

УДК 539.3

EDN GAUIAU (<https://elibrary.ru/gauiau>)

DOI 10.33113/mkmk.ras.2024.30.03.03



## КОЛЕБАНИЯ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ ПРИ КОЛЬЦЕВОЙ РЕЗОНАНСНОЙ НАГРУЗКЕ\*

Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В.

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Беларусь*

### АННОТАЦИЯ

Исследованы резонансные колебания круговой симметричной по толщине трехслойной сэндвич-пластины под действием осесимметричной гармонической кольцевой нагрузки. Для тонких несущих слоев принимаются классические гипотезы Кирхгофа, согласно которым деформированная нормаль к срединной поверхности слоя несжимаема, остается прямолинейной и перпендикулярной к ней. Заполнитель считается легким, более толстым. При его деформировании нормаль также остается несжимаемой и прямолинейной, но перестает быть перпендикулярной срединной поверхности, т.е. подчиняется гипотезе Тимошенко. Температура пластины предполагается однородной и изменяющейся вместе с температурой окружающей среды. Учтено ее влияние на упругие параметры материалов слоев.

Использована общая система дифференциальных уравнений поперечных изотермических колебаний несимметричной по толщине круглой трехслойной пластины, которая справедлива и в рассматриваемом случае. Для исследуемой сэндвич-пластины она упрощается и сводится к двум уравнениям относительно прогиба пластины и дополнительного сдвига в заполнителе. В качестве граничных условий рассмотрены защемление и шарнирное опирание контура. Начальные условия движения приняты однородными. Использована ограниченность решения в центре пластины. Решение начально-краевой задачи для сэндвич-пластины получено с помощью разложения искомых прогиба и относительного сдвига в ряд по системе собственных функций, которые для принятых граничных условий имеют одинаковый вид. Выписаны трансцендентные уравнения для нахождения соответствующих собственных чисел, их значения приведены в таблице. Построены графики изменения собственных частот основного тона в зависимости от температуры. Приведены расчетные формулы для прогиба и относительного сдвига. Результаты численного анализа представлены в виде графиков зависимости прогиба пластины от температуры и координаты внутреннего кольца силовой нагрузки.

**Ключевые слова:** круговая трехслойная пластина, температура, кольцевая резонансная нагрузка, численные результаты

## SANDWICH PLATE UNDER THE ACTION OF AN ANNULAR RESONANT LOAD IN A TEMPERATURE FIELD

Starovoitov E.I., Leonenko D.V.

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».

## ABSTRACT

Resonant vibrations of a circular three-layer sandwich plate symmetrical in thickness under the action of an axisymmetric harmonic ring load are investigated. Thin bearing layers are assumed to be high-strength, their deformation obeys Kirchhoff's hypotheses. Consequently, after applying the load, the deformed normal is rectilinear, does not change its length and remains perpendicular to the deformed median surface of the layer. In a thicker lightweight filler, Timoshenko's hypothesis about the straightness and incompressibility of the deformed normal, which rotates by some additional angle  $\psi$  to relative to the normal to the deformed median surface, is fulfilled. The temperature of the plate is assumed to be uniform and changing along with the ambient temperature. Its influence on the elastic parameters of the layer materials is taken into account.

The general system of equations of transverse isothermal oscillations of a three-layer plate, obtained by the Lagrange variational method taking into account inertia forces, is used. For the sandwich plate under consideration, it is reduced to a system of two partial differential equations. Kinematic boundary and homogeneous initial conditions are formulated. The limitation of the solution in the center of the plate is used. The solution of the initial boundary value problem for a sandwich plate is obtained by decomposing the desired displacements in a series according to a system of proper orthonormal functions. Transcendental equations for finding eigenvalues are written out. The ratio of eigenvalues for pivotally supported and contour-sealed plates is tabulated. Graphs of changes in the natural frequencies of the fundamental tone depending on temperature are plotted. Calculation formulas for deflection and relative shear are given. The results of the numerical analysis are presented in the form of graphs of the dependence of the deflection of the plate on the temperature and the coordinates of the inner ring of the force load.

**Keywords:** circular three-layer plate; temperature; ring resonant load; numerical results

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование деформирования композитных элементов конструкций в тепловых полях является актуальной проблемой. В связи с этим возникает необходимость в разработке соответствующих методик расчета. Этой проблеме посвящен многочисленный ряд публикаций. Так в монографиях [1-5] приведены механико-математические модели исследования НДС слоистых стержней, пластин и оболочек при комплексном воздействии квазистатических силовых и температурных полей. В монографии [6] рассматриваются статические и динамические реакции в связанных и несвязанных термоупругих задачах, термическая потеря устойчивости и эффекты при флаттере панелей. В обзорной работе [7] изложена суть асимптотического метода решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и методика применения этого метода для решения задач статики и динамики элементов конструкций. Монография [8] посвящена разработке последовательной теории тонких анизотропных слоистых структур, основанной на асимптотическом анализе трехмерных уравнений линейной упругости.

