

УДК 539.4
EDN JWPHLX (<https://elibrary.ru/jwphlx>)
DOI 10.33113/mkmk.ras.2024.30.04.03



ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТА ПЕРЕКРЕСТНОГО УПРОЧНЕНИЯ В РАМКАХ СТРУКТУРНО-ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ*

Мовчан А.А.¹, Рихмаер А.М.²

¹ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

²Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Для сплавов с памятью формы характерен эффект перекрестного упрочнения, сводящийся к тому, что упрочнить образец из этого материала в отношении деформирования в режиме мартенситной неупругости (структурный механизм, не меняющий тип кристаллической ячейки, а лишь увеличивающий степень ориентированности содержащихся в представительном объеме материала низкосимметричных мартенситных кристаллических ячеек) можно путем прямого термоупругого мартенситного превращения под действием постоянного напряжения, при котором тип кристаллической ячейки меняется от высокосимметричной аустенитной до низкосимметричной мартенситной, а степень ориентированности получающихся мартенситных ячеек представительного объема фиксирована. При этом, согласно экспериментальным данным, напряжение начала действия структурного механизма на этапе деформирования в режиме мартенситной неупругости может существенно превышать то напряжение, под действием которого происходил процесс накопления деформаций на предварительном этапе полного прямого превращения. Разницу между этими двумя напряжениями можно считать количественной характеристикой эффекта перекрестного упрочнения.

Работа посвящена выяснению вопроса о том, какие свойства процессов, происходящих на различных структурных уровнях в сплавах с памятью формы, обеспечивают наличие эффекта перекрестного упрочнения. Для решения этой проблемы используется структурно-имитационная модель деформирования сплавов с памятью формы, непосредственно апеллирующая к процессам зарождения и развития мартенситных мезоэлементов при прямом термоупругом фазовом превращении и их деградации и исчезновении при обратном превращении, их доориентации или переориентации при структурном переходе. С помощью этой модели ранее аналогичные проблемы были решены для эффектов накопления деформаций прямого превращения, явления ориентированного превращения, монотонной и реверсивной памяти формы, эффекта мартенситной неупругости.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; структурно-имитационная модель; перекрестное упрочнение

DESCRIPTION OF THE CROSS-HARDENING EFFECT IN THE FRAMEWORK OF A STRUCTURAL SIMULATION MODEL OF SHAPE MEMORY ALLOYS DEFORMATION

* Работа выполнена в рамках государственного задания ИППРИМ РАН, номер гос. регистрации темы №1023032300192-8-2.3.2.

ABSTRACT

Shape memory alloys are characterized by the effect of cross-hardening, which boils down to the fact that a sample made of this material can be hardened with respect to deformation in the martensitic inelasticity mode (a structural mechanism that does not change the type of crystal cell, but only increases the degree of orientation of low-symmetric martensitic crystal cells contained in a representative volume of the material) by direct thermo-elastic martensitic transformation under the action of constant stress, in which the type of crystal cell changes from a highly symmetric austenitic to a low-symmetric martensitic crystal cell, but the degree of orientation of the martensitic crystal remains constant. At the same time, according to experimental data, the stress of the onset of structural straining at the deformation stage in the martensitic inelasticity mode can significantly exceed the stress at which the deformation accumulation process took place at the preliminary stage of a complete direct transition. The difference between these two stresses can be considered a quantitative characteristic of the cross-hardening effect.

The work is devoted to clarifying the question of what properties of processes occurring at various structural levels in shape memory alloys ensure the existence of the phenomenon of cross-hardening? To solve this problem, a structural simulation model of shape memory alloys straining is used, which directly appeals to the processes of martensitic mesoelements insipiation and development during direct thermo-elastic phase transformation and their degradation and disappearance during reverse phase transformation, their reorientation during structural transition. Using this model, similar problems have previously been solved to study the effects of direct transformation strain accumulation, the phenomenon of oriented transformation, monotonic and reversible shape memory, as well as the effect of martensitic inelasticity.

Keywords: shape memory alloys; structural simulation model; cross-hardening effect

ВВЕДЕНИЕ

Известны два основных механизма неупругого деформирования сплавов с памятью формы (СПФ) [1-4] – фазовый, связанный с изменением типа кристаллической решетки [5-11], и структурный [12-15], связанный с изменением степени ориентированности низкосимметричных кристаллических ячеек низкотемпературной фазы, входящих в представительный объем СПФ. Эти механизмы принципиально различаются (для фазового не характерен эффект деформационного упрочнения, а структурный явно демонстрирует этот эффект) [16]. При этом наблюдается взаимное влияние этих механизмов друг на друга [17-20]. Одним из проявлений этого влияния является эффект перекрестного упрочнения, экспериментально исследованный на образцах из никелида титана в [21] для случая одноосного растяжения и в [22] для случая одноосного сжатия. Эффект сводится к тому, что накопление деформаций полного прямого превращения, происходящего под действием постоянного напряжения σ_0 приводит к упрочнению СПФ для последующего нагружения в режиме мартенситной неупругости (структурный механизм). Качественно этот эффект сводится к тому, что диаграммы мартенситной неупругости образцов из СПФ после их предварительного полного прямого превращения под действием

напряжения σ_0 демонстрируют существенно более высокое упрочнение, чем диаграмма мартенситной неупругости исходного материала, причем степень этого упрочнения тем выше, чем выше напряжение σ_0 . При этом напряжение начала неупругого деформирования при следующем за прямым превращением нагружении в режиме мартенситной неупругости σ^* может существенно превосходить величину σ_0

$$\sigma^* > \sigma_0 \quad (1)$$

к чему и сводится количественно эффект перекрестного упрочнения.

В [23] предложена структурно-имитационная модель деформирования СПФ по фазовому механизму, в рамках которой удалось описать эффекты накопления деформаций прямого превращения, ориентированного превращения [2,24-27], монотонной и реверсивной памяти формы [11,28-35]. В [36] модель распространена на случай описания структурного механизма деформирования СПФ, в частности получено описание диаграммы мартенситной неупругости (графика зависимости напряжений от структурных деформаций при изотермическом монотонном пропорциональном нагружении из состояния полностью сдвойникового мартенсита).

Данная работа посвящена описанию в рамках структурно-имитационной модели эффекта перекрестного упрочнения. В частности, необходимо было выяснить, какой из двух, рассмотренных в [36], вариантов определения собственной структурной деформации мартенситного мезоэлемента позволяет добиться выполнения неравенства (1).

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТРУКТУРНО-ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПФ

Предполагается [23], что процесс полного прямого превращения в СПФ состоит из большого числа N дискретных шагов, на каждом из которых в рассматриваемом представительном объеме СПФ зарождается один мартенситный мезоэлемент с начальным малым относительным объемом q_0 . За каждый шаг процесса относительный объем каждого ранее зародившегося мезоэлемента увеличивается в соответствии с множителем $(1+\lambda)$, где λ – малое положительное число. В результате образуется система N мартенситных мезоэлементов с относительными размерами

$$q_i = q_0 (1+\lambda)^i, \quad i = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (2)$$

Суммируя все слагаемые (2) и приравнявая результат 1, получаем

$$q_0/\lambda = (C-1)^{-1}, \quad C = (1+\lambda)^N. \quad (3)$$

Величина C считается постоянной материала [23].

