



ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ АРМИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ*

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

АННОТАЦИЯ

Сформулирована связанная задача неизотермического упругопластического динамического деформирования гибких круговых цилиндрических оболочек, армированных волокнами по произвольным траекториям. Плохое сопротивление таких композитных конструкций поперечным сдвигам и волновые процессы в них моделируются в рамках теории изгиба Амбарцумяна. Учитывается обжатие оболочек. Геометрическая нелинейность задачи рассматривается в приближении Кармана. Пластическое деформирование материалов композиции описывается определяющими уравнениями теории течения с изотропным упрочнением. Функции нагружения компонентов композиции зависят как от параметра упрочнения, так и от температуры. Учитывается также термочувствительность упругих и теплофизических характеристик этих материалов. По толщине оболочек температура задается полиномом высокого порядка. Приведены двумерные уравнения теплового баланса тонкостенной композитной конструкции, соответствующие такому представлению температуры в ней. Для интегрирования поставленной нелинейной двумерной задачи разработана явная численная схема. Исследовано упругопластическое и термоупругопластическое осесимметричное деформирование длинных гибких цилиндрических оболочек, армированных в продольном и окружном направлениях. Конструкции нагружены внутренним давлением, аналогичным давлению в воздушной взрывной волне. Продемонстрировано, что для практически приемлемого расчета теплового отклика в динамически изгибаемых армированных оболочках температуру по их толщине нужно аппроксимировать полиномом 7-го порядка. Показано, что стеклопластиковые оболочки при указанном нагружении дополнительно нагреваются не более чем на 10-12°C, и их можно рассчитывать без учета теплового отклика. Металлокомпозитные оболочки могут дополнительно нагреваться на 40°C, и расчет их неупругого динамического поведения необходимо проводить с учетом возникающих в них температурных полей. В противном случае расчетное деформированное состояние компонентов металлокомпозитов может быть сильно (на несколько десятков процентов) искажено.

Ключевые слова: цилиндрические оболочки; армирование; динамические нагрузки; связанная термоупругопластичность; теория Амбарцумяна; геометрическая нелинейность; явная численная схема

THERMOELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF REINFORCED CYLINDRICAL SHELLS UNDER DYNAMIC LOADING

Yankovskii A.P.

* Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

*Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch
of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

ABSTRACT

A related problem of non-isothermal elastoplastic dynamic deformation of flexible circular cylindrical shells reinforced with fibers along arbitrary trajectories is formulated. The weak resistance of such composite structures to transverse shears and the wave processes in them are modeled within the framework of Ambartsumyan's theory of bending. The compression of the shells is taken into account. The geometric nonlinearity of the problem is considered in the Karman approximation. Plastic deformation of the components of the composition is described by the governing equations of the theory of flow with isotropic hardening. The loading functions of the composition components depend on both the strengthening parameter and temperature. The thermal-sensitivity of the elastic and thermophysical characteristics of these materials is also taken into account. In the transverse direction of the shells, the temperature is specified by a high-order polynomial. Two-dimensional heat balance equations for a thin-walled composite structure corresponding to this representation of the temperature in it are presented. An explicit numerical scheme has been developed to integrate the posed nonlinear two-dimensional problem. The elastoplastic and thermo-elastoplastic axisymmetric deformation of long flexible cylindrical shells reinforced in the longitudinal and circumferential directions has been studied. Constructions are loaded with internal pressure similar to the pressure in an air blast wave. It has been demonstrated that for a practically acceptable calculation of the thermal response in dynamically bending reinforced shells, the temperature across their thickness must be approximated by a 7th order polynomial. It has been shown that fiberglass shells under the specified load are additionally heated by no more than 10-12°C, and they can be calculated without taking into account the thermal response. Metal-composite shells can be additionally heated by 40°C, and the calculation of their inelastic dynamic behavior must be carried out taking into account the temperature fields that arise in them. Otherwise, the calculated deformed state of the components of metal-compositions can be greatly (by several tens of percent) distorted.

Keywords: cylindrical shells; reinforcement; dynamic loads; coupled thermoelastic-plasticity; Ambartsumyan theory; geometric nonlinearity; explicit numerical scheme

ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные конструкции из композиционных материалов (КМ) часто подвергаются интенсивному термосиловому нагружению [1-11], при котором они могут деформироваться неупруго [3,6,8,9,12-15]. Поэтому актуальна проблема моделирования неізотермического упругопластического динамического деформирования КМ-пластин и оболочек, которая на данный момент времени находится на стадии становления [3,6,9,12,16-21]. Обычно расчеты неупругой динамики КМ-конструкций, как правило слоистых, проводят без учета теплового отклика в них [3,8,9,12] (исключение составляют лишь задачи пробивания [6]). Поэтому в [20] была разработана модель термоупругопластического деформирования перекрестно армированного волокнистого материала и построено численное решение термомеханической задачи динамического изгиба КМ-пластин.

Для моделирования волновых процессов в динамически изгибаемых тонкостенных КМ-конструкциях и учета их плохого сопротивления поперечным сдвигам используют неклассические теории Тимошенко-Рейсснера [2,3,6,8,10],

Амбарцумяна [1,19-21] и Редди [4,5]. Численные решения нелинейных задач динамики пластин и оболочек получают с использованием явных схем [3,8-10, 19-21] или неявных методов Ньюмарка [12,22].

Настоящее исследование посвящено моделированию неизоотермического упругопластического динамического деформирования гибких цилиндрических оболочек с произвольными структурами армирования. При этом слабое сопротивление поперечным сдвигам учитывается в рамках теории Амбарцумяна [1], а интегрирование связанной нелинейной термомеханической задачи осуществляется с использованием явной численной схемы.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РАСЧЕТА

Рассматривается замкнутая цилиндрическая оболочка длиной D , радиуса R и толщиной $2h \ll \min(D, R)$ (рис.1), с которой связана цилиндрическая система координат x_i так, что x_1 – осевая ($0 \leq x_1 \leq D$), x_2 – угловая ($0 \leq x_2 < 2\pi$), x_3 – радиальная ($R-h \leq x_3 \leq R+h$) координаты. Конструкция армирована N семействами волокон (возможно, пространственно) с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq N$). Структура армирования однородна в поперечном направлении, т.е. плотности и направления армирования не изменяются по координате x_3 , как показано на рис.2 для представительного элемента композиции, искривленность которого не изображена.

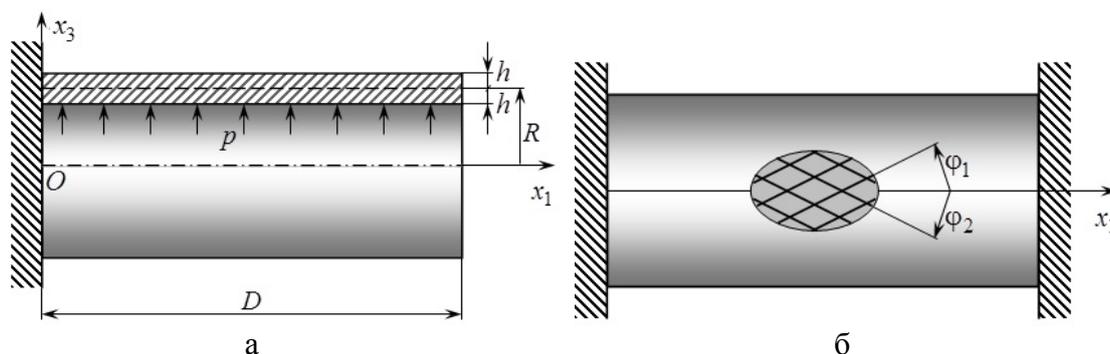


Рис.1. Цилиндрическая оболочка: жестко закрепленная на левом торце (а) и жестко закрепленная на обоих торцах (б).

