



ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ МОДУЛЯМИ ДЕФОРМАЦИИ (МОДУЛЯМИ УПРУГОСТИ) ВКЛЮЧЕНИЙ

Власов А.Н.¹, Сорокин Г.С.¹, Власов Д.А.², Карнет Ю.Н.¹

¹ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

²ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Массовое использование композитов в машиностроении, авиакосмической технике, строительстве, расчеты зданий и сооружений с учетом совместной их работы с грунтами оснований, а также расчеты подземных сооружений и горных выработок совместно с вмещающим их массивом горных пород (грунты и горные породы по существу являются композитами природного образования) ставит задачу надежного, быстрого и удобного способа определения механических характеристик таких композитных материалов. В геомеханике определение механических свойств часто длительное по времени и весьма затратное, а иногда эти свойства невозможно определить экспериментальным путём. Таким образом, можно констатировать, что в настоящее время в инженерной и научной деятельности проблема определения эффективных характеристик композитных материалов является актуальной.

Данная работа является продолжением исследований [1,2] по определению эффективного тензора жесткости и соответственно эффективных технических характеристик композитных материалов (модули Юнга, сдвига и коэффициенты Пуассона) с использованием вероятностных методов и метода асимптотического усреднения. Предлагаемый подход позволяет свести задачу по определению эффективных механических характеристик со случайными значениями характеристик фаз композитного материала к решению набора стандартных периодических задач на ячейке, не прибегая к рассмотрению представительного элемента объема. В отличие от предыдущих работ [1,2], где задача со случайным расположением включений [1] и случайными значениями размеров (радиусов) включений при условии соблюдения периодичности расположения их центров [2], в данной работе задача решается для композитов периодической структуры, но со случайными значениями их механических характеристик.

В работе излагается четыре варианта оценки эффективных характеристик деформационных свойств композитных материалов периодической структуры со случайными значениями деформационных характеристик их фаз.

Показана применимость предложенного вероятностного подхода к определению эффективного тензора жесткости на ячейке периодичности. Такой подход позволяет получать не только средние значения (эффективный тензор жесткости), но и три основных центральных момента – со 2-го по 4-й порядок (дисперсию, асимметрию и эксцесс), характеризующие случайную функцию распределения эффективного тензора жесткости.

Представленные в данной в статье подходы к оценке эффективных деформационных характеристик композитных материалов периодической структуры со случайными значениями механических характеристик могут быть применены к определению вязкоупругих, теплофизических и других физико-механических свойств.

Ключевые слова: функция распределения компонентов тензора жесткости включений; задача на ячейке; эффективный тензор жесткости; эффективные деформационные характеристики

ESTIMATION OF THE EFFECTIVE STIFFNESS TENSOR OF A COMPOSITE MATERIAL OF A PERIODIC STRUCTURE WITH RANDOM MODULUS OF DEFORMATION (ELASTIC MODULUS) OF THE INCLUSION

Vlasov A.N.¹, Sorokin G.S.¹, Vlasov D.A.², Karnet Yu.N.¹

¹*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

²*National Research University Moscow State University of Civil Engineering (MGSU),
Moscow, Russia*

ABSTRACT

Massive use of composite materials in mechanical engineering, aerospace engineering, construction, calculations of buildings and structures taking into account their joint work with foundation soils, as well as calculations of underground structures and mine working together with the host rock mass (soils and rocks are essentially composites of natural formation) poses the problem of a reliable, fast and convenient way to determine the mechanical characteristics of such composite materials. In geomechanics, determination of mechanical properties is often time-consuming and very costly, and sometimes they cannot be determined experimentally (the problem of determining the characteristics of rock masses). Thus, it can be stated that currently in engineering and scientific activities the problem of determining the effective characteristics of composite materials is relevant.

The purpose of this work is to show the possibility of determining the stiffness tensor using theoretical methods, solving the problem using a periodicity cell, and not using a representative elementary volume, while taking into account the periodicity of the location of inclusion centers.

In this work five options for estimation of the effective characteristics of the deformation properties of composite materials with a periodic arrangement of inclusion centers and random values of their sizes are presented.

The applicability of the proposed probabilistic approach to determining the effective stiffness tensor on a periodicity cell is shown. This approach allows us to obtain not only average values (effective stiffness tensor), but also three main central moments – from the 2nd to the 4th ordinal, characterizing the random nature of the effective stiffness tensor.

The approaches to the use for the estimation of the effective deformation characteristics of composite materials with a periodic arrangement of inclusion centers, characterized by a random value of radii, developed in the article, could be practically extended to other physical and mechanical properties.

Keywords: random distribution function of inclusion stiffness tensor components; cell problem; effective stiffness tensor; effective deformation characteristics

ВВЕДЕНИЕ

Основные работы по определению эффективных характеристик структурно неоднородных сред основанных на усреднении дифференциальных уравнений со случайными быстро осциллирующими коэффициентами, как это было указано в работе [1], изложены в статьях [2-17].

В настоящей работе представлены методы оценки эффективных характеристик деформационных свойств композитных материалов периодической структуры со случайными значениями компонентов тензоров жесткости, т.е. решается задача приведения композитных материалов к эквивалентным по деформируемости однородным материалам. Процедура усреднения эффективных деформационных характеристик композитных материалов реализована в четырёх вариантах:

1. По заданному закону распределения независимых деформационных характеристик как случайных величин определяются их средние значения. В результате задача сводится к нахождению эффективного тензора жёсткости композитного материала периодической структуры со средними значениями деформационных характеристик матрицы и включений. Затем компоненты эффективного тензора жёсткости определяются методом асимптотического усреднения Бахвалова [18,19].