Если мезоэлемент образовался при прямом превращении в отсутствие напряжений, то он является полностью сдвойниковым, т.е. его собственная деформация формоизменения равна нулю. Если в момент образования мезоэлемента действовало напряжение σ , то этот мезоэлемент обладает собственной деформацией формоизменения ε , которая не меняется в процессе развития мезоэлемента и равна

$$\varepsilon = \rho_{D1} \Phi_1(\sigma). \quad (4)$$

Здесь ρ_{D1} и $\varphi_1(\sigma)$ – материальный параметр и материальная функция, входящие в уравнение диаграммы прямого превращения

$$E^{ph} = \rho_{D1}\varphi_1(\sigma). \quad (5)$$

В (5) σ – постоянное напряжение, действующее при прямом превращении, E^{ph} – осредненная деформация представительного объема, накопленная при полном прямом превращении и равная сумме вкладов деформаций всех мезоэлементов (2). Каждый вклад равен $q\varepsilon$, где q – относительный объем мезоэлемента, ε – его собственная деформация.

Эффекты мартенситной неупругости [12-15,37] связаны с процессами раздвойникового (доориентации, переориентации) мартенситных элементов. В рамках структурно-имитационной модели сформулированы следующие предположения [36], касающиеся этих процессов.

1. Предполагается, что раздвойникование (доориентация, переориентация) мартенситного элемента может произойти лишь в том случае, когда действующее в мезоэлементе напряжение превосходит значение напряжения, которое действовало в данном мезоэлементе за всю историю существования этого мезоэлемента, предшествующую рассматриваемому моменту.

2. Предполагается, что напряжение, необходимое для раздвойникового (доориентации, переориентации) мезоэлемента является возрастающей функцией его относительного объема: $\sigma > \sigma^* = f(q/q_0)$.

Здесь f – монотонно возрастающая непрерывная функция, удовлетворяющая краевым условиям $f(1) = 0$, $f(C) = \sigma_N$, σ_N – последнее (наибольшее) из совокупности значений напряжения

$$\sigma_k = f\left((1+\lambda)^k\right), \quad k = 0, 1, \dots, (N-1), N \quad (6)$$

такое, что при действии этого напряжения может произойти раздвойникование всех мезоэлементов из совокупности (2).

3. Третье из условий структурно-имитационной модели, связанное с описанием эффектов мартенситной неупругости, может быть принято в двух вариантах [36]:

а. Пусть для данного СПФ точная верхняя грань всех значений фазовых деформаций формоизменения ρ_{D1} , которые могут быть получены путем прямого фазового превращения под действием постоянного напряжения, равна точной верхней грани деформаций ρ_{D2} , которые могут быть получены путем монотонного нагружения СПФ в режиме мартенситной неупругости

$$\rho_{D1} = \rho_{D2}. \quad (7)$$

В этом случае принимается гипотеза о том, что собственная деформация мезоэлемента в результате его раздвойникового (доориентации, переориентации) зависит только от действующего напряжения, причем по формуле (4). В рамках сделанных предположений в [36] установлено, что уравнение диаграммы мартенситной неупругости СПФ имеет вид

$$E^s(\sigma) = \rho_{D1}\varphi_1(\sigma)\xi(\sigma), \quad (8)$$

$$\xi(\sigma) = \begin{cases} (f^{-1}(\sigma) - 1)/(C - 1) & \text{при } 0 \leq \sigma \leq \sigma_N \\ 1 & \text{при } \sigma \geq \sigma_N \end{cases} \quad (9)$$

Для функции $\xi(\sigma)$ при $0 \leq \sigma \leq \sigma_N$ предложено выражение

$$\xi(\sigma) = \sin^m \left(\frac{\pi \sigma}{2 \sigma_N} \right), \quad (10)$$

где для СПФ с диаграммой мартенситной неупругости, не обладающей аналогом площадки текучести, $m > 0$ является постоянной величиной, а для СПФ, диаграмма мартенситной неупругости которых имеет такую площадку – m является кусочно-постоянной функцией σ , имеющей для напряжения, соответствующего площадке текучести, разрыв первого рода

$$m = \begin{cases} m_1 & \text{при } \sigma < \sigma_s \\ m_2 & \text{при } \sigma > \sigma_s \end{cases}$$

Здесь σ_s – аналог предела текучести на диаграмме мартенситной неупругости, $m_1 > m_2$ – постоянные величины.

б. Для СПФ, для которых равенство (7) не выполняется, а справедливо неравенство $\rho_{D1} > \rho_{D2}$, в [36] высказано предположение о том, что собственная деформация, связанная с раздвойникованием (доориентацией, переориентацией) мартенситного мезоэлемента, зависит не только от действующих напряжений (6), но монотонно убывает с ростом относительного размера q мезоэлемента. Если эта зависимость является линейной, то собственная деформация мезоэлемента номер $i < k$ из последовательности (2) при приложении напряжения σ_k (6) будет равна [36]

$$\varepsilon_2(i) = \left[\rho_{D1} - \frac{2(\rho_{D1} - \rho_{D2})(C^{i/N} - 1)}{C - 1} \right] \varphi_1(\sigma_k), \quad i = 0, 1, \dots, (k-1). \quad (11)$$

Уравнение диаграммы мартенситной неупругости, получаемое путем суммирования собственных деформаций (11) для всех мезоэлементов, испытавших при $\sigma = \sigma_k$ раздвойникование, умноженных на их относительный объем, имеет вид [36]

$$E^s(\sigma) = \varphi_1(\sigma) [\rho_{D1} - (\rho_{D1} - \rho_{D2}) \xi(\sigma)] \xi(\sigma). \quad (12)$$

2. ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТА ПЕРЕКРЕСТНОГО УПРОЧНЕНИЯ В РАМКАХ ВАРИАНТА 3а ПОЛОЖЕНИЯ 3 ПРЕДЫДУЩЕГО РАЗДЕЛА

Пусть произошло полное прямое превращение под действием напряжения $\sigma_0 = \text{const}$. В результате образовалась система мезоэлементов (2), каждый из которых имеет собственную деформацию (4). Суммарная осредненная деформация в конце процесса прямого превращения также определяется по формуле (4).

Если после окончания полного прямого превращения действующее напряжение σ меняется произвольным образом, но, не превышает величину σ_0 , которая является максимальным значением напряжения, испытанным каждым мезоэлементом, то, в соответствии с первым условием, сформулированным в предыдущем разделе, доориентация ни в одном мезоэлементе происходить не будет, т.е. собственная деформация каждого мезоэлемента, так же как

и осредненная деформация всего представительного объема меняться не будут, и останутся равными ε_0 .