В статьях [9-15] описаны свободные и вынужденные колебания слоистых и трехслойных цилиндрических оболочек. Исследован спектр частот, рассмотрены локальные и резонансные нагрузки, предложена геометрически нелинейная теория трехслойных оболочек. Нестационарные нагружения тонкостенных элементов конструкций исследованы в работах [16-18].

Моногармоническое акустическое воздействие на слоистую пластину и моделирование динамической реакции пластины, армированной углеродным

волокном, при собственных и резонансных колебаниях рассмотрено в публикациях [19-21]. Рассеяние упругих волн в сильно неоднородной трехслойной пластине рассмотрено в статьях [22,23]. Реакция многослойной плиты на наклонный удар и характеристики сверхзвукового флаттера композитных пластин изучены в [24,25]. Осесимметричные локальные и импульсные динамические воздействия на трехслойные круговые пластины исследованы в работах [26,27]. Колебания пятислойных круговых пластин с жесткими заполнителями рассмотрены в [28]. Динамическое нагружение трехслойных стержней и круговых пластин, взаимодействующих с упругим основанием или вязкой жидкостью, исследовано в публикациях [29-34].

Статьи [35-38] посвящены квазистатическому деформированию многослойных балок и панелей. В работах [39-45] исследовано влияние температуры на НДС трехслойных пластин и стержней при изгибе, в том числе из сплава с памятью формы и внутренним вязкоупругим слоем.

Здесь рассмотрена начально-краевая задача о резонансных колебаниях круговой сэндвич-пластины с легким заполнителем, находящейся под воздействием кольцевой равномерно распределенной нагрузки с учетом температуры окружающей среды.

## 1. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Постановка рассматриваемой задачи проводится в цилиндрической системе координат, которая связана со срединной плоскостью заполнителя (рис.1). Для тонких высокопрочных несущих слоев, толщина которых  $h_1 = h_2 = h$ , выполняются гипотезы Кирхгофа о прямолинейности, несжимаемости и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности после приложения нагрузки.

В легком (не учитывается работа касательных напряжений) более толстом заполнителе ( $h_3 = 2c \gg h$ ) деформированная нормаль к срединной поверхности прямолинейна, сохраняет длину, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi$  (относительный сдвиг). Напряжения и деформации в слоях связаны законом Гука с учетом температуры окружающей среды

$$s_{\alpha}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T) \quad (\alpha = r, \varphi), \quad (1)$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_k \varepsilon_{rz}^{(3)},$$

где  $s_{\alpha}^{(k)}, s_{rz}^{(3)}, (\varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \varepsilon_{rz}^{(3)})$  – девиаторы тензоров напряжений (деформаций);  $\sigma^{(k)}, (\varepsilon^{(k)})$  – среднее напряжение (деформация);  $G_k(T), K_k(T)$  – модули упругости, совпадающие в несущих слоях  $G_1 = G_2 = G$ ,  $K_1 = K_2 = K$ ;  $T$  – усредненная по толщине пластины температура;  $\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного расширения материала;  $k = (1, 2, 3)$  – здесь и далее номер слоя, без суммирования по повторяющемуся индексу.

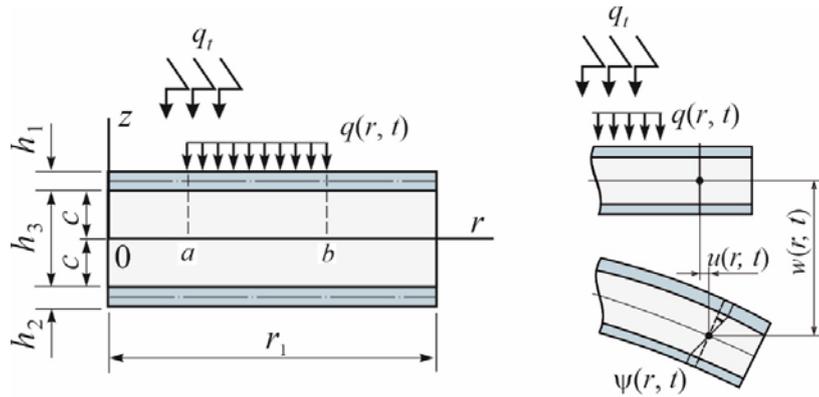


Рис.1. Схема нагружения сэндвич-пластины.

В начальный момент пластина подвергается воздействию теплового потока  $q_t$ , за счет которого повышается усредненная температура в пластине, и гармонической силовой нагрузки  $q(r, t)$ , действующей внутри кольца  $a \leq r \leq b$

$$q(r, t) = q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)) (D \cos(\omega_m t) + E \sin(\omega_m t)), \quad (2)$$

где  $q_0 = \text{const}$ ,  $D, E$  – параметры нагрузки;  $\omega_m$  – частота нагрузки, при резонансе совпадающая с одной из собственных частот колебаний пластины  $\omega_m = \omega_n$ ;  $H_0(r)$  – функция Хэвисайда.