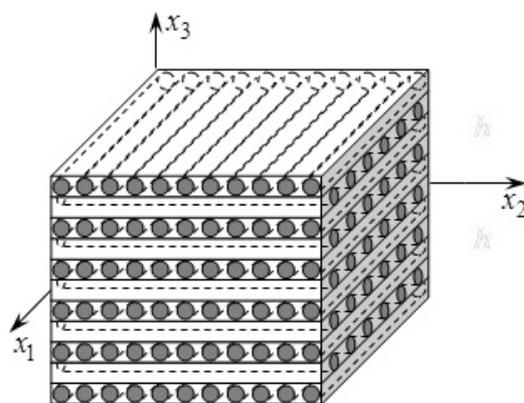


Рис.2. Представительный элемент оболочки с ортогональной структурой армирования по эквидистантным поверхностям.

Предполагается, что на лицевых поверхностях КМ-оболочки внешними касательными силами можно пренебречь и в случае пространственного армирования выполняются требования, предъявляемые к структуре, которые изложены в замечании в [20]. В случае перекрестного армирования по эквидистантным цилиндрическим поверхностям (см. рис.1б и рис.2) эти требования заведомо выполняются. Тогда перемещения точек гибкой оболочки U_i и осредненные деформации ее композиции ε_{ij} в рамках теории Амбарцумяна аппроксимируются так [1,19]

$$\begin{aligned} U_1(t, \mathbf{r}) &= u_1(t, \mathbf{x}) - z\partial_1 w + f_1^0(z)\varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \\ U_2(t, \mathbf{r}) &= (R+z)R^{-1}u_2(t, \mathbf{x}) + \partial_2 w + f_2^0(z)\varepsilon_{23}^0(t, \mathbf{x}), \\ U_3(t, \mathbf{r}) &= w(t, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3), \quad x_3 \equiv R+z, \\ \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \Omega &= \{\mathbf{x}: 0 \leq x_1 \leq D, 0 \leq x_2 < 2\pi\}; \\ \varepsilon_{11}(t, \mathbf{r}) &= \partial_1 u_1 - z\partial_1^2 w + f_1^0(z)\partial_1 \varepsilon_{i3}^0 + (\partial_1 w)^2/2, \\ \varepsilon_{22}(t, \mathbf{r}) &= (R+z)^{-1} \times [(R+z)R^{-1}\partial_2 u_2 + \partial_2^2 w + w + f_2^0(z)\partial_2 \varepsilon_{23}^0] + \\ &\quad + (R+z)^{-2} (\partial_2 w)^2/2, \\ 2\varepsilon_{12}(t, \mathbf{r}) &= (R+z)^{-1} [\partial_2 u_1 - z\partial_1 \partial_2 w + f_1^0(z)\partial_2 \varepsilon_{i3}^0] + (R+z)R^{-1}\partial_1 u_2 + \\ &\quad + \partial_1 \partial_2 w + f_2^0(z)\partial_1 \varepsilon_{23}^0 + (R+z)^{-1} \partial_1 w \partial_2 w, \\ \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) &= h^{-2} (h^2 - z^2) \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} f_i^0(z) &\equiv 2h^{-2} [h^2 \Phi_i^{(0)}(z) - \Phi_i^{(2)}(z)] \quad (i = 1, 2), \\ \Phi_1^{(l)}(z) &\equiv h^{-l} (1+l)^{-1} z^{l+1}, \quad \Phi_2^{(l)}(z) \equiv h^{-l} (R+z) \Psi_l(z), \\ \Psi_l(z) &\equiv \sum_{m=0}^{l-1} \frac{(-1)^m R^m z^{l-m}}{l-m} - R^l \ln(R+z), \quad l = 0, 2; \end{aligned} \quad (3)$$

w – прогиб; u_1, u_2 – продольное и окружное перемещения точек срединной поверхности; ε_{i3}^0 – деформации поперечных сдвигов в точках этой поверхности; z – новая переменная в радиальном направлении, которая в отличие от x_3 отсчитывается не от оси цилиндрической системы координат, а от срединной поверхности конструкции ($|z| \leq h$), как это традиционно принято в теории оболочек [1-6]; t_0 – начальный момент времени t ; Ω – область, занимаемая отсчетной поверхностью ($z = 0$); ∂_i – оператор дифференцирования по координате x_i . Неизвестными в (1) и (2) при учете (3) являются двумерные функции w, u_i и ε_{i3}^0 ($i = 1, 2$).

В настоящей работе исследуется динамика цилиндрической КМ-оболочки как тонкостенной гибкой термомеханической системы, поэтому с приемлемой для практических приложений точностью нормальное напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ можно линейно аппроксимировать по z [2]

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} z + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad (4)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – известные из силовых граничных условий напряжения на внешней (+) и внутренней (–) лицевых поверхностях.

К соотношениям (1), (2) и (4) необходимо присоединить двумерные уравнения движения гибкой цилиндрической оболочки (см. (22), (23) в [19]) и определяющие соотношения, связывающие скорости напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ и температуры $\dot{\Theta}$ в ее композиции [20], которые целесообразно записать в матричном виде

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{p}, \quad (5)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_3, \dot{\sigma}_4, \dot{\sigma}_5, \dot{\sigma}_6)^T \equiv (\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{23}, \dot{\sigma}_{31}, \dot{\sigma}_{12})^T, \quad (6)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = (\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3, \dot{\epsilon}_4, \dot{\epsilon}_5, \dot{\epsilon}_6)^T \equiv (\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{33}, 2\dot{\epsilon}_{23}, 2\dot{\epsilon}_{31}, 2\dot{\epsilon}_{12})^T;$$

$$\mathbf{B} \equiv (\omega_0 \mathbf{Z}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{Z}_k \mathbf{E}_k) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B}\mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{Z}_k \mathbf{r}_k),$$

$$\mathbf{H} \equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\zeta}_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k \quad (1 \leq k \leq N), \quad (7)$$

$$\mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - \mathbf{G}_k \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad \mathbf{p}_k \equiv \boldsymbol{\beta}_k \dot{\Theta} \quad (0 \leq k \leq N), \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k;$$

\mathbf{B} , \mathbf{E}_k , \mathbf{C}_k , \mathbf{Z}_k , $\bar{\mathbf{Z}}_k$ и $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k$ – 6×6 -матрицы; \mathbf{I} – единичная 6×6 -матрица; \mathbf{D}_k^{-1} и \mathbf{H}^{-1} – матрицы, обратные 6×6 -матрицам \mathbf{D}_k и \mathbf{H} ; \mathbf{p} , \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k , $\boldsymbol{\zeta}_k$, \mathbf{p}_k и $\boldsymbol{\beta}_k$ – шестикомпонентные вектор-столбцы. Элементы векторов $\boldsymbol{\zeta}_k = (\zeta_i^{(k)})$, $\boldsymbol{\beta}_k = (\beta_i^{(k)})$ и матриц $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$, $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$ вычисляются так [20]

$$\begin{aligned} \bar{z}_{ij}^{(k)} &= 2\delta_{ij} G_k + \lambda_k, \quad \bar{z}_{il}^{(k)} = G_k, \\ \beta_i^{(k)} &= \frac{K_\Theta^{(k)}}{3K_k} \sum_{m=1}^3 \sigma_{mm}^{(k)} + 3K_k \alpha_k + \frac{s_i^{(k)}}{G_k} \left[G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) A_k \right], \\ \beta_l^{(k)} &= \frac{s_l^{(k)}}{G_k} \left[G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) A_k \right], \quad (i, j = \overline{1, 3}, \quad l = \overline{4, 6}), \\ \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} &= A_k s_i^{(k)} s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 6}), \quad \lambda_k = \frac{v_k E_k}{(1 + v_k)(1 - 2v_k)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$2G_k = \frac{E_k}{1 + v_k}, \quad 3K_k = \frac{E_k}{1 - 2v_k}, \quad A_k = \frac{\gamma_k G_k}{(G_k + \bar{G}_k) \tau_s^{(k)2}}, \quad K_\Theta^{(k)} = \frac{dK_k}{d\Theta},$$