Пусть теперь действующее в процессе нагружения в режиме мартенситной неупругости напряжение возросло до некоторого значения σ_k (6), такого, что

$$\sigma_N \geq \sigma_k > \sigma_0. \quad (13)$$

В этом случае, согласно положению 2 предыдущего раздела произойдет доориентация мартенситных мезоэлементов с относительными объемами $q_0(1+\lambda)^i$, $i=0,1,\dots,k-1$, причем собственная деформация каждого из этих мезоэлементов станет, согласно варианту 3а положения 3, равной

$$\varepsilon_i = \rho_{D1}\varphi_1(\sigma_k). \quad (14)$$

Для остальных мезоэлементов с номерами $i=k, k+1, \dots, N-1$ доориентация не имеет места, и их собственная деформация останется прежней, т.е. будет равна $\rho_{D1}\varphi_1(\sigma_0)$. В результате осредненная деформация представительного объема в рассматриваемый момент определяется формулой

$$E(\sigma_k) = \rho_{D1}\varphi_1(\sigma_k) \sum_{i=0}^{k-1} (1+\lambda)^i q_0 + \rho_{D1}\varphi_1(\sigma_0) \sum_{i=k}^{N-1} (1+\lambda)^i q_0. \quad (15)$$

Проводя в (15) суммирование, с учетом (3), (6), (8) и (9) можно получить

$$E(\sigma) = \rho_{D1}\varphi_1(\sigma)\xi(\sigma) + \rho_{D1}\varphi_1(\sigma_0)[1-\xi(\sigma)], \quad \sigma_N \geq \sigma \geq \sigma_0. \quad (16)$$

Если $\sigma \leq \sigma_0$, то $\varepsilon(\sigma) = \rho_{D1}\varphi_1(\sigma_0)$. Если $\sigma \geq \sigma_N$, то $\varepsilon(\sigma) = \rho_{D1}\varphi_1(\sigma)$. Здесь и далее нижний индекс k для «текущего» значения напряжения опускается.

Для диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости справедливы в рамках рассматриваемого варианта модели соотношения (5) и (8). Следовательно, для функции $E(\sigma)$ (16) справедливы равенства

$$\begin{aligned} E(\sigma) &= E^{ph}(\sigma) - \rho_{D1}[\varphi_1(\sigma) - \varphi_1(\sigma_0)][1 - \xi(\sigma)] = \\ &= E^{st}(\sigma) + \rho_{D1}\varphi_1(\sigma_0)[1 - \xi(\sigma)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно (17) для $\sigma_0 < \sigma < \sigma_N$ диаграмма перекрестного упрочнения расположена ниже вдоль оси деформаций, чем диаграмма прямого превращения, но выше, чем диаграмма мартенситной неупругости, что соответствует экспериментальным данным [21,22]. При достижении величиной σ значения σ_N диаграмма перекрестного упрочнения выходит одновременно, как на диаграмму мартенситной неупругости, так и на диаграмму прямого превращения, которые, начиная со значения $\sigma = \sigma_N$ в рамках рассматриваемой в данном пункте модели совпадают. В случае использования для функции $\xi(\sigma)$ выражения (10), из (16) получается

$$E(\sigma) = \rho_{D1} \left\{ \varphi_1(\sigma_0) + [\varphi_1(\sigma) - \varphi_1(\sigma_0)] \sin^m \left(\frac{\pi \sigma}{2 \sigma_N} \right) \right\}, \quad \sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_N. \quad (18)$$

Свойства полученных зависимостей графически иллюстрируются на рис.1,2. Графики построены для значений материальных функций и материальных параметров никелида титана марки ТН-1 [38]. Для описания диаграммы прямого превращения используется интегральная функция Гамма – распределения [39,40].

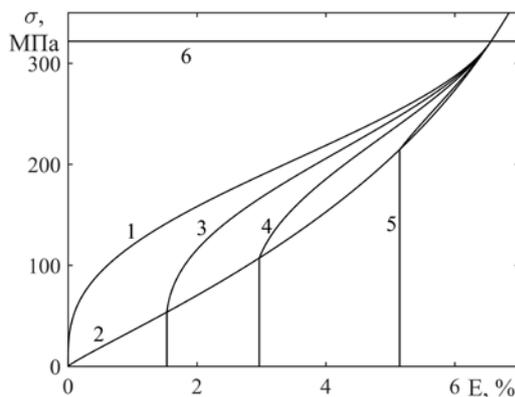


Рис.1.

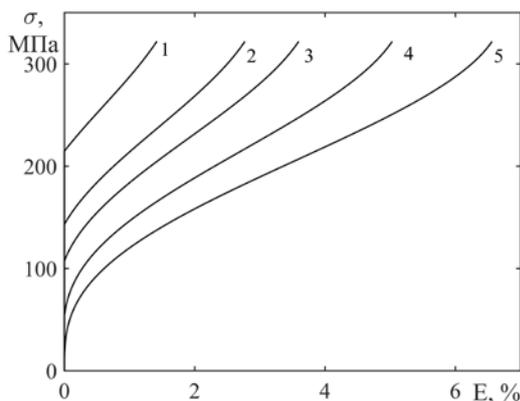


Рис.2.

$$\varphi_1(\sigma) = \Phi(\sigma/\sigma_{10}, \alpha), \quad \text{где } \Phi(x, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} \exp(-t) dt, \quad (19)$$

$\Gamma(\alpha)$ – γ -функция, $\rho_{D1} = 8,95\%$, $\sigma_{10} = 214,5$ МПа, $\alpha = 1,134$, $\sigma_N = 1,5\sigma_{10}$, $m = 2$. Линия 1 на рис.1 представляет собой график диаграммы мартенситной неупругости, соответствующий уравнению (8) с учетом (10). Линия 2 – это диаграмма прямого превращения, соответствующая уравнению (5) с учетом (19). Линии 3, 4 и 5 это диаграммы перекрестного упрочнения (18), соответствующие значениям напряжения первого этапа, равным, соответственно $\sigma_0 = 0,25\sigma_{10}$, $\sigma_0 = 0,5\sigma_{10}$ и $\sigma_0 = \sigma_{10}$. Горизонтальная линия 6 соответствует значению напряжения $\sigma = \sigma_N$, при котором все перечисленные выше линии объединяются в одну.

Чтобы продемонстрировать степень перекрестного упрочнения, на рис.2 показаны графики зависимости напряжений на втором этапе соответствующего опыта от параметра деформации, отсчитываемого для всех кривых от общего начала. Линия 1 соответствует $\sigma_0 = \sigma_{10}$, линия 2 – $\sigma_0 = 2\sigma_{10}/3$, линия 3 – $\sigma_0 = \sigma_{10}/2$, линия 4 – $\sigma_0 = \sigma_{10}/3$. Линия 5 соответствует исходной диаграмме мартенситной неупругости. Как видно, перекрестное упрочнение тем выше, чем больше напряжение σ_0 , при котором проводилось предварительное прямое превращение, как это наблюдается в экспериментах [21,22,41].

