



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГО- ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВОЛОКНИСТЫХ ПЛАСТИН В РАМКАХ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА \*

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

### АННОТАЦИЯ

На базе уточненной теории сформулирована начально-краевая задача неизотермического вязкоупруго-вязкопластического динамического изгибного деформирования волокнистых пластин. Геометрическая нелинейность задачи рассматривается в приближении Кармана. Учитывается связанность моделируемой термомеханической проблемы. По толщине композитных пластин перемещения точек в тангенциальных направлениях и температура аппроксимируются полиномами 7-го порядка. Для решения поставленной нестационарной приведенной двумерной задачи используется явная численная схема шагов по времени. Исследовано неизотермическое вязкоупруго-вязкопластическое и вязкоупругопластическое изгибное поведение прямоугольных удлиненных стеклопластиковых пластин с плоско-перекрестной и пространственной структурами армирования. Конструкции в поперечном направлении кратковременно нагружаются избыточным давлением высокой интенсивности. Показано, что для правильного определения величины и формы остаточных прогибов таких конструкций их необходимо рассчитывать с учетом температурного отклика, возникающего в них, даже при отсутствии внешних источников тепла немеханического происхождения. Продемонстрировано, что для адекватного определения остаточного деформированного состояния материалов композиций таких пластин и их остаточного прогиба необходимо использовать уточненную теорию изгиба, а не простейший ее вариант – традиционную неклассическую теорию Амбарцумяна. Показано, что учет зависимости пластических свойств компонентов композиции даже стеклопластиковых конструкций приводит к существенному (в разы) завышению интенсивности остаточных деформаций фаз композиции и к значительному искажению формы и величины остаточных прогибов. Даже в относительно тонких стеклопластиковых пластинах замена плоской структуры армирования на пространственную с сохранением общего расхода волокон может приводить к уменьшению остаточного деформированного состояния эпоксисвязующего более чем на 10%. Продемонстрировано, что после прекращения неупругих осцилляций стеклопластиковые пластины приобретают гофрированную форму со складками, ориентированными в продольном направлении.

**Ключевые слова:** гибкие пластины; армирование волокнами; вязкоупруго-вязкопластичность; связанная термомеханическая задача; динамическое нагружение; уточненная теория изгиба; остаточное состояние; явная численная схема

---

\* Работа выполнена в рамках государственного задания (№ гос.регистрации 124021400036-7).

## MODELING OF THERMOVISCOELASTIC-VISCOPLASTIC DYNAMIC DEFORMATION OF FIBROUS PLATES WITHIN THE FRAMEWORK OF A REFINED BENDING THEORY

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

### ABSTRACT

On the basis of the refined theory, the initial boundary value problem of non-isothermal viscoelastic-viscoplastic dynamic bending deformation of fibrous plates is formulated. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The connectivity of the modeled thermomechanical problem is taken into account. In the transverse direction of composite plates, tangential displacements of their points and temperature are approximated by 7th order polynomials. To solve the posed nonstationary reduced two-dimensional problem, an explicit numerical scheme of time steps is used. The non-isothermal viscoelastic-viscoplastic and viscoelastic-plastic flexural behavior of rectangular elongated fiberglass plates with plane-cross and spatial reinforcement structures was studied. Structures in the transverse direction are briefly loaded with high-intensity excess pressure. It is shown that in order to correctly determine the magnitude and shape of residual deflections of such structures, they must be calculated taking into account the temperature response that occurs in them, even in the absence of external heat sources of non-mechanical origin. It has been demonstrated that in order to adequately determine the residual deformed state of the materials of the compositions of such plates and their residual deflection, it is necessary to use the refined theory of bending, and not its simplest version – the traditional non-classical theory of Ambartsumyan. It has been shown that failure to take into account the dependence of the plastic properties of the components of the composition, even of fiberglass structures, leads to a significant (by several times) overestimation of the intensity of residual deformations of the phases of the composition and to a significant distortion of the shape and magnitude of the residual deflections. Even in relatively thin fiberglass plates, replacing a flat reinforcement structure with a spatial one while maintaining the total fiber consumption can lead to a reduction in the residual deformed state of the epoxy binder by more than 10%. It has been demonstrated that after the cessation of inelastic oscillations, fiberglass plates acquire a corrugated shape with folds oriented in the longitudinal direction.