Общая система уравнения вынужденных изотермических колебаний трехслойной круговой пластины несимметричной по толщине без учета воздействия температурного поля приведена в [2]. Эта система для рассматриваемой пластины сводится к двум дифференциальным уравнениям. В правой части второго из них появится резонансная нагрузка (2)

$$\begin{aligned} L_2(a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} &= \\ &= q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)) (D \cos(\omega_m t) + E \sin(\omega_m t)), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $w(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$  – искомые прогиб и относительный сдвиг;  $M_0 \ddot{w}$  – инерционные силы, причем  $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$ ,  $\rho_k$  – плотность материала;  $r_1$  – радиус пластины; точка сверху обозначает производную по времени, запятая в нижнем индексе – дифференцирование по радиальной координате; термозависимые коэффициенты  $a_i$  и дифференциальные операторы  $L_2, L_3$

$$\begin{aligned} a_4 &= c^2 \left( 2hK^+ + \frac{2}{3} cK_3^+ \right), \quad a_5 = c \left[ 2h \left( c + \frac{1}{2} h \right) K^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\ a_6 &= 2h \left( c^2 + ch + \frac{1}{3} h \right) K^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \quad K^+ = K + \frac{4}{3} G, \quad K_3^+ = K_3 + \frac{4}{3} G_3, \\ L_2(g) &\equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Температурная зависимость упругих характеристик материалов описывается формулой, предложенной Беллом [36]

$$\{G(T), K(T)\} = \{G(0), K(0)\} \varphi(T),$$

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \leq 0,06, \\ 1,03(1 - T/(2T_m)), & 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases} \quad (4)$$

где  $T_m$  – температура плавления материала;  $G(0) = G_0/\varphi(T_0)$ ,  $K(0) = K_0/\varphi(T_0)$ ,  $G_0$ ,  $K_0$  – значения модулей при температуре  $T_0$ .

Предполагается, что на контуре пластины находится жесткая диафрагма, не позволяющая сдвиг слоев  $\psi(r_1, t) = 0$ . Граничные условия будут использованы следующие:

– при заделке контура пластины

$$\psi(r_1, t) = w(r_1, t) = w_{,r}(r_1, t) = 0; \quad (5)$$

– при шарнирном опирании

$$\psi(r_1, t) = w(r_1, t) = 0, \quad M_r(r_1, t) = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z dz = 0, \quad (6)$$

где  $\sigma_r^{(k)}$  – радиальные напряжения,  $M_r$  – обобщенный радиальный изгибающий момент

$$M_r = a_5 \psi_{,r} - a_6 w_{,rr} - a_{60} \frac{w_{,r}}{r_1}, \quad a_{60} = 2hK^-(c^2 + ch + \frac{1}{3}h^2) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-,$$

где  $K^- = K + \frac{4}{3}G$ ,  $K_3^- = K_3 - \frac{2}{3}G_3$ .

Начальные прогиб и скорость отсутствуют

$$w(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = 0 \quad (7)$$

## 2. РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Система (3) после элементарных преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{a_5}{a_4} w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \\ L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} &= \\ &= q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)) (D \cos(\omega_m t) + E \sin(\omega_m t)), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $M^4 = \frac{a_4}{a_6 a_4 - a_5^2} M_0$ .

В (8) необходимо положить константу интегрирования  $C_4 = 0$ , т.к. относительный сдвиг  $\psi(r, t)$  должен быть ограничен в центре пластины. Подставим первое уравнение (8) в граничные условия (6). Это позволит выразить оставшуюся константу интегрирования через значение производной от прогиба на контуре

$$C_3 = -\frac{a_5}{a_4 r_1} w_{,r}(r_1, t).$$

Используя это выражение, можно получить второе условие для прогиба на контуре ( $r = r_1$ ). В результате при шарнирном опирании будут требования

$$w(r_1, t) = 0, \quad \left( a_6 w_{,rr} + \frac{a_{60}}{r_1} w_{,r} \right) \Big|_{r=r_1} = 0. \quad (9)$$

Следовательно, прогиб рассматриваемой пластины должен удовлетворять дифференциальному уравнению (8), начальным и граничным условиям (9), (7).

Искомые функции и нагрузку разложим в ряд по системе собственных функций  $v_n \equiv v_n(\beta_n r)$ , полученной в [2] при изотермическом нагружении. В нашем случае ее вид не изменится

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad \psi(r, t) = \frac{a_5}{a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_{,r} T_n(t), \quad q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad (10)$$

$$v_n(\beta_n r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[ J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_0(\beta_n r) \right],$$

где  $T_n(t)$  – неизвестная (искомая) функция времени;  $\beta_n$  – собственные числа;  $d_n$  – нормировочный коэффициент;  $J_0(\beta_n r)$ ,  $I_0(\beta_n r)$  – функции Бесселя нулевого порядка;  $\omega_n$  – частота собственных колебаний  $\omega_n^2 = \beta_n^4 / M^4$ .