3. ОПИСАНИЕ ПЕРЕКРЕСТНОГО УПРОЧНЕНИЯ В РАМКАХ ВАРИАНТА 3b ПОЛОЖЕНИЯ 3 СТРУКТУРНО-ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

В опыте на перекрестное упрочнение в рамках рассмотренного в предыдущем пункте варианта модели, неупругое деформирование на втором этапе начинается сразу после того, как растущее напряжение превысит напряжение σ_0 , при котором производилось предварительное полное прямое превращение. Однако, согласно экспериментальным данным [21,22,41], неупругое деформирование в режиме мартенситной неупругости после прямого превращения под действием постоянного напряжения σ_0 начинается со значения напряжения $|\sigma^*| > |\sigma_0|$, причем разность $|\sigma^*| - |\sigma_0|$ может быть весьма существенной. Структурно-имитационная модель, в которой используется положение а пункта 3 этот эффект не описывает.

Получение уравнения диаграммы перекрестного упрочнения в рамках положения б пункта 3 модели отличается от процедуры, изложенной в разделе 2, тем, что после нагружении СПФ напряжением σ_k (6), (13) собственная деформация первых k мезоэлементов из последовательности (2) будет определяться более сложной, чем (14) формулой, а именно зависимостью (11).

Вклад в осредненную деформацию представительного объема такого мезоэлемента будет равен

$$E(i) = q_0 (1 + \lambda)^i \left[\rho_{D1} - \frac{2(\rho_{D1} - \rho_{D2})(C^{i/N} - 1)}{C - 1} \right] \varphi_1(\sigma_k), \quad (20)$$

$$i = 0, 1, \dots, (k-1).$$

Вклад всех мезоэлементов, в которых произошло раздвойникование, в осредненную деформацию представительного объема определяется путем суммирования выражений (20)

$$E_1(\sigma_k) = \sum_{i=0}^{k-1} E(i) = \varphi_1(\sigma_k) \left[\rho_{D1} - (\rho_{D1} - \rho_{D2}) \xi(\sigma_k) \right] \xi(\sigma_k).$$

Для остальных мезоэлементов с номерами $i = k, (k+1), \dots, (N-1)$ доориентация не имеет места, их собственная деформация останется прежней, а вклад в осредненную деформацию представительного объема будет равен $E_2(\sigma_k) = \rho_{D1} \varphi_1(\sigma_0) (1 - \xi(\sigma_k))$. В результате осредненная деформация представительного объема в рассматриваемый момент определяется формулой

$$E(\sigma) = \varphi_1(\sigma) \left[(\rho_{D1} - (\rho_{D1} - \rho_{D2}) \xi(\sigma)) \right] \xi(\sigma) + \rho_{D1} \varphi_1(\sigma_0) (1 - \xi(\sigma)). \quad (21)$$

Здесь и далее для сокращения записи индекс k у обозначения напряжений опускается. Соотношение (21) можно представить в виде

$$E(\sigma) = E^{ph}(\sigma) - \left\{ \rho_{D1} [\varphi_1(\sigma) - \varphi_1(\sigma_0)] [1 - \xi(\sigma)] + (\rho_{D1} - \rho_{D2}) \varphi_1(\sigma) \xi^2(\sigma) \right\} \quad (22)$$

или, с учетом (12) в форме

$$E(\sigma) = E^{st}(\sigma) + \rho_{D1} \varphi_1(\sigma_0) [1 - \xi(\sigma)]. \quad (23)$$

Поскольку $\sigma \geq \sigma_0$, $\varphi_1(\sigma)$ – монотонно-возрастающая функция, $0 \leq \xi(\sigma) \leq 1$, то из (22), (23) следует что для зависимости деформации от напряжения $E(\sigma)$ в опыте на перекрестное упрочнение при $\sigma \geq \sigma_0$ выполняется неравенство

$$E^{st}(\sigma) \leq E(\sigma) \leq E^{ph}(\sigma),$$

то есть диаграмма перекрестного упрочнения расположена между диаграммами прямого превращения и мартенситной неупругости, как это наблюдается в соответствующих экспериментах.

Если $\sigma \geq \sigma_N$ то в (21) следует положить $\xi(\sigma)=1$, в результате чего получается

$$E(\sigma) = \rho_{D2}\varphi_1(\sigma). \quad (24)$$

Таким образом, для $\sigma = \sigma_N$ диаграмма перекрестного упрочнения выходит на диаграмму мартенситной неупругости (24), и для $\sigma > \sigma_N$ совпадает с диаграммой мартенситной неупругости, что соответствует экспериментальным данным [21,22,41].

При $\sigma = \sigma_0 < \sigma_N$ деформация, согласно (21) равна

$$E(\sigma_0) = \varphi_1(\sigma_0) \left[\rho_{D1} - (\rho_{D1} - \rho_{D2}) \xi^2(\sigma_0) \right] < \rho_{D1}\varphi_1(\sigma_0).$$

Таким образом, график функции (21) не проходит через точку $(\sigma_0, \rho_{D1}\varphi_1(\sigma_0))$, в которой закончился процесс предварительного прямого превращения. Линию $E = \rho_{D1}\varphi(\sigma_0)$ он пересекает в точке, лежащей выше вдоль оси напряжений, при $\sigma = \sigma^* > \sigma_0$. Этот факт можно трактовать следующим образом. При нагружении в режиме мартенситной неупругости после полного прямого превращения под действием напряжения σ_0 неупругое деформирование начинается при напряжении $\sigma^* > \sigma_0$, а при нагружении от значения σ_0 до $\sigma = \sigma^*$ происходит только упругое деформирование, что и наблюдается в экспериментах [21,22,41]. Чтобы найти значение σ^* надо приравнять значение деформации, получаемое из правой части (21) для $\sigma = \sigma^*$ величине деформации прямого превращения при $\sigma = \sigma_0$, т.е. значению $\rho_{D1}\varphi_1(\sigma_0)$. Соответствующее напряжение σ^* можно найти путем численного решения трансцендентного уравнения

$$\varphi_1(\sigma^*) \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_{D2}}{\rho_{D1}} \right) \xi(\sigma^*) \right] = \varphi_1(\sigma_0) \quad (25)$$

в случае, если это решение σ^* уравнения (25) не превосходит значение σ_N : $\sigma^* \leq \sigma_N$, что равносильно, согласно (25) ограничению

$$\sigma_0 \leq \sigma_{0N} = \varphi_1^{-1} \left(\varphi_1(\sigma_N) \frac{\rho_{D2}}{\rho_{D1}} \right). \quad (26)$$

Величина σ_{0N} находится из уравнения $\rho_{D2}\varphi_1(\sigma_N) = \rho_{D1}\varphi_1(\sigma_{0N})$. Здесь введено обозначение φ_1^{-1} для функции, обратной φ_1 , которая существует, однозначна, непрерывна и монотонно возрастает, поскольку аналогичными свойствами обладает сама функция φ_1 . В силу монотонного возрастания функций φ_1 и φ_1^{-1} , а также неравенства $\rho_{D2} \leq \rho_{D1}$ из (26) следует, что $\sigma_{0N} \leq \sigma_N$. Согласно