$$G_\Theta^{(k)} = \frac{dG_k}{d\Theta}, \quad \tau_\Theta^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \Theta}, \quad \bar{G}_k = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \chi_k}, \quad \chi_k = \int_{t_0}^t \sqrt{2 \dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt,$$

$$\gamma_k = \begin{cases} 0 & \text{при } T_k < \tau_s^{(k)} \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}, W_k \leq 0, \\ 1 & \text{при } T_k = \tau_s^{(k)}, W_k > 0, \end{cases}$$

$$W_k = G_k \mathbf{s}_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \tau_s^{(k)} G_k^{-1} \left(\tau_s^{(k)} G_{\Theta}^{(k)} - \tau_{\Theta}^{(k)} G_k \right) \dot{\Theta}, \quad T_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^{(k)2} + \sum_{i=4}^6 s_i^{(k)2}, \quad 0 \leq k \leq N;$$

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \quad (9)$$

$$\zeta_1^{(k)} = 0, \quad \zeta_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} \left(p_l^{(0)} - p_l^{(k)} \right), \quad i = \overline{2,6}, \quad j = \overline{1,6}, \quad 1 \leq k \leq N;$$

$$g_{11}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad (10)$$

$$2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N;$$

$$l_{11}^{(k)} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{12}^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{13}^{(k)} = \cos \theta_k,$$

$$l_{21}^{(k)} = -\sin \varphi_k, \quad l_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad l_{23}^{(k)} = 0, \quad (11)$$

$$l_{31}^{(k)} = -\cos \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{32}^{(k)} = -\cos \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{33}^{(k)} = \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N;$$

E_k и ν_k – модуль упругости и коэффициент Пуассона k -го компонента композиции ($k=0$ – связующее, $k \geq 1$ – арматура k -го семейства); α_k – коэффициент линейного теплового расширения того же материала; $\tau_s^{(k)} = \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta)$ – предел текучести k -го материала при чистом сдвиге, который зависит от параметра упрочнения χ_k и температуры Θ и при активном или нейтральном нагружении в случае пластического деформирования или разгрузки равен интенсивности касательных напряжений T_k ; \bar{G}_k – касательный модуль сдвига при пластическом деформировании той же фазы композиции; $\sigma_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений в том же материале; $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \left(\dot{\varepsilon}_l^{(k)} \right)$ и $\mathbf{s}_k = \left(s_l^{(k)} \right)$ – шестикомпонентные вектор-столбцы с элементами тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$ и диватора напряжений $s_{ij}^{(k)}$ в k -м компоненте композиции, которые по структуре аналогичны вектор-столбцам $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ соответственно (см. (6)); $\dot{p}_{ij}^{(k)}$ – скорости пластических деформаций той же фазы композиции; γ_k – параметр переключения, определяющий при $\gamma_k = 0$ термоупругое деформирование, нейтральное нагружение или разгрузку, а при $\gamma_k = 1$ – активное пластическое деформирование k -го материала композиции; $p_l^{(k)}$ ($l = \overline{1,6}$) – компоненты вектор-столбца \mathbf{p}_k ($0 \leq k \leq N$); точка – частная производная по времени t ; индекс T – операция транспонирования. В равенствах (8) по повторяющимся индексам k и l суммирования нет. Не выписанные в соотношениях (10) элементы 6×6 -матриц $\mathbf{G}_k = \left(g_{ij}^{(k)} \right)$ и $\mathbf{Q}_k = \left(q_{ij}^{(k)} \right)$ приведены в таблицах (21.40) и (21.44) в [23]. Эти матрицы \mathbf{G}_k и \mathbf{Q}_k задают преобразования шестикомпонентных вектор-столбцов скоростей напряжений $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \left(\dot{\sigma}_l^{(k)} \right)$ и деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \left(\dot{\varepsilon}_l^{(k)} \right)$ ($l = \overline{1,6}$) в k -й фазе композиции

при переходе от глобальной ортогональной системы координат x_j к локальной ортогональной системе $x_i^{(k)}$ (рис.3). Ось $x_1^{(k)}$ при этом направляется вдоль траектории армирования и определяется двумя углами сферической системы координат θ_k и φ_k ($0 \leq \theta_k \leq \pi$, $0 \leq \varphi_k < 2\pi$). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ осей $x_i^{(k)}$ относительно осей x_j ($i, j = \overline{1,3}$) вычисляются по формулам (11). Вектор-столбцы $\dot{\sigma}_k$ и $\dot{\epsilon}_k$, которые соответственно имеют структуру, подобную (6), связаны определяющими уравнениями [20]

$$\dot{\sigma}_k = \mathbf{Z}_k \dot{\epsilon}_k + \mathbf{p}_k, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (12)$$

где вектор \mathbf{p}_k и матрица \mathbf{Z}_k определены в (7) при учете (8). В равенствах (8) учтено, что при проявлении термочувствительности упругие характеристики k -го компонента композиции зависят от температуры Θ .

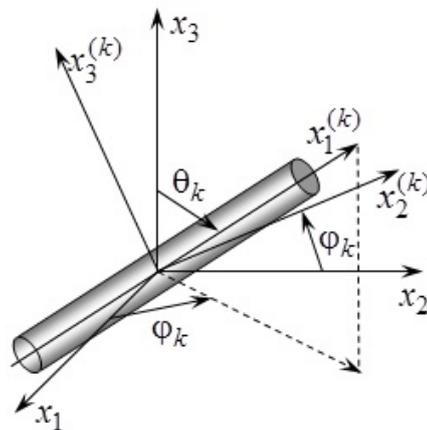


Рис.3. Локальная система координат, связанная с волокном k -го семейства.

При выводе соотношений (5) и (7) дополнительно получают структурные равенства

$$\dot{\epsilon}_0 = \mathbf{H}^{-1} \dot{\epsilon} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \dot{\epsilon}_k = \mathbf{E}_k \dot{\epsilon}_0 + \mathbf{r}_k, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (13)$$

Первое матричное соотношение (13) выражает скорости деформаций связующего $\dot{\epsilon}_0$ через скорости осредненных деформаций композиции оболочки $\dot{\epsilon}$, а второе равенство – скорости деформаций арматуры k -го семейства $\dot{\epsilon}_k$ через скорости деформаций связующей матрицы $\dot{\epsilon}_0$. Таким образом, по формулам (12) с учетом (13) можно выразить скорости напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{(k)}$ (т.е. $\dot{\sigma}_k$, $0 \leq k \leq N$) в k -м материале композиции через $\dot{\epsilon}_{ij}$, $i, j = \overline{1,3}$ (т.е. через $\dot{\epsilon}$).

Согласно структуре векторов $\dot{\sigma}$ и $\dot{\epsilon}$ (см. (6)), из третьего уравнения системы (5) выразим скорость линейной деформации в поперечном направлении

$$\dot{\epsilon}_{33} = b_{33}^{-1} (\dot{\sigma}_{33} - p_3 - b_{31} \dot{\epsilon}_{11} - b_{32} \dot{\epsilon}_{22} - 2b_{34} \dot{\epsilon}_{23} - 2b_{35} \dot{\epsilon}_{31} - 2b_{36} \dot{\epsilon}_{12}), \quad (14)$$

где скорость $\dot{\sigma}_{33}$ определяется путем дифференцирования (4) по времени, а скорости деформаций в правой части $\dot{\epsilon}_{ij}$ получаются за счет дифференцирования по t соотношений (2) при учете (3).

