нагружения, следует рассматривать как методологию постановки соответствующих задач механики с учетом деформаций поперечного обжатия данного участка и заданных перемещений u^* , w^* опорного элемента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басов К.А. *ANSYS в примерах и задачах*. – М.: Компьютер пресс, 2002. – 224 с.
2. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. *ANSYS для инженеров: Справ. пособие*. – М.: Машиностроение, 2004. – 512 с..
3. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек*. – М.: Наука, 1974. – 448 с.

4. Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания.* – М.: Наука, 1987. – 360 с.
5. Reddy J.N. *A simple higher-order theory for laminated composite plates* // Journal of Applied Mechanics. – 1984. – Vol.51. – No.4. – Pp.745-752.
6. Librescu L. *Refined geometrically nonlinear theories of anisotropic laminated shells* // Quarterly of Applied Mathematics. – 1987. – Vol.45. – No.1. – Pp.1-22.
7. Schmidt R., Reddy J.N. *A refined small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic shells* // Journal of Applied Mechanics. – 1988. – Vol.55. – No.3. – Pp.611-617.
8. Librescu L., Schmidt R. *Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations* // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 1988. – Vol.55. – No.3. – Pp.217-229.
9. Reddy J.N. *A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness* // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 1990. – Vol.25. – No.6. – Pp.677-686.
10. Librescu L., Schmidt R. *Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions* // The International Journal of Engineering Science. – 1991. – Vol.29. – No.6. – Pp.669-683.
11. Basar Y., Ding Y., Schultz R. *Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations* // International Journal of Solids and Structures. – 1993. – Vol.30. – Iss.19. – Pp.2611-2638.
12. Gruttmann F., Wagner W. *A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2005. – Vol.37. – Iss.39. – Pp.4279-4300.
13. Gruttmann F., Wagner W. *Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element* // Computational Mechanics. – 2006. – Vol.37. – No.6. – Pp.479-497.
14. Algazin S.D., Selivanov I.A. *Natural vibration of a rectangular plate with mixed boundary conditions* // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2021. – Vol.62. – No.2. – Pp.238-244.
15. Algarray A.F.A., Jun H., Mahdi I.-E.M. *Effects of End Conditions of Cross-Ply Laminated Composite Beams on Their Dimensionless Natural Frequencies* // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2017. – Vol.58. – No.6. – Pp.1108-1114.
16. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М. *Математическое моделирование распространения вибраций в тонкостенных каркасированных конструкциях. 1. Основные соотношения и решение характерных задач* // Проблемы прочности и пластичности. – 2022. – Т.84. – №2. – С.207-224.
17. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М. *Математическое моделирование распространения вибраций в тонкостенных каркасированных конструкциях. 2. Конечно-элементные модели и численные эксперименты* // Проблемы прочности и пластичности. – 2022. – Т.84. – №3. – С.311-330.
18. Paimushin V.N., Shishkin V.M., Firsov V.A., Gazizullin R.K. *Transforming Deformation Model of Flat Beams with Finite Length Fastening Areas Located on One of the Front-Face Surfaces* // Advanced Structured Materials [this link is disabled: Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading.](#) – 2023. – Vol.186. – Pp.185-200.

19. Paimushin V.N., Shishkin V.M. *Deformation of thin-walled Structural Elements Having Fixed Areas of Finite Dimensions on the Boundary Front Surfaces* // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2023. – Vol.64. – No.2. – Pp.308-324.
20. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K. *Vibration Transmission in Thin-Wall Framed Structures* // Russian Aeronautics. – 2022. – Vol.65. – No.3. – Pp.490-497.
21. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin, R.K. *Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments* // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2023. – Vol.103. – No.11. – Pp.1-32.
22. Паймушин В.Н., Шишкин В.М., Газизуллин Р.К., Нуриев А.Н. *Исследование прохождения вибраций через закрепленный участок удлиненной пластины при действии осевой силы на торце* // Проблемы прочности и пластичности. – 2023. – Т.84. – №3. – С.356-374.
23. Паймушин В.Н., Шишкин В.М. *Уточненное исследование вынужденных изгибных колебаний стержня-полосы при торцевом нагружении участка закрепления конечной длины на одной из лицевых поверхностей* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т.29. – №3. – С.297-319.
24. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N. *Theoretical-Experimental Method for Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. 2. Aerodynamic Component of Damping* // Mechanics of Composite Materials. – 2014. – Vol.50. – No.3. – Pp.267-278.
25. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I., Shishkin V.M. *Accounting for the Frequency-Dependent Dynamic Elastic Modulus of Duralumin in Deformation Problems* // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2017. – Vol.58. – No.3. – Pp.517-528.
26. Цейтлин А.И. *Об учете внутреннего трения в нормативных документах по динамическому расчету сооружений* // Строительная механика и расчет сооружений. – 1981. – №4. – С.33-38.
27. Сорокин Е.С. *К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем.* – М.: Госстройиздат, 1960. – 129 с.
28. Василенко Н.В. *Учет несовершенной упругости материала при механических колебаниях методом комплексных модулей* / В сборнике «Рассеяние энергии при колебаниях механических систем». – Киев: Наукова думка, 1974. – С.5-12.
29. Рикардс Р.Б., Барканов Е.Н. *Определение динамических характеристик вибропоглощающих покрытий методом конечных элементов* // Механика композитных материалов. – 1991. – №5. – С.823-830.
30. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I., Egorov A.G., Kayumov R.A. *Theoretical-Experimental Method For Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. 3. Identification of the Characteristics of Internal Damping* // Mechanics of Composite Materials. – 2014. – Vol.50. – No.5. – Pp.633-646.
31. Бате К., Вильсон Е. *Численные методы анализа и метод конечных элементов.* – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
32. Клаф Р., Пензен Дж. *Динамика сооружений.* – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.