(26) величина σ_{0N} не зависит от функции модели $\xi(\sigma)$ и при использовании формулы (10) не зависит ни от значения параметра m ни от того, зависит или не зависит эта величина от σ . В случае, если для описания диаграммы прямого превращения СПФ используется интегральная функция трехпараметрического распределения Вейбулла [39,40]: $E^{ph} = \rho_{D1} \left(1 - \exp\left(-(\sigma/\sigma_{10})^\alpha\right) \right)$, для величины σ_{0N} справедливо аналитическое выражение

$$\sigma_{0N} = \sigma_{10} \left\{ -\ln \left[1 - \frac{\rho_{D2}}{\rho_{D1}} \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{\sigma_N}{\sigma_{10}} \right)^\alpha \right) \right) \right] \right\}^{1/\alpha}. \quad (27)$$

Если же

$$\sigma_0 > \sigma_{0N}, \quad (28)$$

то величина σ^* находится из уравнения $\rho_{D2}\varphi_1(\sigma^*) = \rho_{D1}\varphi_1(\sigma_0)$, т.е.

$$\sigma^* = \varphi_1^{-1} \left(\frac{\rho_{D1}\varphi_1(\sigma_0)}{\rho_{D2}} \right) > \sigma_N \quad (29)$$

и σ^* от функции $\xi(\sigma)$ не зависит. Значение σ^* может быть найдено по формуле (27), в правую часть которой вместо σ_N следует подставить σ_0 . Если для аппроксимации диаграммы прямого превращения используется интегральная функция экспоненциального распределения [39,40], то для вычисления σ_{0N} и σ^* в правой части (27) следует положить $\alpha=1$. Поскольку при выполнении неравенства (28) вся кривая перекрестного упрочнения строится для $\sigma \geq \sigma^* > \sigma_N$, то для уравнения всей этой диаграммы (21) следует считать $\xi(\sigma)=1$, т.е. уравнение имеет вид (24). Таким образом, диаграммы перекрестного упрочнения при выполнении неравенства (28) находится на участке диаграммы мартенситной неупругости для $\sigma \geq \sigma_N$. Точно такой же вывод получается и для случая $\sigma_0 > \sigma_N$, поскольку в этом случае $\sigma \geq \sigma^* > \sigma_0 > \sigma_N$ и для любого σ на графике перекрестного упрочнения справедливо равенство $\xi(\sigma)=1$, т.е. справедливо соотношение (24).

Необходимо отметить, что из-за выполнения неравенства $\rho_{D1} > \rho_{D2}$ и того обстоятельства, что функция φ_1 непрерывна и монотонно возрастает от 0 до 1 при возрастании аргумента от 0 до ∞ , всегда существует такое значение σ_1 , для которого выполняется равенство $\rho_{D1}\varphi_1(\sigma_1) = \rho_{D2}$. Легко видеть, что при стремлении σ_0 к σ_1 слева: $\sigma_0 \rightarrow \sigma_1 - 0$, для решения σ^* уравнения (29) выполняется $\sigma^* \rightarrow +\infty$ и для

$$\sigma_0 \geq \sigma_1 \quad (30)$$

решение левого уравнения (29) отсутствует. Следовательно, после полного прямого превращения под действием постоянного напряжения σ_0 , удовлетворяющего неравенству (30), доориентация мартенсита при нагружении в режиме мартенситной неупругости не возможна, рост напряжений свыше величины σ_0 приведет к росту только упругих деформаций.

На рис.3,4 изображены результаты вычисления величины σ^* , посчитанные по приведенным выше формулам, для плющинки из никелида титана ТН-1, отожженной при температуре 450°C, 30 мин, охлаждение вместе с печью. Параметры модели для этого материала равны [36,38] $\rho_{D1} = 7,83\%$, $\rho_{D2} = 5,72\%$, $\sigma_{10} = 270$ МПа, $\sigma_N = 250$ МПа, для аппроксимации диаграммы прямого превращения используется интегральная функция экспоненциального распределения [39,40].

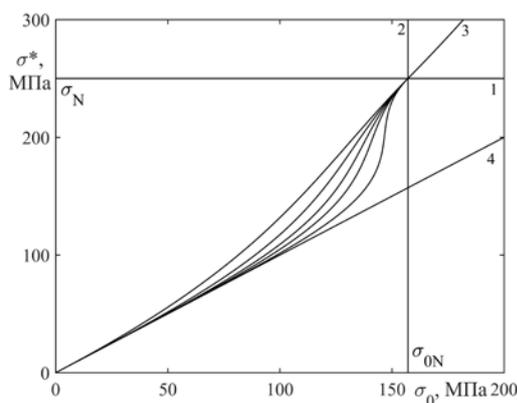


Рис.3.

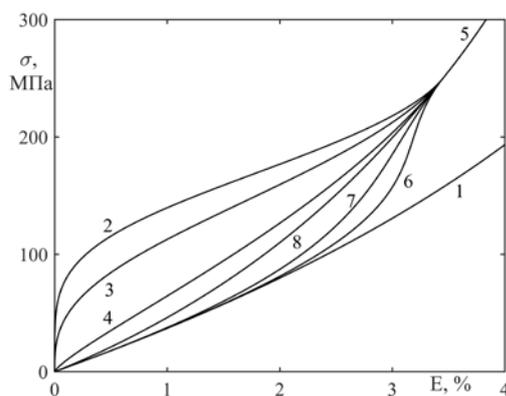


Рис.4.

На рис.3 горизонтальная линия 1 имеет уравнение $\sigma^* = \sigma_N$, а вертикальная линия 2 имеет уравнение $\sigma_0 = \sigma_{0N}$. В точке пересечения этих линий все графики зависимости σ^* от σ_0 выходят на диаграмму мартенситной неупругости и продолжают как единая линия 3, соответствующая участку этой диаграмм для $\sigma > \sigma_N$. Криволинейные линии являются графиками зависимости σ^* от σ_0 и соответствуют справа налево значениям $m = 6, 4, 3, 2, 1$. Наклонная прямая линия 4 имеет уравнение $\sigma^* = \sigma_0$ и приведена, чтобы оценить разницу между значением напряжения σ_0 , при котором проводилось предварительное прямое превращение и напряжением σ^* , при котором начинается неупругое деформирование при последующем нагружении в режиме мартенситной неупругости. Эта разница монотонно возрастает с ростом σ_0 при фиксированном значении m и монотонно убывает с ростом m при фиксированном σ_0 . Максимальное значение величины

этой разницы для рассматриваемых значений параметров материала достигается при $\sigma_0 = \sigma_{0N}$, причем оно равно $\sigma_N - \sigma_{0N}$, а максимальное значение отношения σ^*/σ_0 составляет около 1,59, т.е. σ^* может превышать σ_0 почти на 60%. Согласно экспериментальным данным [22,41], это отношение имеет значения в диапазоне 1,26-1,52.