Температуру КМ-оболочки Θ аппроксимируем по толщине полиномом L -го порядка

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) z^l, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (15)$$

где Θ_l ($0 \leq l \leq L$) – двумерные функции, подлежащие определению; $\Theta^0 = \text{const}$ – температура естественного состояния конструкции.

Для замыкания постановки связанной задачи термоупругопластического деформирования КМ-оболочек к равенствам (1)-(15) следует присоединить уравнение теплопроводности (см. соотношения (4.5) и (4.6) в [20]), механические (см. (26)-(29) в [19]) и теплофизические (см. (4.7), (4.8) в [20]) граничные условия, а также начальные условия, которые задаются при $t = t_0$ (см. (30), (31) в [19] и (4.22) в [20]).

Для интегрирования сформулированной нестационарной нелинейной связанной задачи используем явную численную схему, т.е. искомые функции будем определять в дискретные моменты времени $t = t_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Предполагаем, что в два момента времени t_{n-1} и t_n заданы или уже получены значения функций [19,20]

$$\begin{aligned} w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_i^{(p)m}(\mathbf{x}) \equiv u_i^{(p)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \\ \sigma_{33}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad U^{(r)n}(\mathbf{x}) \equiv U^{(r)}(t_n, \mathbf{x}), \quad q_i^n(\mathbf{r}) \equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), \\ \Theta_s^m(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_s(t_m, \mathbf{x}), \quad \dot{\Theta}_s^{n-1}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\Theta}_s(t_{n-1}, \mathbf{x}), \quad q_\infty^{(\pm)n}(\mathbf{x}) \equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \varepsilon_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \chi_k^m(\mathbf{r}) \equiv \chi_k(t_m, \mathbf{r}), \\ l = 1, 2, \quad p = 0, 1, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = n-1, n, \quad 0 \leq r \leq L-2, \quad 0 \leq s \leq L, \\ 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} u_i^{(p)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_l(t, \mathbf{r}) z^p dz, \quad U^{(r)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) z^r dz, \\ \sigma_{ij}^{(k)}(t, \mathbf{r}) &= \sum_{k=0}^N \omega_k \sigma_{ij}^{(k)}(t, \mathbf{r}), \quad l = 1, 2, \quad p = 0, 1, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq r \leq L-2; \end{aligned} \quad (17)$$

U – удельная внутренняя энергия КМ; q_i – компоненты вектора теплового потока в КМ, связанные с $\text{grad}\Theta$ законом Фурье для волокнистого материала (см. (3.1)-(3.3) в [20]); $q_\infty^{(\pm)}$ – известные значения тепловых потоков через внутреннюю (–) и внешнюю (+) лицевые поверхности оболочки. Искомые функции u_i и ε_{i3}^0 в равенствах (1) и (2) определяются через новые кинематические переменные $u_i^{(p)}$, $i = 1, 2$, $p = 0, 1$ (см. (17)) и прогиб w с помощью матричного соотношения (35) в [19], коэффициенты которого не зависят от решения рассматриваемой задачи.

В механической составляющей исследуемой связанной термоупругопластической задачи производные по t аппроксимируем их конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, что позволяет разработать явную численную схему [19]. После замены в двумерных уравнениях

движения гибкой цилиндрической КМ-оболочки вторых производных по времени от кинематических переменных w и $u_i^{(p)}$ их конечно-разностными аналогами с учетом соотношений (1), (4), (17) и обозначений, аналогичных (16), получим [19]

$$\begin{aligned}
\frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \partial_1 \left(M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1^n w + \bar{M}_{12}^{(0)} \partial_2^n w \right) + \\
&+ \partial_2 \left(\bar{M}_{23}^{(0)} + \bar{M}_{21}^{(0)} \partial_1^n w + \bar{M}_{22}^{(0)} \partial_2^n w \right) - \bar{M}_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\
\frac{\rho}{\Delta^2} \left(u_1^{(l)n+1} - 2u_1^{(l)n} + u_1^{(l)n-1} \right) &= \partial_1 \left(M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1^n w \right) + \partial_2 \left(\bar{M}_{12}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_1^n w \right) - \\
&- l M_{13}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_1^n w - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_1^n w, \\
\frac{\rho}{\Delta^2} \left(u_2^{(l)n+1} - 2u_2^{(l)n} + u_2^{(l)n-1} \right) &= \partial_1 \left(M_{21}^{(l)} - \bar{M}_{13}^{(l)} \partial_2^n w \right) + \partial_2 \left(\bar{M}_{22}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_2^n w \right) - \\
&- l M_{23}^{(l-1)} + l \bar{M}_{33}^{(l-1)} \partial_2^n w - \\
&- h^l \left[(R+h)^{-1} \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l (R-h)^{-1} \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_2^n w + \bar{M}_{23}^{(l)},
\end{aligned} \tag{18}$$

$$l = 0, 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где (см. (3) и (4))

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^N \rho_k \omega_k, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) z^l dz, \\
\bar{M}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^l dz, \quad \bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{(R+z)^2} z^l dz, \\
l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) z^{l-1} dz = \frac{h^l}{2} \left[(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right], \\
l \bar{M}_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \frac{\sigma_{33}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^{l-1} dz = \frac{l}{2h} (\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (\Psi_l(h) - \Psi_l(-h)) + \\
&\quad + \frac{l}{2} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (\Psi_{l-1}(h) - \Psi_{l-1}(-h)), \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad l = 0, 1;
\end{aligned} \tag{19}$$

ρ_0, ρ_k – объемная плотность связующего и волокон k -го семейства; $\Delta = \text{const} > 0$ – шаг по времени; $M_{ij}^{(l)}, \bar{M}_{ij}^{(l)}, \bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}$ – внутренние силовые факторы. Внешние массовые силы в (18) не учитываются. Усредненные напряжения σ_{ij} в (19) связаны с напряжениями в компонентах композиции $\sigma_{ij}^{(k)}$ ($i, j = \overline{1, 3}, 0 \leq k \leq N$) соотношениями (17).

Используя выражения (19) с учетом (16), в данный момент времени t_n можно определить все внешние силы и силовые факторы, входящие в правые части равенств (18). Следовательно, учитывая требуемые граничные условия (см. (26), (28) в [19]), из уравнений (18) по явной схеме можно вычислить значения искомых функций w и $u_i^{(l)}$ ($i = 1, 2, l = 0, 1$) при $t = t_{n+1}$.