2. Методом асимптотического усреднения определяются значения эффективных компонентов тензора жёсткости в зависимости от значений компонентов тензора жесткости включений. В результате получаем параметрическую зависимость эффективного тензора жёсткости от деформационных характеристик включения. При этом следует заметить, что каждому фиксированному тензору жёсткости отвечает свой эквивалентный композитный материал с периодической структурой, которому соответствует свой эффективный тензор жёсткости. Далее, по заданному закону распределения компонентов деформационных характеристик включений определяются законы распределения компонентов эффективного тензора жёсткости, а потом уже находятся средние их значения и три их момента – дисперсия, асимметрия и эксцесс.

3. Определение эффективного тензора жёсткости композитного материала методом Монте-Карло [20], используя который компоненты эффективного тензора жёсткости находятся из решения задачи на ячейке. Свойства фаз периодической ячейки композитного материала при этом генерируются датчиком (датчиками) псевдослучайных чисел в соответствии с их законами распределения. При использовании этого метода модель периодической ячейки многократно обчисляется и, на основе полученных данных, вычисляются средние значения компонентов эффективного тензора жёсткости и три их центральных момента – дисперсия, асимметрия и эксцесс.

4. Определение эффективного тензора жёсткости композитного материала на представительном элементе объёма.

Цель данной работы показать правомерность определения тензора жёсткости композитного материала периодической структуры со случайными значениями деформационных характеристик фаз из решения стандартных задач на ячейке.

Разработанные в статье подходы к оценке эффективных деформационных характеристик композитных материалов периодической структуры со случайными деформационными характеристиками могут быть применены и для оценки других физико-механических свойств (вязкоупругих, теплофизических и др.).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим композитные материалы периодической структуры, у которых деформационные характеристики включений принимают случайные значения.

Геометрия таких материалов определяется ячейкой периодичности Π с расположенным в ней включением постоянного размера (рис.1). Для простоты будем предполагать, что включения имеют форму шара, либо цилиндра, либо слоя (в случае слоистых сред с фиксированным размером пакета слоев). Такое предположение не меняет сам подход к решению задачи усреднения уравнений теории упругости со случайными быстро осциллирующими коэффициентами в периодической области и оценки свойств композитных материалов периодической структуры со случайными деформационными характеристиками, а также принципиально не влияет на его общность.

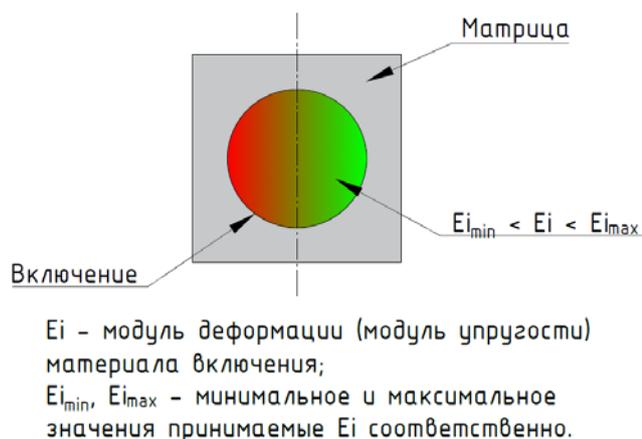


Рис.1. Периодическая ячейка Π композитного материала с включением.

Будем решать задачу приведения уравнений теории упругости со случайными быстро осциллирующими коэффициентами в области с периодической структурой к усредненному уравнению с постоянными коэффициентами. Решение такой задачи определяет процедуру приведения композитного материала периодической структуры к эквивалентному однородному с его эффективными деформационными характеристиками.

Предположим, что область, занимаемая композитным материалом, имеет характерный размер L и может быть представлена в виде плотно прилегающих друг к другу одинаковых по геометрической структуре ячеек Π с линейным размером l_{cell} . Модули упругости E_i включений в этих ячейках принимают случайные значения в интервале $E_{\min} < E_i < E_{\max}$. При этом также будем считать, что модули упругости в каждой ячейке E_i являются независимыми случайными величинами, распределенными по одному и тому же закону.

В ячейках Π фазы композитного материала контактируют по границе раздела. При этом коэффициенты дифференциальных уравнений теории упругости для каждой фазы определяются их тензорами жесткости и для каждой фазы предполагаются постоянными. Также будем считать, что на границе раздела фаз реализуются условия идеального контакта.

Приведем четыре метода оценки эффективного тензора жесткости рассматриваемого композитного материала. Для этого решим следующие задачи:

Задача 1. Простейший метод оценки механических свойств композитных материалов периодической структуры со случайным модулем упругости включений, который основан на определении среднего значения компонентов тензора жёсткости с последующим применением метода асимптотического

усреднения с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами (решение задачи на ячейке).

Задача 2. Определяем функцию распределения эффективного тензора жесткости композитного материала со случайным модулем упругости включений с использованием параметрической зависимости эффективного тензора жесткости от модуля упругости включения для композитных материалов периодической структуры с фиксированными значениями модуля E_i и функции распределения этого модуля как случайной величины. Затем, по известной функции распределения эффективного тензора жесткости вычисляем его среднее значение, а также три момента – дисперсию, асимметрию и эксцесс.