Рис.4 иллюстрирует зависимости напряжения σ^* от фазовой деформации E , накопленной в процессе предварительного полного прямого превращения под действием постоянного напряжения σ_0 . Кривая 1 является частью диаграммы прямого превращения (5), полученной с помощью аппроксимации $\varphi_1(\sigma) = (1 - \exp(-\sigma/\sigma_{10}))$ интегральной функцией экспоненциального распределения [39,40] соответствующих экспериментальных данных [38] методом наименьших квадратов. Кривые 2, 3, 4 это диаграммы мартенситной неупругости для значений m , соответственно равных 4, 2 и 0,3; кривые 6,7 и 8 – графики зависимости σ^* от фазовой деформации E^{ph} , накопленной на предварительном этапе прямого превращения для тех же значений m . Криволинейный отрезок 5 является общим продолжением всех линий 2-6 для значений $\sigma \geq \sigma_N$.

На рис.5,6 линии 1-6 представляют собой диаграммы перекрестного упрочнения, т.е. графики зависимости напряжений от деформаций для финальных процессов нагружения в режиме мартенситной неупругости после предварительного прямого превращения под действием напряжений $\sigma_0 = 50$ МПа (линия 1), 75 МПа (линия 2), 100 МПа (линия 3), 125 МПа (линия 4), 135 МПа (линия 5) и 140 МПа (линия 6). Линия 7 представляет собой диаграмму мартенситной неупругости, линия 8 – фрагмент диаграммы прямого превращения. При расчетах используются те же значения параметров материала, кроме величины m , что и для рис.3,4. Для рис.5 – $m = 2$, для рис.6 – $m = 4$.

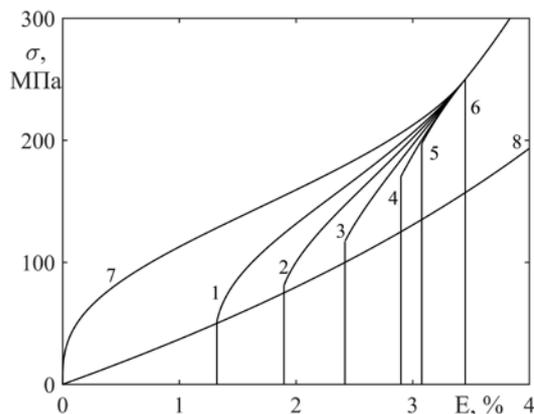


Рис.5.

Согласно данным рис.5 и 6 анализ, основанный на положении 3b модели мартенситной неупругости, в отличие от данных, основанных на положении 3a (рис.1) качественно правильно описывает эффект перекрестного упрочнения, т.е. соотношение (1). В рамках такого анализа разность $\sigma^* - \sigma_0$ возрастает с ростом величины σ_0 , что соответствует экспериментальным данным [21,22,41]. С ростом значения параметра m эта разница уменьшается.

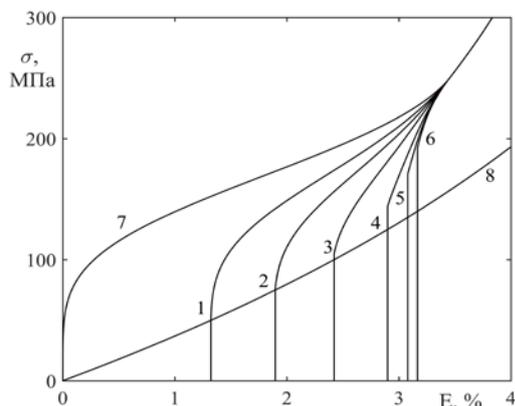


Рис.6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что в рамках структурно-имитационной модели деформирования СПФ может быть качественно правильно описано явление перекрестного упрочнения. Нелинейная часть диаграммы перекрестного упрочнения располагается между диаграммами прямого превращения и мартенситной неупругости, начинается на первой из них и сливается со второй при достаточно больших напряжениях. Для достижения лучшего количественного соответствия предсказаний модели и экспериментальных данных следует выбрать вариант модели, в рамках которого собственная деформация, связанная с раздвойникованием (доориентацией, переориентацией) мартенситного мезоэлемента зависит не только от действующих напряжений, но монотонно убывает с ростом относительного размера q мезоэлемента. Эффект перекрестного упрочнения уменьшается с ростом параметра модели m и увеличивается с уменьшением отношения ρ_{D2}/ρ_{D1} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. *Эффект памяти формы*. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. – 216 с.
2. Лихачев В.А., Малинин В.Г. *Структурно-аналитическая теория прочности*. – СПб.: Наука, 1993. – 471 с.
3. Lagoudas D.S. *Shape memory alloys modeling and engineering applications*. – Springer, 2008. – 435 p. DOI: 10.1007/978-0-387-47685-8.
4. Lexcelent C. *Shape-memory Alloys Handbook*. – Published in Great Britain and the United States by ISTE Ltd and John Wiley & Sons. Inc., 2013. – 379 p.
5. Курдюмов Г.В. *Бездиффузионные мартенситные превращения в сплавах* // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1948. – Т.18. – №8. – С.999-1025.
6. Курдюмов Г.В., Хандрос Л.Г. *О термоупругом равновесии при мартенситном превращении* // ДАН СССР. – 1949. – Т.66. – Вып.2. – С.211-215.
7. Ryan S.E., John A.S., Nicolas T. *Stability of thermally-induced martensitic transformations in bi-atomic crystals* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2002. – Vol.50 – Pp.2463-2493.

8. Waitz T., Kazykhanov V., Karnthaler H.P. *Martensitic phase transformations in nanocrystalline NiTi studied by TEM* // Acta Materialia. – 2004. – Vol.52. – Pp.137-147.
9. James R. D., Hane V. *Martensitic transformations and shape-memory materials* // Acta mater. – 2000. – Vol.48. – Pp.197-222.
10. Liu Y. *Some factors affecting the transformation hysteresis in shape memory alloys* / In: Shape Memory Alloys. – Nova Science Publishers, Inc., 2010. – Chapter 13. – Pp.361-369.
11. Хунджуа А.Г. *Эффект памяти формы и сверхупругость. Учебное пособие.* – М.: Физический факультет МГУ, 2010. – 32 с.
12. Liu Y., Xie Z.L. *Twinning and detwinning of $\langle 011 \rangle$ type II twin in shape memory alloy* // Acta Materialia. – 2003. – Vol.51. – Pp.5529-5543.
13. Nishida M., Ii S., Kitamura K., Furukawa T., Chiba A., Hara T., Hiraga K. *New deformation twinning mode of b19 martensite in Ti-Ni shape memory alloy* // Scripta Materialia. – 1998. – Vol. 39. – No.12. – Pp.1749-1754.
14. Thamburaja P. *Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys* // Journal of the Mechanics and Physics of solids. – 2005. – Vol.53. – Pp.825-856.
15. Nnamchi P., Younes A., Gonzales S. *A review on shape memory metallic alloys and their critical stress for twinning* // Intermetallics. – 2019. – Vol.105. – Pp.61-78.
16. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
17. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.
18. Мовчан А.А. *Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – №4. – С.140-151.
19. Мовчан А.А. *Объединенная модель фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2020. – №11. – С.2-10.
20. Мовчан А.А. *Модель неупругого деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – №3. – С.8-17.
21. Мовчан А.А., Сильченко А.Л., Казарина С.А. *Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование эффекта перекрестного упрочнения сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – №3. – С.20-27.
22. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Эффект перекрестного упрочнения сплава с памятью формы при сжатии* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №4. – С.2-9.
23. Мовчан А.А., Рихмаер А.М. *Структурно имитационная модель деформирования сплавов с памятью формы. Часть 1. Описание эффекта ориентированного превращения* // Деформация и разрушение материалов. – 2023. – №12. – С.11-19.
24. Патрикеев Ю.И. *Некоторые закономерности проявления деформации ориентированного превращения в никелиде титана* // Проблемы прочности. – 1989. – Вып.3. – С.119-124.

25. Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Шиманский С.Р., Чернышенко А.И. *Эффект ориентированного превращения в никелиде титана* // Физика металлов и металловедение. – 1984. – Т.57. – №3. – С.612-614.
26. Лихачев В.А., Патрикеев Ю.И., Щуплецов В.Н. *Эффект ориентированного превращения в никелиде титана* // Физика металлов и металловедение. – 1986. – Т.61. – Вып.1. – С.121-126.
27. Беляев С.П., Ермолаев В.П., Кузьмин С.Л., Лескина М.Л., Лихачев В.А., Пульнев С.А. *Деформация ориентированного превращения и эффект памяти формы в материалах с термоупругим и взрывным характером превращения* // Физика металлов и металловедения. – 1991. – Вып.5. – С.171-175.
28. Мовчан А.А., Рихмаер А.М. *Структурно-имитационная модель деформирования сплавов с памятью формы. Часть 2. Описание эффекта реверсивной памяти формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2024. – №1. – С.2-10.
29. Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Тошпулатов Ч.Х. *Эффект реверсивного формоизменения при знакопеременном деформировании* // Физика металлов и металловедение. – 1986. – Т.61. – Вып.1. – С.79-85.
30. Беляев С.П., Ермолаев В.А., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Чунарева Е.Н. *Эффект реверсивно обратимой памяти формы в сплавах на основе никелида титана* // Физика металлов и металловедение. – 1988. – Т.66. – Вып.5. – С.926-934.
31. Беляев С.П., Ермолаев В.А., Лихачев В.А., Хайров Р.Ю., Янковский А.А. *Реверсивно-обратимое формоизменение в никелиде титана* // Известия вузов. Физика. – 1988. – Вып.8. – С.71-76.
32. Беляев С.П., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Рогачевская М.Ю. *Влияние режимов предварительного термоциклического воздействия на эффект реверсивной памяти формы сплава на основе никелида титана* // Известия вузов. Цветная металлургия. – 1989. – №3. – С.101-104.
33. Беляев С.П., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Рогачевская М.Ю. *Реверсивное формоизменение в TiNiCu и TiNiFe* // Физика металлов и металловедение. – 1989. – Т.68. – Вып.3. – С.610-611.
34. Беляев С.П., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Рогачевская М.Ю. *Моделирование процессов реверсивного формоизменения в TiNi* // Физика металлов и металловедение. – 1989. – Т.68. – Вып.3. – С.617-618.
35. Беляев С.П., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А. *Свойства реверсивного формоизменения у материалов с мартенситными превращениями* // Физика металлов и металловедение. – 1993. – Т.75. – Вып.1. – С.86-92.
36. Мовчан А.А., Рихмаер А.М. *Описание мартенситной неупругости в рамках структурно-имитационной модели деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2024. – №11. – С.2-10.
37. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck J., Delaey L. *Some results on the detwinning process in NiTi shape memory alloys* // Scripta Materialia. – 1999. – Vol.41. – No.12. – Pp.1273-1281.
38. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – №12. – С.2-11.
39. Вадзинский Р.Н. *Справочник по вероятностным распределениям.* – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.

40. Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников.* – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.
41. Казарина С.А., Мовчан А.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальное исследование взаимодействия фазовых и структурных деформаций в сплавах с памятью формы // Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2016. – Т.22. – №1. – С.85-98.

REFERENCES

1. Lihachev V.A., Kuz'min S.L., Kamenceva Z. P. *Ehffekt pamyati formy [Shape memory effect].* Leningrad, Izdatel'stvo Leningradskogo gosudarstvennogo universiteta, 1987, 216 p.
2. Lihachev V.A., Malinin V.G. *Strukturno-analiticheskaya teoriya prochnosti [Structural and analytical theory of strength].* Sankt-Peterburg, Nauka, 1993. 471 p.
3. Lagoudas D.S. *Shape memory alloys modeling and engineering applications.* Springer, 2008. 435 p.
4. Lexcellent C. *Shape-memory Alloys Handbook.* Published in Great Britain and the United States by ISTE Ltd and John Wiley & Sons. Inc., 2013, 379 p.
5. Kurdyumov G.V. *Bezdiffuzionnye martensitnye prevrashheniya v splavakh [Diffusion-free martensitic transformations in alloys]. Zhurnal ehksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki, 1948, Vol.18, No.8, Pp.999-1025.*
6. Kurdyumov G.V., Handros L.G. *O termouprugom ravnesii pri martensitnom prevrashhenii [On thermoelastic equilibrium in martensitic transformation]. Doklady akademii nauk SSSR, 1949, Vol.66, Iss.2, Pp.211-215.*
7. Ryan S.E., John A.S., Nicolas T. *Stability of thermally-induced martensitic transformations in bi-atomic crystals.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2002, Vol.50, Pp.2463-2493.
8. Waitz T., Kazykhanov V., Karnthaler H.P. *Martensitic phase transformations in nanocrystalline NiTi studied by TEM.* Acta Materialia, 2004, Vol.52, Pp.137-147.
9. James R.D., Hane V. *Martensitic transformations and shape-memory materials.* Acta mater, 2000, Vol.48, Pp.197-222.
10. Liu Y. *Some factors affecting the transformation hysteresis in shape memory alloys.* In: Shape Memory Alloys., Nova Science Publishers, Inc., 2010, Chapter 13, Pp.361-369.
11. Hundzhua A.G. *Ehffekt pamyati formy i sverkhuprugost'. Uchebnoe posobie [Shape memory effect and superelasticity].* Moskva, Fizicheskij fakul'tet MGU, 2010, 32 p.
12. Liu Y., Xie Z.L. *Twinning and detwinning of $\langle 011 \rangle$ type II twin in shape memory alloy.* Acta Materialia, 2003, Vol.51, Pp.5529-5543.
13. Nishida M., Ii S., Kitamura K., Furukawa T., Chiba A., Hara T., Hiraga K. *New deformation twinning mode of b19 martensite in ti-ni shape memory alloy.* Scripta Materialia, Vol.39, No.12, Pp.1749-1754.
14. Thamburaja P. *Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys.* Journal of the Mechanics and Physics of solids, 2005, Vol.53, Pp.825-856.
15. Nnamchi P., Younes A., Gonzales S. *A review on shape memory metallic alloys and their critical stress for twinning.* Intermetallics, 2019, Vol.105, Pp.61-78.
16. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems.* Physical Mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.