Для интегрирования теплофизической составляющей рассматриваемой задачи также используем явную численную схему, но на двухточечном шаблоне по времени $\{t_n, t_{n+1}\}$. Как и в [20], для получения двумерных уравнений теплового баланса КМ-оболочки используем метод взвешенных невязок, выбрав в качестве весовых функций полиномы z^m , тогда по аналогии с [20] при учете соотношений (15)-(17) получим систему уравнений

$$\frac{\rho}{\Delta} \left(U^{(m)} - U^{(m)} \right) = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 \bar{Q}_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}, \quad (20)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$-\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} \left(l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)} \left(\Theta_{\infty}^{(-)} - \Theta^0 \right) + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}),$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} \left(l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)} \left(\Theta_{\infty}^{(+)} - \Theta^0 \right) - q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0; \quad (21)$$

$$C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j + \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (22)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2,$$

где

$$H(s) \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} \left[1 - (-1)^{s+1} \right], \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) z^m dz \quad (i = \overline{1,3}),$$

$$\bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \frac{\partial q_3(t, \mathbf{r})}{\partial z} z^m dz = h^m \left[q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)} \right] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}), \quad (23)$$

$$\bar{\bar{Q}}_j^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \frac{q_j(t, \mathbf{r})}{R+z} z^m dz \quad (j = 2,3), \quad W^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} z^m dz,$$

$$C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^N c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0,1,2), \quad \lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33} \Big|_{\Theta = \Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)} \equiv q_{\infty}^{(\pm)};$$

λ_{33} – коэффициент теплопроводности КМ в направлении x_3 , определяемый по формулам (3.2), (3.3) в [20]; $\alpha^{(\pm)}$ – коэффициент теплоотдачи на внешней (+) и внутренней (–) лицевых поверхностях конструкции; $\Theta_{\infty}^{(\pm)}$ – температура окружающей среды со стороны тех же поверхностей; $c_l^{(k)}$ – коэффициент представления удельной теплоемкости k -го компонента композиции c_k ($\Theta - \Theta^0$) полиномом (при учете термочувствительности)

$$c_k (\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)} \cdot (\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)} \cdot (\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (24)$$

Равенства (20) с учетом (17) и (23) – это приведенные двумерные уравнения теплового баланса, записанные в цилиндрической системе координат. Соотношения (21) – тепловые граничные условия на лицевых поверхностях КМ-оболочки, которые преобразованы с учетом полиномиального представления температуры (15). Равенство (22) связывает двумерные функции $U^{(m)}$ (см. (17)) с коэффициентами разложения (15) при учете аппроксимации (24). Уравнения (21) и (22) выполняются в произвольный момент времени t .

Используя предположения (16) и выражения (23), при $t = t_n$ можно определить правые части в (20). Учитывая при этом соответствующие граничные условия, заданные на кромках оболочки, и начальные температурные условия, вычислим из (20) значения двумерных функций $U^{(m)}$ в следующий момент времени t_{n+1} . Далее, при $t = t_{n+1}$ из уравнений (21) и (22) (правые части в которых уже известны) с учетом (23) получаем коэффициенты $\Theta_l^{(n+1)}(\mathbf{x})$ ($0 \leq l \leq L$) в разложении температуры (15). В случае термочувствительности материалов композиции ($c_1^{(k)} \neq 0$ и/или $c_2^{(k)} \neq 0$ ($0 \leq k \leq N$) в соотношении (24)) система (21), (22) нелинейна. Для линеаризации этих уравнений можно использовать метод переменных теплофизических параметров, который аналогичен методу переменных параметров упругости. В остальном разработанный численный метод (18) и (20) с учетом равенств (2), (5)-(14), (19) и (23) реализуется совершенно так же, как описано в [19,20], где показано, что в равенствах (18) и (20) шаг по времени Δ необходимо задавать таким, чтобы удовлетворялись необходимые условия устойчивости Куранта [3].

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Рассматривается неизотермическое упругопластическое динамическое поведение гибкой замкнутой круговой цилиндрической оболочки радиуса $R = 1$ м, длиной $D = 4$ м и толщиной $2h = 3$ см ($2h/R \approx 1/33$). Конструкция жестко закреплена на обеих кромках: $w = 0$ и $U_i = 0$ при $x_1 = 0, D$ и $t \geq t_0$ (см. рис.1б и соотношения (1), (17), (18)). До начального момента времени $t = t_0 = 0$ оболочка покоится ($w \equiv 0, \dot{w} \equiv 0, U_i \equiv 0, \dot{U}_i \equiv 0, i = 1, 2$) при температуре естественного состояния $\Theta = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$ ($\mathbf{x} \in \Omega, |z| \leq h, t < t_0$). При $t = t_0$ конструкция нагружается внутренним давлением $p(t)$, условно соответствующим воздушной взрывной волне [22]

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\beta(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (25)$$

где

$$\beta = -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (26)$$

p_{\max} – максимальное значение $p(t)$, достигаемое при $t = t_{\max}$; t_{\min} – момент времени, при превышении которого можно пренебречь $p(t)$ по сравнению с p_{\max}

(соотношение (26) соответствует условию $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$). На основании экспериментальных данных [22] в расчетах примем $t_{\max} = 0,1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс.

На лицевых поверхностях оболочки теплообмен с окружающей средой осуществляется в условиях естественной конвекции ($q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$ и $\alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м²·К) [24]), причем температура воздуха считается равной температуре естественного состояния: $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta^0$ (см. (21)). На кромках конструкции поддерживается температура, равная Θ^0 .

Оболочка может быть выполнена из эпоксидной смолы [15], усиленной стекловолокнами [14] (стеклопластиковая), или из магниевого сплава ВТ65 [25], армированного стальной проволокой марки У8А [14] (металлокомпозитная). Упругопластическое деформирование материалов компонентов композиции при фиксированной температуре Θ и активном нагружении описывается билинейной диаграммой

$$\sigma = \begin{cases} E_k \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E_k, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases}$$

где σ, ε – напряжение и деформация при растяжении-сжатии; $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta)$ – модуль линейного упрочнения k -го компонента композиции; $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta)$ – условный предел текучести того же материала. Физико-механические характеристики фаз композиций указаны в таблице, где в скобках даны значения температуры ($\Theta, ^\circ\text{C}$), при которых получена текущая характеристика. Все физико-механические характеристики в расчетах линейно аппроксимированы по температуре по данным, представленным в таблице 1.

Таблица 1.
Физико-механические характеристики компонентов композиций [14,15,25].

Характеристика материала	Эпоксидная смола	Стекловолокно	Магниевый сплав ВТ65 (Mg)	Стальная проволока У8А
$\rho, \text{ кг/м}^3$	1210,0 (20) 1208,0 (40)	2520,0 (20) 2519,6 (80)	1800,0 (20) 1796,2 (100)	7800,0 (20) 7791,8 (100)
$E, \text{ ГПа}$	2,8 (20) 2,3 (40)	86,8 (20) 86,3 (80)	43,0 (20) 38,5 (100)	210,0 (20) 195,0 (100)
ν	0,33 (20) 0,333 (40)	0,25 (20) 0,254 (80)	0,330 (20) 0,334 (100)	0,3 (20) 0,305 (100)
$\sigma_s, \text{ МПа}$	20 (20) 18 (40)	4500 (20) 4400 (80)	267 (20) 219 (100)	3968 (20) 3971 (200)
$E_s, \text{ ГПа}$	1,114 (20) 0,783 (40)	6,230 (20) 5,168 (80)	0,379 (20) 0,367 (100)	6,973 (20) 5,014 (200)
$\lambda, \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$	0,243 (20) 0,240 (40)	0,89 (20) 0,86 (80)	117,23 (20) 121,42 (100)	42,7 (20) 41,7 (100)
$\alpha \cdot 10^6, \text{ К}^{-1}$	68,1 (20) 70,3 (40)	2,5 (20) 2,6 (80)	20,9 (20) 22,6 (100)	12,3 (20) 13,2 (100)
$c, \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$	1,54 (20) 1,60 (40)	0,800 (20) 0,839 (80)	1,032 (20) 1,054 (100)	0,485 (20) 0,488 (100)

Оболочки ортогонально армированы двумя ($N = 2$) семействами волокон, уложенных в продольном x_1 и окружном x_2 направлениях с плотностями $\omega_1 = 0,1$ и $\omega_2 = 0,3$ соответственно. При этом углы армирования имеют значения (см. рис.1б, рис.2 и рис.3): $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$.