**Keywords:** flexible plates; fiber reinforcement; viscoelastic-viscoplasticity; coupled thermomechanical problem; dynamic loading; refined bending theory; residual state; explicit numerical scheme

### ВВЕДЕНИЕ

Современные конструкции из композитных материалов (КМ) часто испытывают высокоинтенсивное силовое [1-4] и тепловое [5-9] нагружение, при котором материалы их композиции могут деформироваться пластически [2-4,10,11]. Поэтому актуальна проблема математического моделирования неизотермического неупругого поведения тонкостенных элементов таких конструкций, в том числе и определение их остаточного состояния после воздействия динамических нагрузок взрывного типа. На данный момент времени эта проблема находится в стадии становления [2-4,12-21]. Так, в [18] моделировалось термовязкоупругопластическое динамическое деформирование

армированных гибких пластин. Температурное поле при этом в трансверсальном направлении аппроксимировалось полиномом второго порядка, как это традиционно принято делать в задачах квазистатического деформирования тонкостенных элементов КМ-конструкций [2,4,5,8]. В работах же [20,21] было показано, что при динамическом изгибе армированных пластин температуру по их толщине следует аппроксимировать полиномами более высоких порядков, а именно 6-7-го порядков.

Известно, что механические характеристики материалов, в том числе и компонентов композиций, зависят не только от температуры [10,22], но и от скорости деформирования [14,19,21,22]. Поэтому в [19] построена модель вязкоупруго-вязкопластического деформирования пологих КМ-оболочек, но при этом не учитывался температурный отклик в них. Позже в работе [21] была разработана модель неизотермического вязкоупруго-вязкопластического динамического деформирования гибких армированных пластин и показано, что при отсутствии внешних источников тепла немеханического происхождения неупругое поведение и таких КМ-конструкций можно определять без учета возникающих при этом температурных полей, т.е. по теории из [19].

Для учета слабого сопротивления тонкостенных КМ-конструкций поперечным сдвигам и моделирования волновых процессов в них используют традиционно неклассические теории Рейсснера [2,5,23-25], Амбарцумяна [18,19,21,26], Редди [7,8] или более точные теории изгиба [2,5,6,17,20,25], базирующиеся зачастую на гипотезе ломаной линии [2,5,6,25]. Так, в работах [18,19,21] для описания изгибного динамического поведения КМ-пластин и пологих оболочек использовалась простейшая неклассическая теория Амбарцумяна [26]. Однако в [17,20] показано, что для адекватного расчета вязкоупругопластического динамического деформирования армированных пластин необходимо использовать уточненную теорию изгиба как при учете [20], так и неучете [17] теплового отклика в них. Неизотермическое вязкоупруго-вязкопластическое динамическое поведение КМ-пластин в рамках уточненной теории изгиба до настоящего времени не исследовалось.

Интегрирование нелинейных динамических задач тонкостенных элементов конструкций осуществляют, как правило, численно с использованием явных [2,17-21] или неявных [3,27] схем.

На основании вышеизложенного данная работа посвящена моделированию термовязкоупруго-вязкопластического динамического деформирования армированных пластин в рамках уточненной теории изгиба [17,20]. Решение получающейся при этом связанной нелинейной термомеханической начально-краевой задачи строится с применением явного алгоритма шагов по времени [2,17-21].

## 1. ФОРМУЛИРОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И МЕТОД РАСЧЕТА

Рассматривается пластина толщиной  $2h$  (рис.1), с которой связана глобальная прямоугольная декартова система координат  $x_i$ , причем плоскость  $Ox_1x_2$  ( $x_3 = 0$ ) – срединная ( $|x_3| \leq h$ ). Конструкция усилена  $K$  семействами волокон с плотностями армирования  $\omega_k$  ( $1 \leq k \leq K$ ). В трансверсальном направлении  $x_3$  структура армирования, которая может быть и пространственной [1], является

однородной. Так, на рис.1а изображена ортогональная 2D-структура:  $K = 2$  [1,10,11], а на рис.1б представлена пространственная 4D-структура:  $K = 4$  [1].