Задача 3. Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала со случайным модулем упругости включений, а также его дисперсии, асимметрии и эксцесса методом Монте-Карло [20]. Здесь после каждой реализации модуля упругости, который генерируется датчиком псевдослучайных чисел, решается задача на ячейке и определяется для данной реализации эффективный тензор жесткости. Затем полученное множество значений тензора жесткости обрабатывается в соответствии с методами математической статистики и в результате получаем значения компонентов эффективного тензора жесткости и их дисперсию, асимметрию и эксцесс.

Задача 4. Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала со случайным модулем упругости включений на представительном элементе объема.

2. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ ПО СРЕДНЕМУ ЗНАЧЕНИЮ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ВКЛЮЧЕНИЯ. ЗАДАЧА 1

Этот метод оценки эффективного тензора жесткости состоит в определении среднего модуля упругости включения по известному закону его распределения с последующим применением метода асимптотического усреднения.

Средний модуль упругости включения (математическое ожидание) определяется по формуле

$$M[E] = \bar{E} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} E \cdot f(E) dE, \quad (1)$$

где E – случайная величина (модуль упругости), принимающая значения на отрезке $E \in [E_{\min}, E_{\max}]$ по закону распределения с плотностью вероятности $f(E_i)$.

Таким образом, определив средний модуль упругости включения, мы свели задачу по оценке эффективного тензора жесткости к задаче определения эффективного тензора жесткости композитного материала с периодической структурой и модулем упругости включений \bar{E} . Её решение находится из решения периодической задачи на ячейке Π по быстрой переменной ξ [18]

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(A_{ij}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} (N_i(\xi) + \xi_i I) \right) = 0, \quad (2)$$

$$\left[N_i \right]_{\xi \in \Sigma} = \left[n_i A_{ij}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} (N_i(\xi) + \xi_i I) \right]_{\xi \in \Sigma} = 0, \quad (3)$$

где $A_{ij} = \|c_{ijkl}\|$ – матрицы-функции, составленные из компонент тензора жёсткости четвёртого ранга c_{ijkl} , ($i, j, k, l = 1, 2, 3$); $N_i(\xi)$ – периодические по быстрой переменной ξ матрицы-функции, представляющие собой решение задачи (2), (3), а $i_1 = 1, 2, 3$; I – единичная матрица; Σ – граница контакта матрица-включение; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор нормали к границе контакта Σ .

Затем, эффективный тензор жесткости определяется, как среднее значение по ячейке периодичности решения задачи (1), (2)

$$\hat{A}_{ij} = \frac{1}{|\Pi|} \int_{\Pi} \left(A_{ik} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (N_j(\xi) + \xi_j I) \right) dv = A_{ik} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (N_j(\xi) + \xi_j I). \quad (4)$$

Дисперсия (второй центральный момент) модуля упругости включения определяется по формуле

$$D[E] = \sigma^2 = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (E - \bar{E})^2 f(E) dE, \quad (5)$$

где σ – среднеквадратическое отклонение.

В рамках рассматриваемого подхода среднеквадратическое отклонение позволяет оценить возможные отклонения значений эффективного тензора жесткости от его среднего значения \hat{A}_{ij} при вариации модуля упругости включения относительно его среднего значения \bar{E} .

3. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ ПО ЗАВИСИМОСТИ ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ ОТ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ВКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ. ЗАДАЧА 2

Для решения второй задачи вначале необходимо решить периодические задачи (2), (3), где $A_{ij}(E_i)$ есть матрицы-функции, составленные из компонент тензора жёсткости и параметрически зависящие от модуля упругости, где модуль упругости принимает значения на отрезке $E_{\min} < E_i < E_{\max}$. Как результат решения такой задачи получаем зависимость эффективного тензора жесткости от модуля упругости включения E

$$\bar{A}_{ij}(E_i) = A_{ik}(E) \frac{\partial}{\partial \xi_k} (N_j(\xi) + \xi_j I), \quad (6)$$

а также его минимальные и максимальные значения равные соответственно $\bar{A}_{ij}^{\min} = \min(\bar{A}_{ij}(E_{\min}), \bar{A}_{ij}(E_{\max}))$ и $\bar{A}_{ij}^{\max} = \max(\bar{A}_{ij}(E_{\min}), \bar{A}_{ij}(E_{\max}))$.

Далее считая, что модуль упругости включения E является случайной величиной распределенной по закону с плотностью вероятности $f(E)$, находим закон распределения компонентов тензора жесткости, который будет иметь следующий вид

$$F(\bar{c}_{ijkl}) = F(C_{ijkl} \leq \bar{c}_{ijkl}(E_i)) = F(E \leq E_i) = \int_E^{E_i} f(E) dE. \quad (7)$$

При этом плотность вероятности распределения компонентов тензора напряжений будет определяться как производная от функции закона распределения по соответствующим компонентам тензора жесткости \bar{c}_{ijkl} т.е.

$$g(\bar{c}_{ijkl}) = \frac{d}{d\bar{c}_{ijkl}} F(\bar{c}_{ijkl}). \quad (8)$$

Зная функции распределения компонентов эффективного тензора жёсткости \bar{c}_{ijkl} , четыре основных их первых момента (начальный момент первого порядка и три центральных момента – со 2-го по 4-й порядок, соответственно) будут определяться по следующим формулам:

- Первый момент (математическое ожидание) – среднее значение (компоненты эффективного тензора жёсткости)

$$M[\bar{c}_{ijkl}] = \hat{c}_{ijkl} = \int_{\bar{c}_{ijkl}^{\min}}^{\bar{c}_{ijkl}^{\max}} \bar{c}_{ijkl} g(\bar{c}_{ijkl}) d\bar{c}_{ijkl}. \quad (9)$$