Исследовалось осесимметричное деформирование КМ-оболочек (решение задачи не зависит от x_2). По осевой координате x_1 использовалась равномерная сетка с шагом $\Delta x_1 = D/100 = 4$ см; шаг по времени Δ для стеклопластиковой конструкции задавался равным $1 \text{ мкс} = 10^{-6} \text{ с}$, а для металлокомпозитной – $0,25 \text{ мкс}$. Необходимые условия устойчивости построенной численной схемы при такой дискретизации выполняются с запасом (см. (6.3) в [20]). Для стеклопластиковой оболочки расчеты проводились на интервале времени $0 \leq t \leq 500 \text{ мс}$, а для Mg–У8А-конструкции – при $0 \leq t \leq 100 \text{ мс}$ ($1 \text{ мс} = 10^{-3} \text{ с}$).

Выбор разных шагов по времени Δ для стеклопластиковой и металлокомпозитной оболочек обусловлен тем, что, согласно необходимому условию устойчивости явной численной схемы (условию Куранта), отношение $\Delta x_1/\Delta$ должно быть больше или равно скорости звука в материале конструкции [3,20]. Так как эта скорость в рассматриваемой металлокомпозиции существенно больше, чем в стеклопластике, то при фиксированном значении Δx_1 необходимо шаг Δ в случае Mg–У8А-композиции задавать гораздо меньшим, чем в случае материала из стеклопластика.

С целью исследования сходимости степенного представления температуры (15) в [20] были проанализированы зависимости максимальных значений $\Theta_{\max}(L) = \max_{t,r} \Theta(t,r;L)$ от порядка аппроксимирующего полинома L . Там было показано, что как для относительно тонких, так и относительно толстых КМ-пластин приращение величины Θ_{\max} при переходе от $L = 6$ к $L = 7$ является пренебрежимо малым с практической точки зрения (см. рис.3 в [20]). При $L \geq 8$ система линеаризованных уравнений (21), (22) (полностью совпадающая с соответствующими соотношениями в [20]), из которой при учете (23) определяются коэффициенты разложения температуры (15), становится плохо обусловленной, поэтому и зависимости $\Theta_{\max}(L)$ при $L \geq 8$ являются расходящимися. Предварительно выполненные расчеты показали, что этот результат справедлив и для рассматриваемых цилиндрических КМ-оболочек (соответствующие зависимости $\Theta_{\max}(L)$ здесь не приведены). На основании этого в дальнейших расчетах в формуле (15) принимаем $L = 7$.

На рис.4 изображены зависимости от времени наибольших значений температуры $\Theta_m(t) = \max_r \Theta(t,r)$ ($0 \leq x_1 \leq D$, $|z| \leq h$) в исследуемых оболочках. Кривая 1 рассчитана для стеклопластиковой конструкции при $p_{\max} = 13 \text{ МПа}$ (см. (25)), а кривая 2 – для Mg–У8А-оболочки при $p_{\max} = 60 \text{ МПа}$. При таких уровнях нагружения наблюдается пластическое деформирование всех компонентов композиций обеих КМ-конструкций. Согласно поведению кривой 2, зависимость $\Theta_m(t)$ для цилиндрических оболочек является более сложной, чем для КМ-пластин (см. рис.4 в [20]). Кривая 1 на рис.4 свидетельствует о том,

что в процессе осцилляций стеклопластиковая оболочка нагревается не более чем на 12°C (значение $\Theta_{\max} = 31,95^\circ\text{C}$ достигается при $t = 175$ мс). Максимум же на кривой 2 ($\Theta_{\max} = 61,81^\circ\text{C}$) реализуется при $t = 27,4$ мс, т.е. металлокомпозитная оболочка нагревается более чем на 40°C.

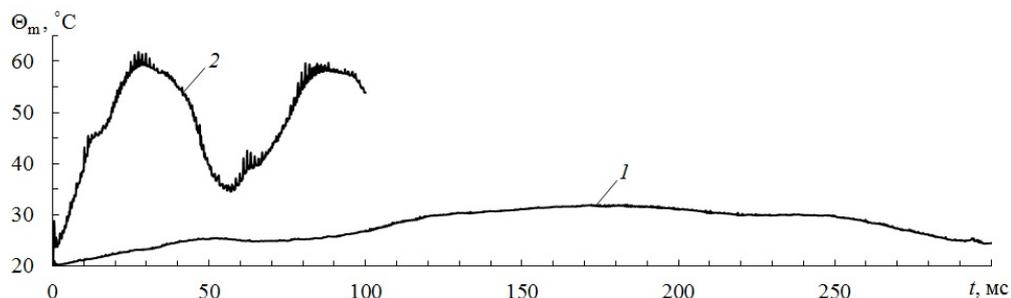


Рис.4. Зависимость от времени максимального значения температуры в стеклопластиковой (кривая 1) и металлокомпозитной (кривая 2) оболочках.

Несмотря на то, что нагрев Mg–У8А-оболочки является не столь значительным, учет температурного поля оказывает существенное влияние на деформированное состояние некоторых компонентов композиции в ней. Так, на рис.5 изображены осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций $\varepsilon_*^{(k)}$ ($\varepsilon_m^{(k)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r})$, $0 \leq x_1 \leq D$, $|z| \leq h$) связующего материала ($k=0$; рис.5а) и арматуры второго – окружного – семейства ($k=2$; рис.5б). Сплошные кривые 1 на рис.5 получены с учетом теплового отклика в конструкции, а пунктирные кривые 2 приведены для сравнения и рассчитаны без учета этого отклика. Кривые 1 и 2 на рис.5б визуальнo практически неразличимы; незначительное их различие наблюдается лишь при $t \approx 36$ мс, которое с течением времени (при $t > 40$ мс) становится все более заметным.

Сравнение кривых 1 и 2 на рис.5а показывает, что неучет теплового отклика (кривая 2) может привести к значительному искажению деформированного состояния связующего материала. В частности, глобальный максимум на кривой 2 (при $t = 0,45$ мс) на 35,1% превышает аналогичную величину на кривой 1. Напомним, что для относительно тонких гибких КМ-пластин такое различие составляет менее 10% [20].

Зависимости $\varepsilon_m^{(k)}(t)$ для первого ($k=1$) – продольного – семейства арматуры здесь не приведены, так как они качественно подобны кривым, изображенным на рис.5а, с той лишь разницей, что ординаты точек на соответствующих кривых примерно в 1,5 раза меньше чем на рис.5а. Поведение же кривых 1 и 2 на рис.5б свидетельствует о том, что в исследуемом случае на рассматриваемом интервале времени неучет теплового отклика в металлокомпозитной цилиндрической оболочке практически не влияет на деформированное состояние армирующей проволоки, навитой в окружном направлении. Следует обратить внимание на такое обстоятельство: если в связующем материале зависимость $\varepsilon_m^{(0)}(t)$ достигает своего максимума при $t = 0,45$ мс (см. рис.5а), т.е. в момент времени, когда еще действует внешняя нагрузка (25), то в арматуре второго семейства зависимость $\varepsilon_m^{(2)}(t)$ достигает своего максимума при $t = 31,6$ мс (см. рис.5б), т.е. значительно позже времени

прекращения действия внешней нагрузки ($t_{\min} = 2$ мс). Такая специфика поведения деформированного состояния динамически нагружаемых гибких цилиндрических КМ-оболочек характерна не только для их упругопластического, но и упругого деформирования [2].