REFERENCES

1. Basov K.A. *ANSYS v primerakh i zadachakh [ANSYS in examples and tasks]*. Moskva, Komp'yuter press, 2002, 224 p.
2. Chigarev A.V., Kravchuk A.S., Smalyuk A.F. *ANSYS dlya inzhenerov: spravochnoe posobie [ANSYS for Engineers: Reference allowance]*. Moskva, Mashinostroenie, 2004, 512 p.
3. Ambarzumyan S.A. *Obshhaya teoriya anizotropnykh obolochek [General theory of anisotropic shells]*. Moskva, Nauka, 1974, 448 p.
4. Ambarzumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost', ustojchivost' i kolebaniya [Theory of anisotropic plates. Strength, Stability and Vibration]*. Moskva, Nauka, 1987, 360 p.
5. Reddy J.N. *A simple higher-order theory for laminated composite plate*. Journal of Applied Mechanics, 1984, Vol.51, No.4, Pp.745-752.
6. Librescu L. *Refined geometrically nonlinear theories of anisotropic laminated shells*. Quarterly of Applied Mathematics, 1987, Vol.45, No.1, Pp.1-22.
7. Schmidt R., Reddy J.N. *A refined small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic shells*. Journal of Applied Mechanics, 1988, Vol.55, No.3, Pp.611-617.
8. Librescu L., Schmidt R. *Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1988, Vol.55, No.3, Pp.217-229.
9. Reddy J.N. *A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1990, Vol.25, No.6, Pp.677-686.
10. Librescu L., Schmidt R. *Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions*. The International Journal of Engineering Science, 1991, Vol.29, No.6, Pp.669-683.
11. Basar Y., Ding Y., Schultz R. *Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations*. International Journal of Solids and Structures, 1993, Vol.30, Iss.19, Pp.2611-2638.
12. Gruttmann F., Wagner W. *A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, Vol.37, Iss.39, Pp.4279-4300.
13. Gruttmann F., Wagner W. *Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element*. Computational Mechanics, 2006, Vol.37, No.6, Pp.479-497.
14. Algazin S.D., Selivanov I.A. *Natural vibration of a rectangular plate with mixed boundary conditions*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2021, Vol.62, No.2, Pp.238-244.
15. Algarray A.F.A., Jun H., Mahdi I.-E.M. *Effects of End Conditions of Cross-Ply Laminated Composite Beams on Their Dimensionless Natural Frequencies*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2017, Vol.58, No.6, Pp.1108-1114.
16. Pajmushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. *Matematicheskoe modelirovanie rasprostraneniya vibratsij v tonkostennykh karkasirovannykh konstruktivnykh. 1. Osnovnye sootnosheniya i reshenie kharakternykh zadach [Mathematical modeling of vibration propagation in thin-walled framed structures. 1. The main relations and the solution of characteristic problems]*. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2022, Vol.84, No.2, Pp.207-224.
17. Pajmushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. *Matematicheskoe modelirovanie rasprostraneniya vibratsij v tonkostennykh karkasirovannykh konstruktivnykh*.