- Второй центральный момент – дисперсия

$$D[\bar{c}_{ijkl}] = \sigma^2 = \int_{\bar{c}_{ijkl}^{\min}}^{\bar{c}_{ijkl}^{\max}} (\bar{c}_{ijkl} - \hat{c}_{ijkl})^2 g(\bar{c}_{ijkl}) d\bar{c}_{ijkl}. \quad (10)$$

- Третий центральный момент

$$\mu_3 = \int_{\bar{c}_{ijkl}^{\min}}^{\bar{c}_{ijkl}^{\max}} (\bar{c}_{ijkl} - \hat{c}_{ijkl})^3 g(\bar{c}_{ijkl}) d\bar{c}_{ijkl}. \quad (11)$$

- Четвёртый центральный момент

$$\mu_4 = \int_{\bar{c}_{ijkl}^{\min}}^{\bar{c}_{ijkl}^{\max}} (\bar{c}_{ijkl} - \hat{c}_{ijkl})^4 g(\bar{c}_{ijkl}) d\bar{c}_{ijkl}. \quad (12)$$

По третьему и четвёртому моментам определяются два важных показателя функций распределения случайных величин. Это асимметрия и эксцесс, соответственно

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (13)$$

Зная функции распределения компонентов эффективного тензора жёсткости \bar{c}_{ijkl} , четыре основных их первых момента могут быть легко определены, по приведённым выше формулам (9)-(12).

Изложенная методика позволяет определять среднее значение эффективного тензора жёсткости \hat{A}_{ij} , его возможные минимальные и максимальные значения \hat{A}_{ij}^{\min} и \hat{A}_{ij}^{\max} , среднее квадратическое отклонение σ и, если необходимо, то асимметрию Sk и эксцесс Ex для композитных материалов с периодической структурой включений, модуль упругости которых является случайной величиной.

4. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО. ЗАДАЧА 3

Определение эффективного тензора жёсткости композитного материала со случайным модулем упругости включений, а также его дисперсии, асимметрии и эксцесса методом Монте-Карло заключается в следующем:

1. С помощью датчика случайных чисел генерируются псевдослучайные значения модуля упругости включения.
2. Для каждого значения модуля упругости включения из решения задачи на ячейке вычисляются компоненты эффективного тензора жёсткости.
3. Затем проводится статистическая обработка полученных результатов имитационного моделирования компонентов эффективного тензора жёсткости.

Обработка «экспериментов» по имитационному моделированию эффективных деформационных свойств проводится по формулам:

• Первый момент (математическое ожидание) – компоненты эффективного тензора жёсткости

$$M[\bar{c}_{ijkl}] = \hat{c}_{ijkl} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{c}_{ijkl}(E_n). \quad (14)$$

• Второй центральный момент – дисперсия

$$D[\bar{c}_{ijkl}] = \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\bar{c}_{ijkl}(E_n) - M)^2. \quad (15)$$

• Третий центральный момент

$$\mu_3 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\bar{c}_{ijkl}(E_n) - M)^3. \quad (16)$$

• Четвёртый центральный момент

$$\mu_4 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\bar{c}_{ijkl}(E_n) - M)^4. \quad (17)$$

Затем асимметрия и эксцесс, определяются по формулам (13).

5. ПРЕДСТАВИТЕЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ОБЪЕМА И ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ СЛОИСТОГО МАТЕРИАЛА

Представительный элемент объёма слоистой среды строится последовательным наращиванием ячеек со случайной величиной модуля упругости слоя, который определялся с использованием генератора псевдослучайных чисел. При этом для каждого пакета, состоящего из набора ячеек, тензоры жёсткости определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{1111} &= \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle^{-1}; \quad \hat{c}_{1122} = \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle^{-1}; \\ \hat{c}_{2222} &= \left\langle \frac{E}{1-\nu^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle^2 \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle^{-1}; \\ \hat{c}_{2233} &= \left\langle \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle^2 \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle^{-1}; \\ \hat{c}_{1212} &= \hat{c}_{1313} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1+\nu}{E} \right\rangle^{-1} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{G} \right\rangle^{-1}; \\ \hat{c}_{2323} &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle = \frac{1}{2} (\hat{c}_{2222} - \hat{c}_{2233}). \end{aligned} \quad (18)$$

Далее за представительный элемент объёма принимается объём пакета слоёв, состоящий из минимального набора ячеек, для которого разница в значениях компонентов тензора жёсткости по сравнению с предыдущим пакетом слоёв меньше необходимой заданной точности (обычно задаётся в %), которая определяется решаемой задачей.

6. ОЦЕНКА ДЕФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК (ПРИМЕР РАСЧЕТОВ)

Для начала заметим, что если модуль упругости включений в композитных материалах принимает значения E_{\min} до E_{\max} , то для них область возможных значений эффективного тензора жесткости будет варьироваться в пределах от $\bar{A}_{ij}^{\min} = \min(\bar{A}_{ij}(E_{\min}), \bar{A}_{ij}(E_{\max}))$ и до $\bar{A}_{ij}^{\max} = \max(\bar{A}_{ij}(E_{\min}), \bar{A}_{ij}(E_{\max}))$.

Получаемые средние значения для эффективного тензора жёсткости \hat{A}_{ij} , среднеквадратическое отклонение σ и, если необходимо, асимметрия Sk и эксцесс Ex можно рассматривать как оценки соответствующих характеристик эффективного тензора жесткости композитных материалов периодической структуры, модуль упругости включений у которых принимает случайные значения в соответствии с их законом распределения.