Коэффициенты разложения нагрузки (2) в ряд  $q_n(t)$  будут

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n r dr = D_n \cos(\omega_n t) + E_n \sin(\omega_n t), \quad (11)$$

где

$$E_n = Ef(\beta_n), \quad D_n = Df(\beta_n),$$

$$f(\beta_n) = \frac{q_0}{M_0 d_n \beta_n} \left( b J_1(\beta_n b) - a J_1(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (b I_1(\beta_n b) - a I_1(\beta_n a)) \right).$$

Трансцендентное уравнение для определения собственных чисел  $\beta_n$  при защемленном контуре следует из требований для прогиба в (5)

$$I_1(\beta r_1) J_0(\beta r_1) + J_1(\beta r_1) I_0(\beta r_1) = 0. \quad (12)$$

При шарнирно опертом контуре аналогичное уравнение получим из условий (9)

$$J_0(\beta r_1) \left[ a_7 \left( \beta I_0(\beta r_1) - \frac{I_1(\beta r_1)}{r_1} \right) + \frac{a_8}{r_1} I_1(\beta r_1) \right] +$$

$$+ I_0(\beta r_1) \left[ a_7 \left( \beta J_0(\beta r_1) - \frac{J_1(\beta r_1)}{r_1} \right) + \frac{a_8}{r_1} J_1(\beta r_1) \right] = 0, \quad (13)$$

где коэффициенты  $a_7 = a_6 - a_5^2 / a_4$ ,  $a_8 = a_{60} + a_5^2 / a_4$ .

Если во второе уравнение системы (8) подставить выражения (10) с учетом коэффициентов (11), то, используя ортонормированность системы  $v_n$ , получим дифференциальное уравнение второго порядка, которому удовлетворяет искомая функция  $T_n(t)$

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = D_n \cos(\omega_n t) + E_n \sin(\omega_n t). \quad (14)$$

Решение уравнения (14) можно принять в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + y_n(t), \quad (15)$$

где  $y_n(t)$  – частное решение, зависящее от частоты резонансной нагрузки  $\omega_k$ ,

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{E_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \sin(\omega_m t) + \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \cos(\omega_m t), & \text{при } n \neq m, \\ \frac{D_k}{2\omega_m} t \sin(\omega_m t) - \frac{E_k}{2\omega_m} t \cos(\omega_m t), & \text{если } n = m. \end{cases}$$

Подставив в начальные условия выражение для прогиба (10) и функцию (15) получим константы интегрирования

$$A_n = - \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2}, & n \neq m, \\ 0, & n = m, \end{cases} \quad B_n = -\frac{1}{\omega_n} \begin{cases} \left[ \frac{\omega_k E_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2}, & n \neq m \\ -\frac{E_k}{2\omega_m}, & n = m \right]. \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, резонансные колебания рассматриваемой пластины, учитывающие окружающую температуру, описываются выражениями (10) с функцией времени (15) и константами интегрирования (16).

### 3. ЧИСЛЕННАЯ АПРОБАЦИЯ РЕШЕНИЯ

Численно исследованы параметры колебаний круговой сэндвич-пластины единичного радиуса. Слои набраны из материалов Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т ( $K = 0,8 \cdot 10^5$  МПа,  $G = 0,267 \cdot 10^5$  МПа,  $K_3 = 345$  МПа,  $G_3 = 90$  МПа,  $h = 0,01$ ,  $h_3 = 0,05$ ). Амплитуда нагрузки  $q_0 = 10^5$  Па,  $D = E = 1$ , контур пластины заделан. Корни трансцендентных уравнений для собственных чисел (12), (13) определялись численно. При шарнирно опертом контуре значения собственных чисел несколько ниже, чем при жесткой заделке. Это объясняется большей жесткостью конструкции при защемлении.

Численный анализ продемонстрировал практическую не зависимость собственных чисел от температуры в исследуемом диапазоне. Изменение собственных частот основного тона пластины с заделанным контуром при росте температуры показано на рис. 2: 1 –  $\omega_0$ ; 2 –  $\omega_1$ ; 3 –  $\omega_2$ ; 4 –  $\omega_3$ . При расчетах предполагалось, что температурное поле в пластине однородно. Его увеличение на  $100^\circ$  вызывает падение частот на 3,6%, нагревание на  $200^\circ$  дает уменьшение на 7%.