2. *Konechno-ehlementnye modeli i chislennye ehksperimenty [Mathematical modeling of vibration propagation in thin-walled framed structures. 2. Finite element models and numerical experiments]*. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2022, Vol.84, No.3, Pp.311-330.
18. Paimushin V.N., Shishkin V.M., Firsov V.A., Gazizullin R.K. *Transforming Deformation Model of Flat Beams with Finite Length Fastening Areas Located on One of the Front-Face Surfaces*. Advanced Structured Materials this link is disabled: Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading, 2023, Vol.186, Pp.185-200.
 19. Paimushin V.N., Shishkin V.M. *Deformation of thin-walled Structural Elements Having Fixed Areas of Finite Dimensions on the Boundary Front Surfaces*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2023, Vol.64, No.2, Pp.308-324.
 20. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R. K. *Vibration Transmission in Thin-Wall Framed Structures*. Russian Aeronautics, 2022, Vol.65, No.3, Pp.490-497.
 21. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. Gazizullin, R.K. *Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2023, Vol.103, No.11, Pp.1-32.
 22. Pajmushin V.N., Shishkin V.M., Gazizullin R.K., Nuriev A.N. *Issledovanie prokhozheniya vibratsij cherez zakreplennyj uchastok udlinennoj plastiny pri dejstvii osevoj sily na tortse [Study of the passage of vibrations through a fixed section of an elongated plate under the action of an axial force at the end]*. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2023, Vol.84, No.3, Pp.356-374.
 23. Pajmushin V.N., Shishkin V.M. *Utochnennoe issledovanie vynuzhdennykh izgibnykh kolebanij sterzhnya-polosy pri tortsevom nagruzhenii uchastka zakrepleniya konechnoj dliny na odnoj iz litsevykh poverkhnostej [Refined study of forced bending vibrations of a rod-strip under end loading of the fastening area of finite length on one of the front surfaces]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2023, Vol.29, No.3, Pp.297-319.
 24. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N. *Theoretical-Experimental Method for Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. 2. Aerodynamic Component of Damping*. Mechanics of Composite Materials, 2014, Vol.50, No.3, Pp.267-278.
 25. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I., Shishkin V.M. *Accounting for the Frequency-Dependent Dynamic Elastic Modulus of Duralumin in Deformation Problems*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2017, Vol.58, No.3, Pp.517-528.
 26. Cejtlin A.I. *Ob uchete vnutrennego treniya v normativnykh dokumentakh po dinamicheskomu raschetu sooruzhenij [On accounting for internal friction in regulatory documents on the dynamic calculation of structures]*. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij, 1981, No.4, Pp.33-38.
 27. Sorokin E.S. *K teorii vnutrennego treniya pri kolebaniyakh uprugikh sistem [On the theory of internal friction during vibrations of elastic systems]*. Moskva, Gosstrojizdat, 1960, 129 p.
 28. Vasilenko N.V. *Uchet nesovershennoj uprugosti materiala pri mekhanicheskikh kolebaniyakh metodom kompleksnykh modulej [Taking into account the imperfect*

- elasticity of the material during mechanical vibrations by the method of complex modules]. V sbornike "Rasseyanie ehnergii pri kolebaniyakh mekhanicheskikh sistem", Kiev, Naukova dumka, 1974, Pp.5-12.*
29. Rikards R.B., Barkanov E.N. *Opređenje dinamičeskikh kharakteristik vibropogloshhayushhikh pokrytij metodom konechnykh ehlementov [Determination of the dynamic characteristics of vibration-absorbing coatings by the finite element method]. Mekhanika kompozitnykh materialov, 1991, No.5, Pp.823-830.*
 30. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Egorov A.G., Kayumov R.A. *Theoretical-Experimental Method For Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. 3. Identification of the Characteristics of Internal Damping. Mechanics of Composite Materials, 2014, Vol.50, No.5, Pp.633-646.*
 31. Bate K., Vil'son E. *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh ehlementov [Numerical methods of analysis and the finite element method]. Moskva, Strojizdat, 1982, 447 p.*
 32. Klaf R., Penzen Dzh. *Dinamika sooruzhenij [Dynamics of structures]. Moskva, Strojizdat, 1979, 320 p.*

Поступила в редакцию 25 января 2024 года.

Сведения об авторах:

Паймушин Виталий Николаевич – д.ф.-м.н., проф., профессор Кафедры «Прочность конструкций», ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», г. Казань, Россия; e-mail: vpajmushin@mail.ru

Шишкин Виктор Михайлович – д.т.н., проф., профессор Кафедры «Механика и инженерная графика», ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров, Россия; e-mail: tism1@rambler.ru