Далее оценим эффективные деформационные характеристики слоистой среды, состоящей из переслаивания двух материалов, где один из них выполняет роль матрицы, а другой – роль включения, при этом будем считать, что слои ортогональны оси $x_1(\xi_1)$ (рис.2).

В этом случае задача на ячейке (2), (3) упрощается и принимает следующий вид [20]

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(A_{11}(\xi) \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + A_{1j}(\xi) \right) = 0, \quad \xi \notin \Sigma, \quad (19)$$

$$\left[N_j \right]_{\xi \in \Sigma} = \left[\left(A_{11}(\xi) \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + A_{1j}(\xi) \right) n_i \right]_{\xi \in \Sigma} = 0, \quad (20)$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = (1, 0, 0)$ вектор внешней нормали к границе раздела слоёв равен; $\xi = \xi_1$; $i, j = 1, 2, 3$.

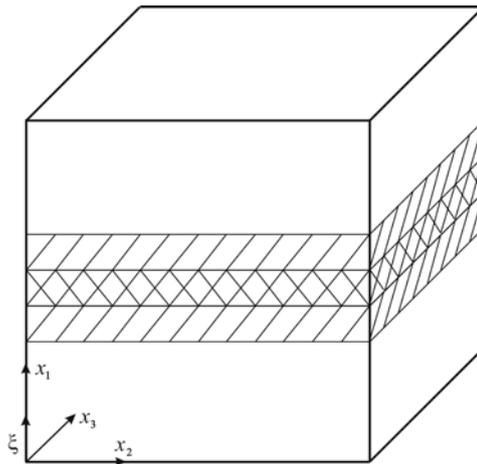


Рис.2. Модель слоистой среды.

Решение периодической задачи на ячейке (19), (20) можно представить в матричном виде следующим образом [20]

$$\hat{A}_{ij} = \langle A_{ij} \rangle + \langle A_{i1} A_{11}^{-1} \rangle \langle A_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle A_{11}^{-1} A_{1j} \rangle - \langle A_{i1} A_{11}^{-1} A_{1j} \rangle \quad (21)$$

или покомпонентной записи [19,20]

$$\hat{c}_{kij} = \langle c_{kij} \rangle + \langle c_{kim1} c_{m1n1}^{-1} \rangle \langle c_{n1p1}^{-1} \rangle^{-1} \langle c_{p1q1}^{-1} c_{q1lj} \rangle - \langle c_{kim1} c_{m1n1}^{-1} c_{n1lj} \rangle. \quad (22)$$

Здесь под c_{n1p1}^{-1} понимается элемент матрицы A_{11}^{-1} обратной к матрице жёсткости A_{11} .

Далее будем полагать, что слои изотропны. Тогда компоненты тензоров модулей упругости слоёв, как известно, характеризуются двумя независимыми постоянными – модулем Юнга E и коэффициентом ν Пуассона, которые определяются в стандартных экспериментальных исследованиях. В этом случае компоненты тензора жёсткости четвёртого ранга c_{ijkl} выражаются через независимые деформационные характеристики E и ν следующим образом [21]

$$c_{ijkl} = \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right), \quad (23)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$).

В условиях принятых предположений слоистая среда ведёт себя как макроскопически трансверсально-изотропная среда с плоскостью изотропии параллельной плоскости напластования. Компоненты эффективного тензора жёсткости при этом, как это следует из (21)-(23), определяются по формулам [20,21].

В качестве примера рассмотрим расчеты по определению эффективного тензора жесткости слоистой среды, которая представляет собой переслаивание песчаника мощностью 0.85 м (матрица) и алевролита мощностью 0.25 м (включение). В этом случае размер пакета слоёв будет равен $l_{cell} = 1.1$ м. Модуль общей деформации песчаника примем равным $E_s = 6000$ МПа, а коэффициент Пуассона $\nu_s = 0.15$. Также будем предполагать, что у алевролита модуль деформации лежит в пределах от 500 МПа до 1100 МПа, а коэффициент Пуассона постоянный и равен $\nu_s = 0.15$. Такие значения характеристик имеют слоистые горные породы, залегающие, например, в основании плотины на р. Белая (Агидель), где по результатам полевых испытаний модуль общей деформации поперёк напластования принимался равным $E_1 = E_{\perp} = 2453$ МПа.

Далее рассмотрим три варианта законов распределения значений модуля упругости алевролита в пакете слоёв: равномерное, нормальное и распределение Вейбулла.

Для равномерного закона распределения, где плотность распределения модуля упругости алевролита описывается функцией $f(E) = \frac{1}{E_{\max} - E_{\min}}$, среднее значение модуля упругости алевролита $M[E] = 800$ МПа, а среднеквадратическое отклонение – $\sigma[E] = 173$ МПа.

При нормальном распределении, где плотность распределения имеет вид $f(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(E-m)^2}{2\sigma^2}\right)$, математическое ожидание модуля упругости аргиллита $M[E] = m = 800$ МПа, а среднеквадратическое отклонение,

определяемое правилом 3-х сигм на возможных значениях толщины слоя аргиллита, а именно, $[E_{\min} = m - 3\sigma \leq E \leq E_{\max} = m + 3\sigma]$, будет равно $\sigma[E] = 100$ МПа. При этом, коэффициенты асимметрии и эксцесса равны $Sk = 0$, $Ex = 0$, соответственно.