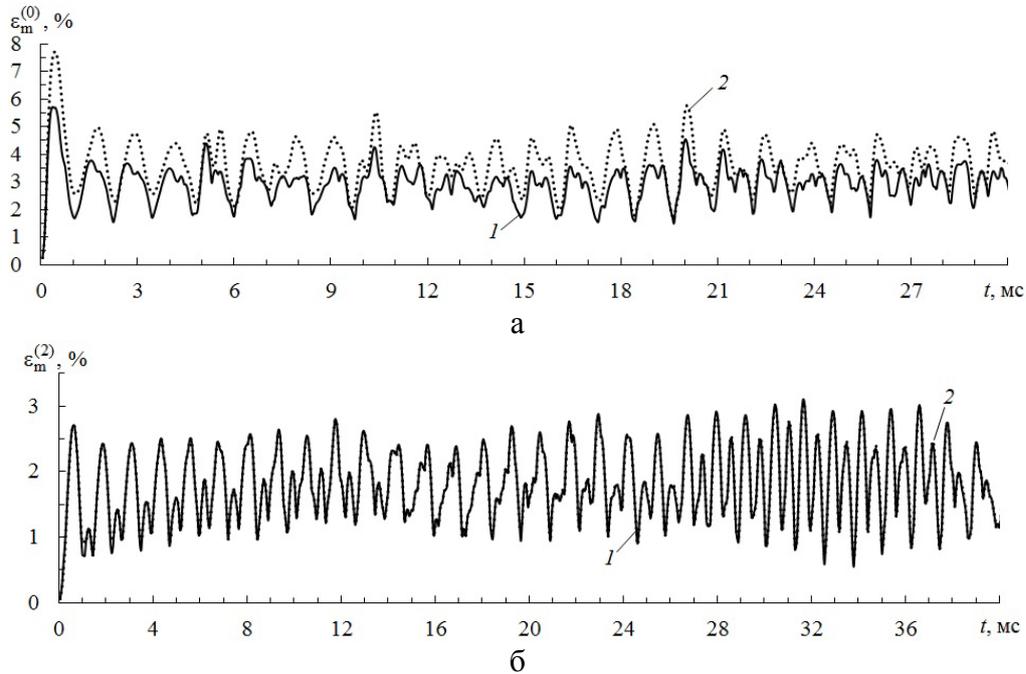


Рис.5. Осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций связующей матрицы (а) и арматуры второго (окружного) семейства (б) в металлокомпозитной оболочке: 1 – термоупругопластический расчет, 2 – упругопластический расчет.

На рис.6 изображены эпюры прогибов $w(x)$ ($x = x_1 - D/2$), рассчитанные для металлокомпозитной оболочки в момент времени $t = 100$ мс. В силу симметрии задачи относительно центрального поперечного сечения $x_1 = D/2$ приведены только правые части зависимостей $w(x)$ ($0 \leq x \leq D/2 = 2$ м). Номера кривых на рис.6 имеют тот же смысл, что и на рис.5.

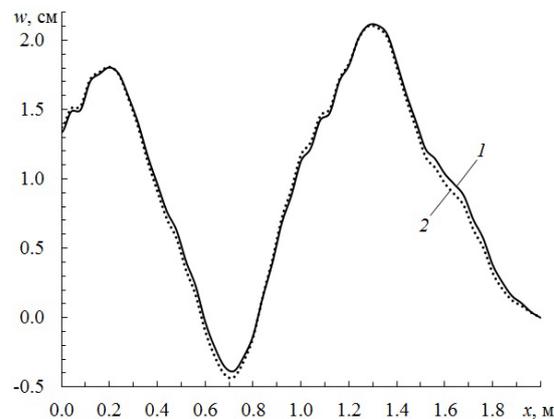


Рис.6. Эпюры прогибов металлокомпозитной оболочки в момент времени $t = 100$ мс, рассчитанные по термоупругопластической (кривая 1) и упругопластической (кривая 2) теориям.

Деформированное состояние арматуры второго (окружного) семейства в основном определяется окружной деформацией ε_{22} . Согласно (2), в рассматриваемом осесимметричном случае эта деформация определяется прогибом w , а наибольшее ее значение – максимумом w . Как видно из рис.6, максимальные значения ординат точек кривых 1 и 2, достигаемые при $x \approx 1,3$ м, практически совпадают, т.е. в обоих расчетах наибольшие значения деформации ε_{22} различаются пренебрежимо мало. Это и объясняет то обстоятельство, что на рис.5б кривые 1 и 2 визуально почти неразличимы.

На рис.7 изображены зависимости $\varepsilon_m^{(k)}(t)$ для k -ых компонентов композиции стеклопластиковой оболочки, рассчитанные с учетом (кривые 0 и 2) и без учета (кривые 0' и 2') температурного отклика в них. Номера кривых соответствуют номеру k -й фазы, т.е. пунктирные кривые 0 и 0' получены для связующего материала, а сплошные кривые 2 и 2' – для арматуры второго (окружного) семейства. На рис.7 кривые 0' и 2' визуально не отличаются от кривых 0 и 2 соответственно, так как значения ординат точек на них различаются лишь в третьей – четвертой значащей цифре. Объясняется это, как и в [20], малым нагревом (менее чем на 12°C) таких конструкций при их динамическом нагружении. Таким образом, расчет стеклопластиковых оболочек при их осесимметричном деформировании можно проводить без учета температурного отклика в них, если отсутствуют источники тепла немеханического происхождения.

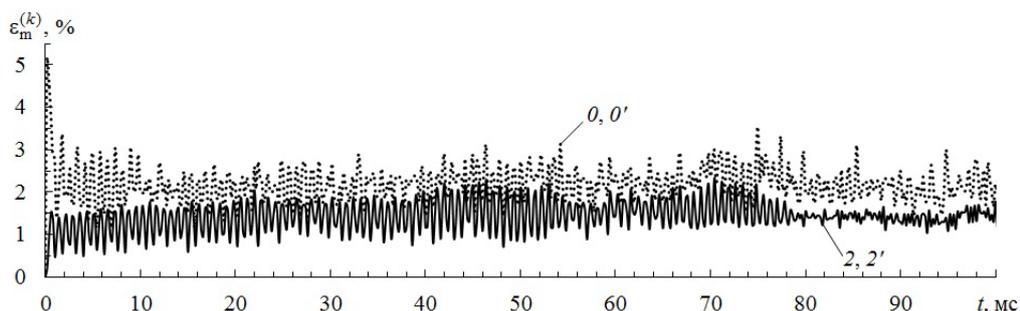


Рис.7. Осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций k -го компонента композиции стеклопластиковой оболочки: 0, 2 – термоупругопластический, 0', 2' – упругопластический расчеты; 0, 0' – связующий материал ($k = 0$), 2, 2' – арматура второго (окружного) семейства ($k = 2$).

ВЫВОДЫ

Анализ неизотермического упругопластического изгибного динамического деформирования армированных цилиндрических оболочек показал, что тепловой отклик в них является более сложным, чем в гибких КМ-пластинах [20]. При максимальных значениях интенсивностей деформаций компонентов композиций порядка 5% относительно тонкие цилиндрические оболочки из стеклопластика дополнительно нагреваются примерно на 10-12°C, а аналогичные по структуре металлокомпозитные оболочки – на 40°C. В связи с малым нагревом стеклопластиковых цилиндрических оболочек расчет их осесимметричного динамического изгибного поведения можно вполне