17. Movchan A.A. *Model for the Effect of the Phase Mechanism of Deformation on the Structural Mechanism in Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2020, Vol.2020, No.4, Pp.282-290.
18. Movchan A.A. *Phenomenological Model of Changes in Phase-Structural Deformations in Shape Memory Alloys*. Mechanics of Solids, 2020, Vol.55, No.4, Pp.573-583.
19. Movchan A.A. *Joint Model for the Phase-Structural Deformation of Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2021, Vol.2021, No.4, Pp.333-340.
20. Movchan A.A. *Shape memory alloys inelastic straining model*. Russian Metallurgy (Metally), 2021, Vol.2021, No.10, Pp.1203-1212.
21. Movchan A.A., Sil'chenko A.L., Kazarina S.A. *Experimental Study and Theoretical Simulation of the Cross Hardening Effect in Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2017, Vol.2017, No.10, Pp.779-784.
22. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Cross Hardening of a Shape Memory Alloy during Compression*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, Vol.2019, No.10, Pp.967-973.
23. Movchan A.A., Rikhmaer A.M. *Structural-Simulation Model for the Deformation of Shape Memory Alloys: I. Description of the Orientational Transformation Effect*. Russian Metallurgy (Metally), 2024, Vol.2024, No.4, Pp.14-21.
24. Patrikeev Yu.I. *Nekotorye zakonomernosti proyavleniya deformatsii orientirovannogo prevrashheniya v nikelide titana [Some patterns of manifestation of oriented transformation strain in titanium nickelide]*. Problemy prochnosti, 1989, No.3, Pp.119-124.
25. Kuz'min S.L., Lihachev V.A., Shimanskij S.R., Chernyshenko A.I. *Ehffekt orientirovannogo prevrashheniya v nikelide titana [The effect of oriented transformation in titanium nickelide]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1984, Vol.57, Iss.3, Pp.612-614.
26. Lihachev V.A., Patrikeev Yu.I., Shchuplecov V.N. *Ehffekt orientirovannogo prevrashheniya v nikelide titana [The effect of oriented transformation in titanium nickelide]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1986, Vol.61, Iss.1, Pp.121-126.
27. Belyaev S.P., Ermolaev V.P., Kuz'min S.L., Leskina M.L., Lihachev V.A., Pul'nev S.A. *Deformatsiya orientirovannogo prevrashheniya i ehffekt pamyati formy v materialakh s termouprugim i vzryvnym kharakterom prevrashheniya [Oriented transformation strain and shape memory effect in materials with thermoelastic and explosive transformation character]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1991, Iss.5, Pp.171-175.
28. Movchan A.A., Rikhmaer A.M. *Structural-Simulation Model for the Deformation of Shape Memory Alloys: II. Description of the Reversible Shape Memory Effect*. Russian Metallurgy (Metally), 2004, Vol.2024, No.4, Pp.22-28.
29. Kuz'min S.L., Lihachev V.A., Toshpulatov Ch.H. *Ehffekt reversivnogo formoizmeneniya pri znakoperemennom deformirovanii [The effect of reversible shaping during alternating deformation]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1986, Vol.6, Iss.1, Pp.79-85.
30. Belyaev S.P., Ermolaev V.A., Kuz'min S.L., Lihachev V.A., Chunareva E.N. *Ehffekt reversivno obratimoy pamyati formy v splavakh na osnove nikelida titana [The reversibly two-way shape memory effect in titanium nickelide-based alloys]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1988, Vol.66, Iss.5, Pp.926-934.

31. Belyaev S.P., Ermolaev V.A., Lihachev V.A., Hajrov R.Yu., Yankovskij A.A. *Reversivno-obratimoe formoizmenenie v nikelide titana [Reversible shape change in titanium nickelide]*. Izvestiya vuzov. Fizika, 1988, Iss.8, Pp.71-76.
32. Belyaev S.P., Kuz'min S.L., Lihachev V.A., Rogachevskaya M.Yu. *Vliyanie rezhimov predvaritel'nogo termotsiklicheskogo vozdeystviya na ehffekt reversivnoj pamyati formy splava na osnove nikelida titana [The effect of the modes of preliminary thermocyclic action on the effect of reversible shape memory of an alloy based on titanium nickelide]*. Izvestiya vuzov. Tsvetnaya metallurgiya, 1989, No.3, Pp.101-104.
33. Belyaev S.P., Kuz'min S.L., Lihachev V.A., Rogachevskaya M.Yu. *Reversivnoe formoizmenenie v TiNiCu i TiNiFe [Reverse shaping in TiNiCu and TiNiFe]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1989, Vol.68, Iss.3, Pp.610-611.
34. Belyaev S.P., Kuz'min S.L., Lihachev V.A., Rogachevskaya M.Yu. *Modelirovanie protsessov reversivnogo formoizmeneniya v TiNi [Modeling of reverse shaping processes in TiNi]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1989, Vol.68, Iss.3, Pp.617-618.
35. Belyaev S.P., Kuz'min S.L., Lihachev V.A. *Svoystva reversivnogo formoizmeneniya u materialov s martensitnymi prevrashheniyami [Properties of reversible shape change in materials with martensitic transformations]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1993, Vol.75, Iss.1, Pp.86-92.
36. Movchan A.A., Rihmaer A.M. *Opisanie martensitnoj neuprugosti v ramkakh strukturno-imitatsionnoj modeli deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy [Description of martensitic inelasticity in the framework of a structural simulation model of deformation of shape memory alloys]*. Deformatsiya i razrushenie materialov, 2024, No.11, Pp.2-10.
37. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck J., Delaey L. *Some results on the detwinning process in NiTi shape memory alloys*. Scripta Materialia, 1999, Vol.41, No.12, Pp.1273-1281.
38. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Experimental Identification of a Nonlinear Deformation Model for a Shape Memory Alloy during Phase and Structural Transformations*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, Vol.2019, No.4, Pp.301-308.
39. Vadzinskij R.N. *Spravochnik po veroyatnostnym raspredeleniyam [Handbook of Probability Distributions]*. Sankt-Peterburg, Nauka, 2001, 295 p.
40. Kobzar' A.I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov [Applied mathematical statistics. For engineers and scientists]*. Moskva, Fizmatlit, 2006, 816 p.
41. Kazarina S.A., Movchan A.A., Sil'chenko A.L. *Ehksperimental'noe issledovanie vzaimodeystviya fazovykh i strukturnykh deformatsij v splavakh s pamyat'yu formy [Experimental study of the interaction of phase and structural deformations in shape memory alloys]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.85-98.

Поступила в редакцию 14 октября 2024 года.

Сведения об авторах:

Мовчан Андрей Александрович – д.ф.-м.н., проф., г.н.с. ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: movchan47@mail.ru

Рихмаер Александр Михайлович – дипломник, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: arichmaer@mail.ru