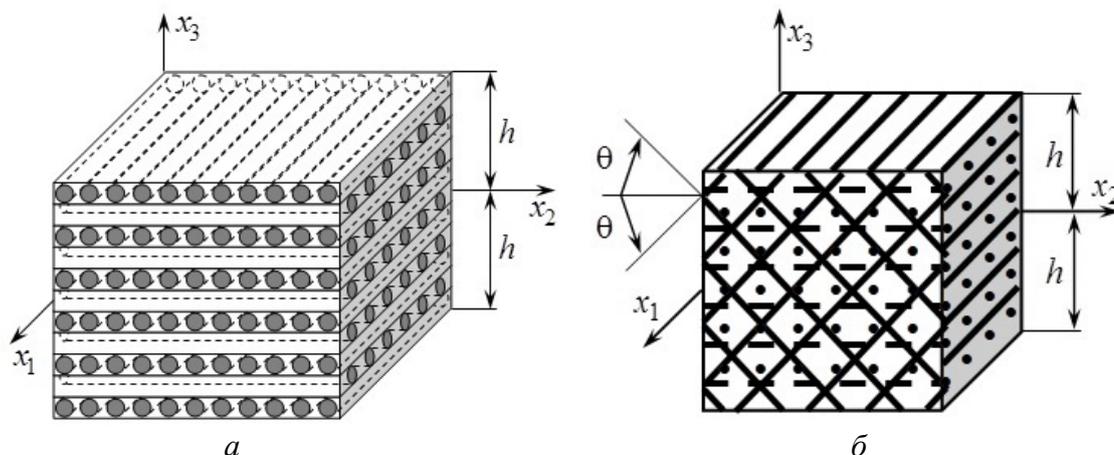


Рис.1. Элемент КМ-пластины с плоско-ортогональным армированием (а) и с пространственным 4D-армированием (б).

С каждым  $k$ -м семейством волокон связана локальная ортогональная система координат  $x_i^{(k)}$  так, что ось  $x_1^{(k)}$  сорентирована вдоль арматуры, а ее направление задается углами сферической системы координат  $\theta_k$  и  $\varphi_k$  (рис.2). При этом направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  локальных осей  $x_i^{(k)}$  относительно глобальных осей  $x_j$  ( $i, j = \overline{1,3}$ ) определяются по формулам [17]

$$\begin{aligned}
 l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k, \\
 l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & l_{23}^{(k)} &= 0, \\
 l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, & 1 \leq k \leq K.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

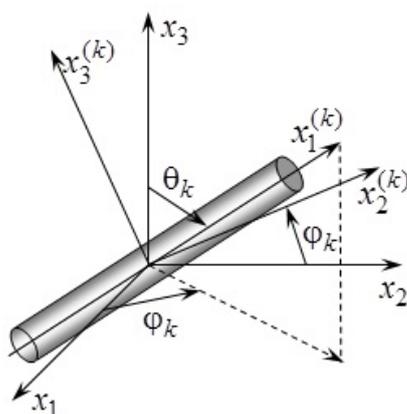


Рис.2. Локальная ортогональная система координат, связанная с арматурой  $k$ -го семейства.

Предполагаем: внешними касательными силами на лицевых плоскостях КМ-пластины можно пренебречь; в случае пространственного армирования структура отвечает требованиям, изложенным в [17]. (В частности, структуры армирования, изображенные на рис.1, этим требованиям заведомо удовлетворяют).

При выполнении этих условий в рамках уточненной теории изгиба перемещения точек гибкой пластины  $U_i$  и усредненные деформации ее композиции  $\varepsilon_{ij}$  имеют следующие выражения [17,20], в которых геометрическая нелинейность учитывается в приближении Кармана

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (2)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3);$$

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \\ + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \bar{\varepsilon}_{j3}^{(m)} + \partial_j \bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w,$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = (h^2 - x_3^2) \sum_{m=0}^M \frac{x_3^m}{h^2} \bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (3)$$

где  $w$  – прогиб в направлении  $x_3$ ;  $u_i$  – перемещения точек срединной плоскости конструкции в тангенциальных направлениях  $x_i$ ;  $t_0$  – начальный момент времени  $t$ ;  $\partial_i$  – оператор дифференцирования по координате  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $\Omega$  – область, которую занимает пластина в плане. При задании в равенствах (2) и (3) значения  $M = 0$  из них вытекают кинематические соотношения теорий Редди [7,8] и Амбарцумяна [18,21]; при  $M \geq 1$  получаются разные варианты уточненной теории, которые можно трактовать как частные случаи теории, предложенной в [5]. Неизвестными в выражениях (2) и (3) являются двумерные функции  $w$ ,  $u_i$  и  $\bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$ ).