В случае закона распределения Вейбулла плотность распределения вероятности модуля упругости алевролита описывается функцией

$$f(l_m) = \frac{p}{\lambda} \left(\frac{E - \mu}{\lambda} \right)^{p-1} \exp\left(-\frac{E - \mu}{\lambda}\right)^p, \text{ а сама функция распределения имеет вид}$$

$$F(E) = 1 - \exp\left(-\frac{E - \mu}{\lambda}\right)^p. \text{ Здесь } \mu = E_{\min} \text{ – параметр сдвига, } p \text{ – параметр формы}$$

кривой распределения, λ – параметр масштаба. Параметры p и λ находились из решения нелинейной системы уравнений, определяемой средним значением толщины слоя алевролита и модой, а именно

$$\begin{cases} M[E] = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) = 800 \\ F(E) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\lambda (\ln 2)^{1/p} - \mu}{\lambda}\right)^p\right) = 0.5 \end{cases} \quad (24)$$

В результате решения системы нелинейных уравнений (24) были получены следующие значения параметров распределения Вейбулла: $p = 0.63$, $\lambda = 564$.

При расчёте эффективного тензора жёсткости в Задаче 2 и Задаче 4 использовались следующие законы распределения модуля упругости алевролита: равномерный (Задачи 2.1 и 4.1), нормальный (Задачи 2.2 и 4.2) и Вейбулла (Задачи 2.3 и 4.3). В Задаче 3 использовался нормальный закон распределения. В расчетах методом Монте-Карло (Задачи 3 и 4) были задействованы соответствующие генераторы псевдослучайных чисел.

При расчётах эффективного тензора жёсткости в Задаче 4 представительный элемент объёма определялся из условия, когда разница между значениями компонентов эффективного тензора жёсткости, полученными на шаге расчета и предыдущем шаге, не превышала 3%. Для такого ограничения размер представительного элемента объёма для равномерного закона распределения соответствовал 4 ячейкам, для нормального закона распределения 3 ячейкам, а для закона Вейбулла 10 ячейкам.

Результаты расчётов максимальных и минимальных возможных значений компонентов эффективного тензора жёсткости слоистой среды, представлены в таблице 1, а компонентов эффективного тензора жёсткости слоистой среды и их вероятностные характеристики – в таблице 2.

Таблица 1.
Максимальные и минимальные значения компонентов эффективного тензора жёсткости.

	\hat{c}_{1111} , МПа	\hat{c}_{2222} , МПа	\hat{c}_{1122} , МПа	\hat{c}_{2233} , МПа	$\hat{c}_{1212} = G_{\perp}$, МПа
max	2904	5261	512.4	866.1	1196
min	2285	4758	403.2	774.2	940.8

Таблица 2.
Значения компонентов эффективного тензора жёсткости.

№ задачи	Вероятностные параметры	\hat{c}_{1111} , МПа	\hat{c}_{2222} , МПа	\hat{c}_{1122} , МПа	\hat{c}_{2233} , МПа	$\hat{c}_{1212} = G_{\perp}$, МПа
1	M	2557	5009	451.3	819.0	1053
2.1	M	2535.25	5006.94	447.40	818.15	1043.93
	σ	258.29	35.15	45.58	12.11	106.36
	Sk	-0.079	0.006	-0.079	-0.042	-0.079
	Ex	-1.189	-1.200	-1.189	-1.195	-1.189
2.2	M	2550.82	5008.57	450.15	818.81	1050.34
	σ	200.12	27.29	35.32	9.39	82.40
	Sk	-0.159	-0.049	-0.159	-0.111	-0.159
	Ex	-0.632	-0.663	-0.632	-0.648	-0.632
2.3	M	2489.10	5000.57	439.25	815.97	1024.92
	σ	246.83	33.41	43.56	11.54	101.64
	Sk	0.128	0.218	0.128	0.167	0.128
	Ex	-1.107	-1.056	-1.107	-1.087	-1.107
3	M	2545.91	5008.37	449.28	818.65	1048.32
	σ	255.51	34.84	45.09	11.99	105.21
	Sk	-0.108	-0.025	-0.108	-0.072	-0.108
	Ex	-1.189	-1.202	-1.189	-1.196	-1.189
4.1	M	2466.09	4992.74	435.19	813.21	1015.45
	σ	338.37	43.63	59.71	15.06	139.33
	Sk	0.358	0.368	0.358	0.367	0.358
	Ex	-1.870	-2.333	-1.870	-2.333	-1.870
4.2	M	2581.14	5024.20	455.50	824.12	1062.82
	σ	258.77	35.31	45.67	11.80	106.55
	Sk	0.472	0.368	0.472	0.367	0.472
	Ex	-1.819	-2.333	-1.819	-2.333	-1.819
4.3	M	2460.36	5011.49	434.18	819.73	1013.09
	σ	328.97	41.88	58.05	14.29	135.46
	Sk	0.263	0.129	0.263	0.115	0.263
	Ex	-2.036	-2.333	-2.036	-2.333	-2.036

Из таблицы 2 видно, что максимальные расхождения между полученными значениями эффективных тензоров жесткости по отношению к решению Задачи 1 для равномерного закона распределения составляло менее 3.6% (Задачи 2 и 4), для нормального закона распределения менее 0.1% (Задачи 2, 3 и 4) и для закона распределения Вейбулла менее 3.8% (Задачи 2 и 4). Также из этой таблицы видно, что максимальные расхождения между значениями эффективных тензоров жесткости в Задаче 2 было не более 2.4%, а в Задаче 4 не более 4.7% по отношению к соответствующим в этих Задачах значениям нормального распределения. Следует отметить, что расхождение значений для равномерного закона распределения в Задачах 2 и 4 было менее 2.8%, а для нормального закона распределения в Задачах 2, 3 и 4 и для закона распределения Вейбулла в Задачах 2 и 4 – менее 1.2%. Заметим также, что максимальные расхождения во всех рассмотренных случаях достигались для закона распределения Вейбулла.