обоснованно проводить без учета температурного отклика в них при отсутствии дополнительных источников тепла немеханического происхождения. Однако в металлокомпозитных гибких оболочках при аналогичном их деформировании необходимо учитывать возникающее при этом температурное поле, иначе упругопластические расчеты будут приводить к существенному (на несколько десятков процентов) искажению деформированного состояния компонентов композиции. Это искажение проявляется более ярко, чем в гибких металлокомпозитных пластинах [20], даже при сопоставимых уровнях максимальных значений интенсивностей деформаций фазовых материалов металлокомпозиций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек*. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
2. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.
3. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
4. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2nd ed.* – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.
5. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа*. – Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.
6. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрияшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.
7. Димитриенко Ю.И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах*. – М.: Физматлит, 2019. – 448 с.
8. Абросимов Н.А., Игумнов Л.А., Новосельцева Н.А. *Численный анализ влияния скоростей деформации на динамическую прочность цилиндрических оболочек из металлопластика при взрывном нагружении // Прикладная механика и техническая физика*. – 2020. – Т.61. – №2. – С.130-141.
9. Федоренко А.Н., Федулов Б.Н., Ломакин Е.В. *Моделирование ударного воздействия на демпфирующие элементы, изготовленные из композиционных материалов // Прикладная механика и техническая физика*. – 2021. – Т.62. – №5. – С.100-107.
10. Абросимов Н.А., Елесин А.В., Игумнов Л.А. *Моделирование влияния предварительного квазистатического нагружения на процесс динамической потери устойчивости композиционных цилиндрических оболочек при действии осевой сжимающей нагрузки // Прикладная механика и техническая физика*. – 2021. – Т.62. – №6. – С.81-88.
11. Железнов Л.П., Серьезнов А.П. *Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитной оболочки при чистом изгибе и внутреннем давлении // Прикладная механика и техническая физика*. – 2022. – Т.63. – №2. – С.207-216.
12. Kazancı Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2011. – Vol.46. – Pp.807-817.

13. Leu S.-Y., Hsu H.-C. *Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol.52. – Pp.1579-1587.
14. *Композиционные материалы: Справочник* / Под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
15. *Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Книга 1.* / Под ред. Дж. Любина. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
16. Vena P., Gastaldi D., Contro R. *Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites* // International Journal of Plasticity. – 2008. – Vol.24. – Pp.483-508.
17. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. *Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle* // International Journal of Plasticity. – 2012. – Vol.36. – Pp.86-112.
18. Ахундов В.М. *Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях* // Механика композитных материалов. – 2015. – Т.51. – №3. – С.539-558.
19. Янковский А.П. *Моделирование упругопластического поведения гибких цилиндрических оболочек с пространственными структурами армирования* // Конструкции из композиционных материалов. – 2019. – №2. – С.9-21.
20. Янковский А.П. *Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин* // Прикладная математика и механика. – 2022. – Т.86. – №1. – С.121-150.
21. Янковский А.П. *Вязкоупругопластическое деформирование пластин с пространственными структурами армирования* // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – Т.61. – №1. – С.118-132.
22. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading* // Computers & Structures. – 1987. – Vol.26. – No.1/2. – Pp.1-15.
23. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. *Сопротивление жестких полимерных материалов.* – Рига: Зинатне, 1972. – 500 с.
24. Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М., Нечаев С.Г., Иванов И.Е., Матюхин Л.М., Морозов К.А. *Теплотехника: Учеб. для вузов. 4-е изд., испр.* – М.: Высшая школа, 2003. – 671 с.
25. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур.* – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.

REFERENCES

1. Ambarcumian S.A. *Obshhaya teoriya anizotropnykh obolochek [The general theory of anisotropic shells]*. Moskva, Nauka, 1974, 446 p.
2. Bogdanovich A.E. *Nelinejnye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]*. Riga, Zinatne, 1987, 295 p.
3. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksij [Nonlinear problems of dynamics composites designs]*. Nizhnij Novgorod, Izdatel'stvo Nizhegorodskogo gosudarstvennogo universiteta, 2002, 400 p.
4. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*. 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2004, 831 p.

5. Andreev A.N. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotorye aspekty chislennogo analiza [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]*. Saarbrücken (Deutschland), Palmarium Academic Publishing, 2013, 93 p.
6. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]*. Moskva, Fizmatlit, 2014, 408 p.
7. Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika kompozitnykh konstruksij pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of composite structures at high temperatures]*. Moskva, Fizmatlit, 2019, 448 p.
8. Abrosimov N.A., Igumnov L.A., Novoseltseva N.A. *Chislennyj analiz vliyaniya skorostej deformatsii na dinamicheskuyu prochnost' tsilindricheskikh obolochek iz metalloplastika pri vzryvnom nagruzhenii [Numerical analysis of the influence of strain rates on the dynamic strength of cylindrical metal-plastic shells under explosive loading]*. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2020, Vol.61, No.2, Pp.130-141.
9. Fedorenko A.N., Fedulov B.N., Lomakin E.V. *Modelirovanie udarnogo vozdejstviya na dempfiruyushhie ehlementy, izgotovlennyye iz kompozitsionnykh materialov [Modeling of impact on damping elements made of composite materials]*. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2021, Vol.62, No.5, Pp.100-107.
10. Abrosimov N.A., Elesin A.V., Igumnov L.A. *Modelirovanie vliyaniya predvaritel'nogo kvazistaticheskogo nagruzheniya na protsess dinamicheskoy poteri ustojchivosti kompozitsionnykh tsilindricheskikh obolochek pri dejstvii osevoj szhimayushhej nagruzki [Modeling the influence of preliminary quasi-static loading on the process of dynamic loss of stability of composite cylindrical shells under the action of an axial compressive load]*. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2021, Vol.62, No.6, Pp.81-88.
11. Zheleznov L.P., Sereznov A.P. *Issledovanie nelinejnogo deformirovaniya i ustojchivosti kompozitnoj obolochki pri chistom izgibe i vnutrennem davlenii [Study of nonlinear deformation and stability of a composite shell under pure bending and internal pressure]*. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2022, Vol.63, No.2, Pp.207-216.
12. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2011, Vol.46, Pp.807-817.
13. Leu S.-Y., Hsu H.-C. *Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders*. International Journal of Mechanical Sciences, 2010, Vol.52, Pp.1579-1587.
14. Karpinos D.M. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite materials. Reference Book]*. Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.
15. Lubin G. *Handbook of composites*. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, 442 p.
16. Vena P., Gastaldi D., Contro R. *Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites*. International Journal of Plasticity, 2008, Vol.24, Pp.483-508.

17. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. *Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle*. International Journal of Plasticity, 2012, Vol.36, Pp.86-112.
18. Akhundov V.M. *Incremental carcass theory of fibrous media under larger elastic and plastic deformations*. Mechanics of composite materials, 2015, Vol.51, No.3, Pp.539-558.
19. Yankovskii A.P. *Modelirovanie uprugoplasticheskogo povedeniya gibkikh tsilindricheskikh obolochek s prostranstvennymi strukturami armirovaniya [Modeling of elastic-plastic behavior of flexible cylindrical shells with spatial reinforcement structures]*. Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov, 2019, No.2, Pp.9-21.
20. Yankovskii A.P. *Modeling of thermoelastic-visco-plastic deformation of flexible reinforced plates*. Mechanics of Solids, 2022, Vol.57, No.7. Pp.1717-1739.
21. Yankovskii A.P. *Viscoelastic-plastic deformation of plates with spatial reinforcement structures*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2020, Vol.61, No.1. Pp. 101-113.
22. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading*. Computers & Structures, 1987, Vol.26, No.1/2, Pp.1-15.
23. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie zhestkikh polimernykh materialov [Resistance of rigid polymeric materials]*. Riga, Zinatne, 1972, 500 p.
24. Lukanin V.N., Shatrov M.G., Camfer G.M., Nechaev S.G., Ivanov I.E., Matyukhin L.M., Morozov K.A. *Teplotekhnika. Uchebnik dlya vuzov [Heat engineering: Textbook for universities]*. Moskva, Vysshaya shkola, 2003, 671 p.
25. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. *Raschety na prochnost', ustojchivost' i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur. [Calculations on strength, stability and fluctuations in conditions of high temperatures]*. Moskva, Mashinostroenie, 1965, 567 p.

Поступила в редакцию 27 декабря 2023 года.

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с., Лаборатория «Физики быстропротекающих процессов», ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: lab4nemir@rambler.ru