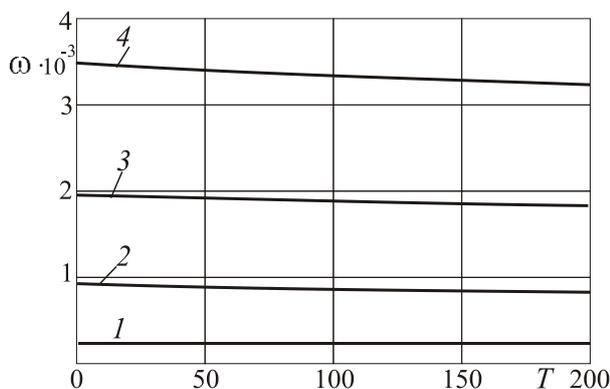


Рис.2. Изменение собственных частот с ростом температуры.

Рис.3 иллюстрирует изменение во времени прогиба в центре пластины при различных положениях силового кольца, ширина которого  $b - a = 0,25$ : а)  $a = 0,25$ ; б)  $a = 0,75$ . Резонанс предполагается по частоте основного тона  $\omega_k = \omega_0$ . Кривые соответствуют различным значениям приращения температуры: 1 –  $T = 0$ , 2 –  $T = 200^\circ\text{C}$ . При силовом кольце, примыкающем к контуру пластины, прогиб уменьшается почти в 5 раз.

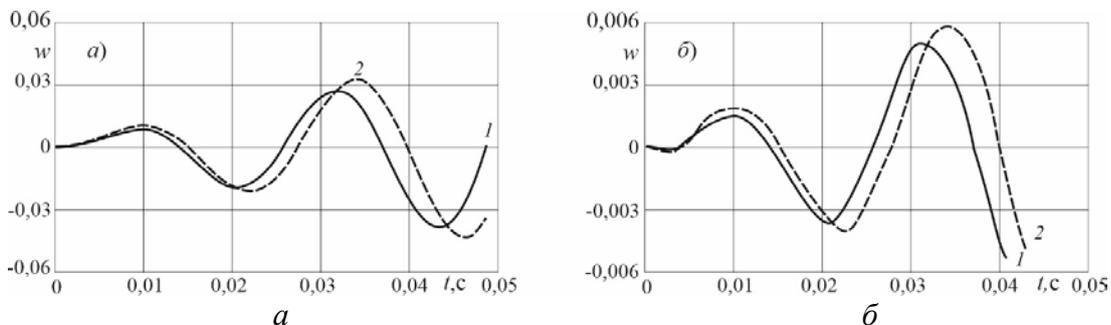


Рис.3. Изменение во времени максимального прогиба пластины.

На рис.4 показана зависимость максимального прогиба в центре пластины от температуры при различных положениях силового кольца: 1 –  $a = 0$ ; 2 –  $a = 0,25$ ; 3 –  $a = 0,5$ ; 4 –  $a = 0,75$ . Кривые рассчитаны в момент  $t_0 = \pi/\omega_0$ .

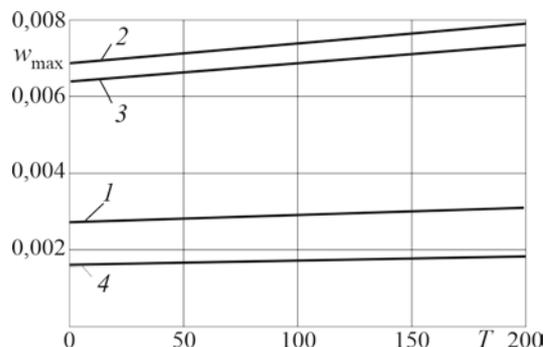


Рис.4. Зависимость максимального прогиба пластины от температуры.

С увеличением внутреннего радиуса кольца нагрузки прогиб максимальный при  $a = 0,25$ . За счет температуры происходит увеличение расчетного прогиба до 15%.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная математическая модель динамического деформирования трехслойной упругой круговой сэндвич-пластины позволяет учитывать влияние резонансной локальной кольцевой нагрузки и воздействие температуры окружающей среды на собственные частоты колебаний и параметры НДС.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

2. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций*. – М.: Физматлит, 2005. – 576 с.
3. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. *Математические модели механики твердого тела*. – Минск: БГУ, 2021. – 535 с.
4. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, Starovoitov E.I. *Mechanics of solid deformable body*. – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.
5. Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б. *Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузениях*. – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.
6. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications*. – Academic Press, 2016. – 410 p.
7. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*. 2nd ed. – Boca Raton: CRC Press, 2003. – 858 p.
8. Aghalovyan L., Prikazchikov D. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. – Singapore: World Scientific Publishing Co., 2015. – 360 p.
9. Mikhasev G.I., Altenbach H. *Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells* / In: *Thin-walled laminated structures*. – Cham: Springer, 2019. – Pp.157-198.
10. Bakulin V.N., Boitsova D.A., Nedbai A.Ya. *Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell* // *Mechanics of composite materials*. – 2021. – Vol.57. – No.5. – Pp.623-634.
11. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т.21. – №2. – С.162-169.
12. Леоненко Д.В., Старовойтов Э.И. *Колебания трехслойных цилиндрических оболочек с упругим наполнителем при локальных воздействиях* // *Прикладная механика*. – 2016. – Т.52. – №4. – С.37-46.
13. Баженов В.Г., Линник Е.Ю., Нагорных Е.В., Самсонова Д.А. *Численное моделирование процессов деформирования и потери устойчивости многослойных оболочек вращения при комбинированных квазистатических и динамических осесимметричных нагрузениях с кручением* // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. – 2024. – Т.24. – №1. – С.14-27.
14. Паймушин В.Н. *Нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем, имеющих участки расслоений и контурную подкрепляющую диафрагму* // *Прикладная математика и механика*. – 2018. – Т.82. – №1. – С.44-57.
15. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Резонансные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2016. – Т.22. – №1. – С.60-68.
16. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells* // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol.43. – No.2. – Pp.145-152.
17. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky, D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam* // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2019. – Vol.40. – No.4. – Pp.439-447.