Таким образом, максимальное расхождение между значениями эффективного тензора жесткости рассматриваемой слоистой среды с использованием вышеописанных 4-х методов не превышало 4.7%. Это говорит о применимости предложенных методов оценки эффективного тензора жёсткости для композитных материалов периодической структуры со случайными значениями компонентов тензоров жесткости.

Сравнение модуля общей деформации слоистого основания Иштугановского гидроузла на р. Белая, полученного по результатам полевых испытаний с результатами, полученными расчётным путём с пересчетом по значениям эффективного тензора жёсткости (таблица 2), представлены в таблице 3.

Таблица 3.

Значения модуля общей деформации ($E_1 = E_{\perp}$, МПа) слоистой среды поперек напластования (р. Белая).

Полевые испытания	Расчетные варианты							
	1	2.1	2.2	2.3	3	4.1	4.2	4.3
2453	2557	2535	2550	2489	2546	2466	2581	2460

Из этой таблицы следует, что лучше всего результатам экспериментальных определений соответствуют значения, полученные расчетом в случае, когда величина модуля упругости слоя подчинялась закону распределения Вейбулла. При этом расхождение в значениях было менее 1.5%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены четыре метода оценки эффективных характеристик деформационных свойств композитных материалов периодической структуры со случайными значениями компонентов тензоров жесткости, т.е. четыре метода сведения композитных материалов к эквивалентным однородным по деформируемости материалам.

Из сравнения результатов, представленных в таблицах 1-3, следует вывод о применимости предложенного вероятностного подхода (Задача 2), не основанного на Методе Монте-Карло, к определению эффективного тензора жёсткости на ячейке периодичности. Такой подход позволяет получать не только средние значения (эффективный тензор жёсткости), но и три основных центральных момента – со 2-го по 4-й порядок, которые характеризуют случайную природу эффективного тензора жёсткости. Таким образом, оценка эффективных деформационных характеристик композитных материалов периодической структуры со случайными значениями компонентов тензоров и исследование их вероятностных характеристик сводится к решению на области периодичности, а именно, на ячейке периодичности Π .

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А.Н., Власов Д.А., Сорокин Г.С., Карнет Ю.Н. *Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала с периодическим расположением центров включений со случайным радиусом* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т.29. – №4. – С.502-519.

2. Власов А.Н. *Сведение уравнения теории упругости со случайными коэффициентами на области с периодической структурой к усредненному уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами. Эффективный тензор жесткости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №3. – С.309-322.
3. Козлов С.М. *Осреднение дифференциальных операторов с почти-периодическими быстро осциллирующими коэффициентами* // Матем. сб. – 1978. – Т.107(149). – №2(10). – С.199-217.
4. Козлов С.М. *Осреднение случайных структур* // Доклады АН СССР. – 1978. – Т.241. – №5. – С.1016-1019.
5. Козлов С.М. *Проводимость двумерных случайных сред* // УМН. – 1979. – Т.34. – №4(208). – С.193-194.
6. Козлов С.М. *Осреднение случайных операторов* // Матем. сб. – 1979. – Т.109(151). – №2(6). – С.188-202.
7. Клепцына М.Л., Пятницкий А.Л. *Усреднение случайной нестационарной задачи конвекции-диффузии* // УМН. – 2002. – Т.57. – №4(346). – С.95-118.
8. Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. – М.: Мир, 1982. – 336 с.
9. Паньков А.А. *Статистическая механика пьезокомпозитов*. – Пермь: Издательство Пермского государственного технического университета, 2009. – 480 с.
10. Паньков А.А. *Механика пьезокомпозитов. Электро- и магнитоупругость неоднородных сред*. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 476 с.
11. Eshelby J.D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems* // Proc. R.Soc. Lond. A. – 1957. – Vol.241. – Pp.376-396.
12. Frisch U. *Wave Propagation in Random Media* / In book: Probabilistic Methods in Applied Mathematics. Vol.1. – New York, Academic Press, 1968. – Pp.75-198.
13. Kleptsyna M., Piatnitski A., Popier A. *Homogenization of random parabolic operators. Diffusion approximation* // Stochastic Processes and their Applications. – 2014. – 25 p.
14. Mohammed M., Sango M. *Homogenization of Linear Hyperbolic Stochastic Partial Differential Equation with Rapidly Oscillating Coefficients: The Two Scale Convergence Method* // Asymptotic Anal. – 2015. – Vol.91. – No.3-4. – Pp.341-371.
15. Wei Wang, Daomin Cao, Jinqiao Duan. *Effective Macroscopic Dynamics of Stochastic Partial Differential Equations in Perforated Domains* // SIAM J. Math. Anal. – 2007. – Vol.38. – No.5. – 1508.
16. Беран М.Дж. *Применение статистических теорий для определения тепловых, электрических и магнитных свойств неоднородных материалов* / В книге: Композиционные материалы. Т.2. Механика композиционных материалов. – М.: Мир, 1978. – 568 с.
17. Беляев А.Ю. *Усреднение в задачах теории фильтрации*. – М.: Наука, 2004. – 200 с.
18. Бахвалов Н.С. *Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами* // Доклады АН СССР. – 1975. – Т.221. – №3. – С.516-519.
19. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
20. Соболев И.М. *Метод Монте-Карло*. – М.: Наука, 1968. – 64 с.
21. Власов А.Н., Мерзляков В.П. *Усреднение деформационных и прочностных*

свойств в механике скальных пород. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.

22. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. – М.: Издательство Московского университета, 1984. – 336 с.

REFERENCES

1. Vlasov A.N., Vlasov D.A., Sorokin G.S., Karnet Yu.N. *Otsenka ehffektivnogo tenzora zhestkosti kompozitnogo materiala s periodicheskim raspolozheniem tsentrov vklyucheniij so sluchajnym radiusom [Estimation of the effective stiffness tensor of a composite material of a periodic structure with random characteristics of the inclusion]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2023, Vol.29, No.4, Pp.502-519.
2. Vlasov A.N. *Svedenie uravneniya teorii uprugosti so sluchajnymi koehffitsientami na oblasti s periodicheskoj strukturoj k usrednennomu uravneniyu teorii uprugosti s postoyannymi koehffitsientami. EHffektivnyj tenzor zhestkosti [Reduction of the equation of elasticity theory with random coefficients on a periodical position of centers of includes with a random radius to the average equation with constant coefficients. Effective stiffness tensor]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2021, Vol.27, No.3, Pp.309-322.
3. Kozlov S.M. *Averaging differential operators with almost periodic, rapidly oscillating coefficients*. *Math. USSR-Sb.*, 1979, Vol.35, No.4, Pp.481-498.
4. Kozlov S.M. *Osrednenie sluchajnykh struktur [Averaging of random structures]*. *Doklady AN SSSR*, 1978, Vol.241, No.5, Pp.1016-1019.
5. Kozlov M. *Conductivity of two-dimensional random media*. *Russian Math. Surveys*, 1979, Vol.34, No.4, Pp.168-169.
6. Kozlov S.M. *Averaging of random operators*. *Math. USSR-Sb.*, 1980, Vol.37, No.2, Pp.167-180.
7. Klepcyna M.L., Pyatniczkiy A.L. *Homogenization of a random non-stationary convection-diffusion problem*. *Russian Mathematical Surveys*, 2002, Vol.57, No.4, Pp.729-751.
8. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, Wiley, 1979, 348 p.
9. Pan'kov A.A. *Statisticheskaya mekhanika p'ezokompozitov [Statistical mechanics of piezocomposites]*. Perm', Izdatel'stvo Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2009, 480 p.
10. Pan'kov A.A. *Mekhanika p'ezokompozitov. Ehlektro- i magnitoupругost' neodnorodnykh sred [Mechanics of piezocomposites. Electro-and magnetoelasticity of inhomogeneous media]*. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011, 476 p.
11. Eshelby J.D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems*. *Proc. R.Soc. Lond. A*, 1957, Vol.241, Pp.376-396.
12. Frisch U. *Wave Propagation in Random Media*. Probabilistic Methods in Applied Mathematics, Vol.1, New York, Academic Press, 1968. Pp.75-198.
13. Kleptsyna M., Piatnitski A., Popier A. *Homogenization of random parabolic operators. Diffusion approximation*. *Stochastic Processes and their Applications*, 2014, 25 p.
14. Mohammed M., Sango M. *Homogenization of Linear Hyperbolic Stochastic Partial Differential Equation with Rapidly Oscillating Coefficients: The Two Scale Convergence Method*. *Asymptotic Anal.*, 2015, Vol.91, No.3-4, Pp.341-371.

15. Wei Wang, Daomin Cao, Jinqiao Duan. *Effective Macroscopic Dynamics of Stochastic Partial Differential Equations in Perforated Domains*. SIAM J. Math. Anal., 2007, Vol.38, No.5, 1508.
16. Beran M.Dzh. *Primenenie statisticheskikh teorii dlya opredeleniya teplovykh, ehlektricheskikh i magnitnykh svoystv neodnorodnykh materialov [Application of statistical theories to determine thermal, electrical and magnetic properties of inhomogeneous materials]*. V knige Kompozitsionnye materialy. T.2. Mekhanika kompozitsionnykh materialov. Moskva, Mir, 1978, 568 p.
17. Belyaev A.Yu. *Usrednenie v zadachakh teorii fil'tratsii [Homogenization in the problems of groundwater flows]*. Moskva, Nauka, 2004, 200 p.
18. Bakhvalov N.S. *Osrednenie differentsial'nykh uravnenij s chastnymi proizvodnymi s bystro ostsilliruyushhimi koehffitsientami [Averaging of partial differential equations with rapidly oscillating coefficients]*. Doklady AN SSSR, 1975, Vol.221, No.3, Pp.516-519.
19. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh [Averaging of Processes in Periodic Media]*. Moskva, Nauka, 1984, 352 p.
20. Sobol' I.M. *Metod Monte-Karlo [The Monte-Carlo method]*. Moskva, Nauka, 1968, 64 p.
21. Vlasov A.N., Merzliakov V.P. *Usrednenie deformatsionnykh i prochnostnykh svoystv v mekhanike skal'nykh porod [Homogenization of deformation and strength properties in rock mechanics]*. Moskva, Izdatel'stvo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2009, 208 p.
22. Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1984, 336 p.

Поступила в редакцию 22 июля 2024 года.

Сведения об авторах:

Власов Александр Николаевич – д.т.н., зав. отд., дир., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: bah1955@ya.ru

Сорокин Георгий Сергеевич – асп., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: gersorokin@gmail.com

Власов Даниил Александрович – к.т.н., преп., ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ», г. Москва, Россия; e-mail: vlasov.daniil1944@gmail.com

Карнет Юлия Николаевна – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: missis.karnet@yandex.ru