18. Suворов Ye.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium* // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2012. – Vol.76. – No.5. – Pp.511-518.
19. Paimushin V.N., Gazizullin R.K. *Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate* // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol.53. – No.3. – Pp.407-436.
20. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. *Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping* // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol.53. – No.4. – Pp.609-630.
21. Паймушин В.Н., Иванов В.И., Хусаинов В.Р. *Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т.8. – №4. – С.543-554.
22. Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A. *Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate* // International Journal of Solids and Structures. – 2017. – Vol.113-114. – Pp.169-179.
23. Kaplunov J., Prikazchikova L., Alkinidri M. *Antiplane shear of an asymmetric sandwich plate* // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2021. – Vol. 33. – Pp.1247-1262.
24. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates* // Composite Structures. – 2015. – No.133. – Pp.1127-1136.
25. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates* // Aerospace Science and Technology. – 2016. – No.52. – Pp.41-51.
26. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Яровая А.В. *Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок* // Проблемы прочности. – 2002. – Т.34. – №5. – С.70-79.
27. Леоненко Д.В., Маркова М.В. *Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки* // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – №1. – С.49-63.
28. Лачугина Е.А. *Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями* // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып.15. – С.212-219.
29. Pradhan M., Dash P.R., Pradhan P.K. *Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient* // Meccanica. – 2016. – Vol.51. – No.3. – Pp.725-739.
30. Леоненко Д.В. *Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака* // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – №1. – С.59-63.
31. Быкова Т.В., Грушенкова Е.Д., Попов В.С., Попова А.А. *Гидроупругая реакция трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости* // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2020. – Т. 20. – Вып.3. – С.351-366.
32. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. *Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2014. – №1. – С.3-11.

33. Трацевская Е.Ю. *Динамическая неустойчивость квазитиксотропных моренных грунтов* // Литосфера. – 2017. – Т.46. – №1. – С.107-112.
34. Трацевская Е.Ю. *Демпфирующие свойства слабосвязных трехфазных грунтов* // Литосфера. – 2019. – Т.51. – №2. – С.115-121.
35. Бабайцев А.В., Калягин М.Ю., Рабинский Л.Н. *Развитие дефектов в многослойных композитах при статических нагрузках* // Российские инженерные исследования. – 2024. – Т.44. – №1. – С.112-115.
36. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection* // Acta Mechanica. – 2014. – Vol.225. – No.2. – Pp.523-541.
37. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of bending properties for cellular core sandwich panels* // Materials Sciences and Applications. – 2013. – Vol.4. – No.8. – Pp.471-477.
38. Thai C.H., Tran L.V., Tran D.T., Nguyen-Thoi T., Nguyen-Xuan U. *Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and mode-based smoother discrete shear gap method* // Applied Mathematical Modeling. – 2012. – Vol.36. – No.11. – Pp.5657-5677.
39. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Деформирование трехслойного стержня в температурном поле* // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – Т.22. – №1. – С.31-35.
40. Старовойтов Э.И., Плескачевский Ю.М., Леоненко Д.В., Тарлаковский Д.В. *Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле* // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т.88. – №4. – С.987-993.
41. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Термоупругопластическое деформирование трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №3. – С.419-434.
42. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. *Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.2. – №3. – С.392-406.
43. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Абдусаттаров А. *Изгиб трехслойной пластины в температурном поле знакопеременной кольцевой нагрузкой* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №3. – С.339-358.
44. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Знакопеременный термосиловой изгиб погонной нагрузкой трехслойной круглой пластины* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2024. – Т.30. – №1. – С.118-134.
45. Мовчан А.А. *Учет нелинейности диаграммы перехода и изменения упругого модуля во внешних слоях трехслойной полосы из сплава с памятью формы и вязкоупругим внутренним слоем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т.29. – №2. – С.272-292.
46. Белл Дж.Ф. *Экспериментальные основы механики деформируемых тел. Ч.1.* – М.: Наука, 1984. – 600 с.

## REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. *Mekhanika mnogoslujnykh konstruksij [Mechanics of laminated constructions]*. Moskva, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
2. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistykh vyzkouprugoplasticheskikh ehlementov konstruksij [Mechanics of layered viscoelastic-plastic structural elements]*. Moskva, FIZMATLIT, 2005, 576 p.

3. Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. *Matematicheskie modeli mekhaniki tverdogo tela [Mathematical models of solid mechanics]*. Minsk, BGU, 2021, 535 p.
4. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, Starovoitov E.I. *Mechanics of Solid Deformable Body*. Singapore, Springer, 2022, 317 p.
5. Abdusattarov A., Starovoitov E.I., Ruzieva N.B. *Deformirovanie i povrezhdaemost' uprugoplasticheskikh ehlementov konstruksij pri tsiklicheskikh nagruzheniyakh [Deformation and damage of elastoplastic structural elements under cyclic loading]*. Tashkent, IDEAL PRESS, 2023, 381 p.
6. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications*. Academic Press, 2016, 410 p.
7. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*. 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2003, 858 p.
8. Aghalovyan L., Prikazchikov D. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Singapore, World Scientific Publishing Co., 2015, 360 p.
9. Mikhasev G.I., Altenbach H. *Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells*. In: Thin-walled laminated structures. Cham, Springer, 2019, Pp.157-198.
10. Bakulin V.N., Boitsova D.A., Nedbai A.Ya. *Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell*. Mechanics of composite materials, 2021, Vol.57, No.5, Pp.623-634.
11. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Issledovanie spektra chastot trekhslojnoj tsilindricheskoy obolochki s uprugim napolnitelem [Investigation of the frequency spectrum of a three-layer cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.2, Pp.162-169.
12. Leonenko D.V., Starovoitov E.I. *Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads*. International Applied Mechanics, 2016, Vol.52, No.4, Pp.359-367.
13. Bazhenov V.G., Linnik E.Yu., Nagornykh E.V., Samsonova D.A. *Chislennoe modelirovanie protsessov deformirovaniya i poteri ustojchivosti mnogoslojnykh obolochek vrashheniya pri kombinirovannykh kvazistaticheskikh i dinamicheskikh osesimmetrichnykh nagruzheniyakh s krucheniem [Numerical modeling of the processes of deformation and buckling of multilayer shells of revolution under combined quasi-static and dynamic axisymmetric loading with torsion]*. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, 2024, Vol.24, Iss.1, Pp.14-27.
14. Paimushin V.N. *Nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core containing delamination zones and edge support diaphragm*. Mechanics of Solids, 2018, Vol.53, No.S(1), Pp. 76-87.
15. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Rezonansnye kolebaniya trekhslojnoj tsilindricheskoy obolochki s uprugim napolnitelem [Resonance oscillations of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.60-68.
16. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells*. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, Vol.43, No.2, Pp.145-152.
17. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, Vol.40, No.4, Pp.439-447.

18. Suvorov Ye.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2012, Vol.76, No.5, Pp.511-518.
19. Paimushin V.N., Gazizullin R.K. *Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate*. Mechanics of Composite Materials, 2017, Vol.53, No.3, Pp.407-436.
20. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. *Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping*. Mechanics of Composite Materials, 2017, Vol.53, No.4, Pp.609-630.
21. Paimushin V.N., Ivanov V.I., Khusainov V.R. *Analiz svobodnykh i sobstvennykh kolebaniy trekhslojnoj plastiny na osnove uravnenij utocnennoj teorii [Study of free and eigen vibrations of a three-layer plate on the bases of equations of a refined theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2002, Vol.8, No.4, Pp.543-554.
22. Kaplunov J., Prikazchikov DA., Prikazchikova LA. *Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate*. International Journal of Solids and Structures, 2017, Vol.113-114, Pp.169-179.
23. Kaplunov J., Prikazchikova L., Alkinidri M. *Antiplane shear of an asymmetric sandwich plate*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2021, Vol.33, Pp.1247-1262.
24. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates*. Composite Structures, 2015, No.133, Pp.1127-1136.
25. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates*. Aerospace Science and Technology, 2016, No.52, Pp.41-51.
26. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. *Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads*. Strength of Materials, 2002, Vol.34, No.5, Pp.474-481.
27. Leonenko D.V., Markova M.V. *Kolebaniya krugovoj trekhslojnoj plastiny pod dejstviem vneshnej nagruzki [Vibrations of a three-layer circular step plate under periodic impact]*. Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika, 2023, Vol.1, Pp.49-63.
28. Lachugina E.A. *Poperechnye kolebaniya pyatislojnoj uprugoj krugovoj plastiny s zhestkimi zapolnitelyami [Transverse vibrations of a five-layer elastic circular plate with rigid fillers]*. Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii, 2022, Iss.15, Pp.212-219.
29. Pradhan M, Dash PR, Pradhan PK. *Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient*. Meccanica, 2016, Vol.51, No.3, Pp.725-739.
30. Leonenko D.V. *Kolebaniya krugovykh trekhslojnykh plastin na uprugom osnovanii Pasternaka [Vibrations of circular three-layer plates on an Pasternak elastic foundation]*. Ehkologicheskij vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ehkonomicheskogo sotrudnichestva, 2014, Iss.1, Pp.59-63.
31. Bykova T.V., Grushenkova E.D., Popov V.S., Popova A.A. *Gidrouprugaya reaktsiya trekhslojnoj plastiny so szhimaemym zapolnitelem, vzaimodejstvuyushhej so shtampom cherez sloj vyazkoj zhidkosti [Hydroelastic response of a sandwich plate possessing a compressible core and interacting with a rigid die via a viscous*

- fluid layer*]. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, 2020, Vol.20, Iss.3, Pp.351-366.
32. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. *Vibrations of the walls of a slot channel with a viscous fluid formed by three-layer and solid disks*. Journal of machinery manufacture and reliability, 2014, No.1, Pp.1-8.
  33. Tratsevskaya E. *Dinamicheskaya neustojchivost' kvazitiksotropnykh morennykh gruntov [Dynamic instability quasi tiksotropnykh moraine soil]*. Litosfera, 2017, No.1(46), Pp.107-112.
  34. Tratsevskaya E. *Dempfiruyushhie svoystva slabosvyaznykh trekhfaznykh gruntov [Damping properties of loosely-bound three-phase soils]*. Litosfera, 2019, No.2(51), Pp.115-121.
  35. Babaytsev A.V., Kalyagin M.Yu., Rabinskiy L.N. *Defect development in multilayer composites under static loads*. Russian Engineering Research, 2024, Vol.44, No.1, Pp.112-115.
  36. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection*. Acta Mechanica, 2014, Vol.225, No.2, Pp.523-541.
  37. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of bending properties for cellular core sandwich panels*. Materials Sciences and Applications, 2013, Vol.4, No.8, Pp.471-477.
  38. Thai C.H., Tran L.V., Tran D.T., Nguyen-Thoi T., Nguyen-Xuan U. *Analysis of laminated composite plates using higherorder shear deformation plate theory and mode-based smoother discrete shear gap method*. Applied Mathematical Modelling, 2012, Vol.36, No.11, Pp.5657-5677.
  39. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Deformirovanie trekhslojnogo sterzhnya v temperaturnom pole [Deformation of three-layer beam in a temperature field]*. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov, 2013, Vol.22, No.1, Pp.31-35.
  40. Starovoitov É.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. *Deformation of a step composite beam in a temperature field*. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2015, Vol.88, No.4, Pp.1023-1029.
  41. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Termouprugoplasticheskoe deformirovanie trekhslojnogo sterzhnya so szhimaemym zapolnitelem [Thermoelastoplastic deformation of a three-layer bar with a compressible filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.3, Pp.419-434.
  42. Starovoitov E.I., Kozel A.G. *Izgib uprugoj krugovoj trekhslojnoj plastiny na osnovanii Pasternaka [The bending of an elastic circular sandwich plate on the Pasternak foundation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.3, Pp.392-406.
  43. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Abdusattarov A. *Izgib trekhslojnoj plastiny v temperaturnom pole znakoperemnoy kol'tsevoj nagruzkoj [Bending of a three-layer plate in a temperature fieldalternating ring load]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2022, Vol.28, No.3, Pp.339-358.
  44. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Znakoperemennyj termosilovoj izgib pogonnoj nagruzkoj trekhslojnoj krugloj plastiny [Alternating thermal force bending by linear load of a three-layer round plate]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2024, Vol.30, No.1, Pp.118-134.
  45. Movchan A.A. *Uchet nelinejnosti diagrammy perekhoda i izmeneniya uprugogo modulya vo vneshnikh sloyakh trekhslojnoj polosy iz splava s pamyat'yu formy i vyazkouprugim vnutrennim sloem [Taking into account the nonlinearity of the transition diagram and changes in the elastic modulus in the outer layers*

*of a three-layer strip with shape memory alloy outer layers and a viscoelastic inner layer].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2023, Vol.29, No.2, Pp.272-292.

46. Bell J.F. *Ehksperimental'nye osnovy mekhaniki deformiruemykh tel. Chast'1 [The Experimental Foundations of Solid Mechanics. Vol.1.]*. Moskva, Nauka, 1984, 600 p.

*Поступила в редакцию 09 августа 2024 года.*

---

Сведения об авторах:

Старовойтов Эдуард Иванович – д.ф.-м.н., проф., Кафедра «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: [edstar0@yandex.by](mailto:edstar0@yandex.by)

Леоненко Денис Владимирович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф. «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: [leoden@tut.by](mailto:leoden@tut.by)