Материалы фаз композиции пластины предполагаются однородными и изотропными. Их вязкоупругое деформирование описывается уравнениями тела Максвелла-Больцмана, а пластическое поведение – уравнениями теории течения с изотропным упрочнением, причем функции нагружения зависят от скорости деформирования компонентов композиции, температуры и параметров их упрочнения. При этом в некоторый текущий момент времени  $t$  определяющие уравнения для композиции, которые связывают между собой скорости усредненных напряжений в ней  $\dot{\sigma}_{ij}$ , скорости усредненных деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  и температуру  $\Theta$ , согласно результатам работы [21], можно записать в матричной форме

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \quad (4)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \equiv (\dot{\sigma}_{11} \quad \dot{\sigma}_{22} \quad \dot{\sigma}_{33} \quad \dot{\sigma}_{23} \quad \dot{\sigma}_{31} \quad \dot{\sigma}_{12})^T, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv (\dot{\varepsilon}_{11} \quad \dot{\varepsilon}_{22} \quad \dot{\varepsilon}_{33} \quad 2\dot{\varepsilon}_{23} \quad 2\dot{\varepsilon}_{31} \quad 2\dot{\varepsilon}_{12})^T; \quad (5)$$

$6 \times 6$ -матрица  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  и шестикомпонентный вектор-столбец  $\mathbf{p} = (p_i)$  ( $i, j = \overline{1, 6}$ ) вычисляются по формулам (2.16)-(2.18) из [21] при учете выражений (1); индекс Т – операция транспонирования; точка – частная производная по времени  $t$ . Элементы матрицы  $\mathbf{B}$  и вектора  $\mathbf{p}$  зависят как от структуры армирования (углов  $\theta_k$ ,  $\varphi_k$  и плотностей  $\omega_k$ ), так и от физико-механических характеристик

компонентов композиции и их текущего термовязкоупруго-вязкопластического состояния.

В настоящем исследовании моделируется динамическое поведение КМ-пластины как гибкой тонкостенной термомеханической системы, поэтому нормальное напряжение в трансверсальном направлении  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  с приемлемой для инженерных приложений точностью можно аппроксимировать линейно по координате  $x_3$  [24]

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad (6)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где  $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  – напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых плоскостях конструкции, известные из соответствующих граничных условий.

Согласно равенствам (5), из третьего уравнения системы (4) можно определить скорость линейной деформации в поперечном направлении

$$\dot{\epsilon}_{33} = b_{33}^{-1} (\dot{\sigma}_{33} - p_3 - b_{31} \dot{\epsilon}_{11} - b_{32} \dot{\epsilon}_{22} - 2b_{34} \dot{\epsilon}_{23} - 2b_{35} \dot{\epsilon}_{31} - 2b_{36} \dot{\epsilon}_{12}). \quad (7)$$

Здесь скорость напряжения  $\dot{\sigma}_{33}$  вычисляется путем дифференцирования по времени выражения (6), а скорости деформаций композиции  $\dot{\epsilon}_{ij}$  в правой части – путем дифференцирования по  $t$  кинематических соотношений (3), поэтому их можно выразить через искомые двумерные функции  $w, \dot{w}, \dot{u}_i$  и  $\dot{\bar{\epsilon}}_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$ ).

К равенствам (2)-(7) следует присоединить приведенные двумерные уравнения движения гибкой пластины [17,20], конечно-разностные по времени аналоги которых выписаны ниже.

Согласно результатам работ [18,20,21], температуру по толщине КМ-пластины зададим полиномом порядка  $L$

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (8)$$

где  $\Theta_l$  ( $0 \leq l \leq L$ ) – искомые коэффициенты;  $\Theta^0 = \text{const}$  – температура естественного состояния конструкции.

Чтобы замкнуть систему разрешающих двумерных уравнений термовязкоупруго-вязкопластического деформирования рассматриваемой КМ-пластины, нужно добавить приведенные уравнения теплового баланса (см. (65) в [18]), а также необходимые механические [17,20] и тепловые (см. (63) и (72) в [18]) граничные и начальные условия, заданные при  $t = t_0$  (см. (74) в [18]).

Как и в работах [18,20,21], исследуемую нелинейную связанную термомеханическую задачу проинтегрируем, используя явную численную схему, т.е. значения неизвестных функций будем определять лишь в некоторые дискретные моменты времени  $t_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Предполагаем: при  $t = t_{n-1}$  и  $t = t_n$  уже вычислены или заданы значения следующих функций [17,18,20,21]

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_i^{(p)}(\mathbf{x}) \equiv u_i^{(p)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \\
\sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad U^{(r)}(\mathbf{x}) \equiv U^{(r)}(t_n, \mathbf{x}), \quad q_i^n(\mathbf{r}) \equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), \\
\Theta_s^m(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_s(t_m, \mathbf{x}), \quad \dot{\Theta}_s^{n-1}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\Theta}_s(t_{n-1}, \mathbf{x}), \quad q_\infty^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \\
\sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \dot{\sigma}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\sigma}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \\
\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \dot{p}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \dot{p}_{ij}^{(k)}(t_n, \mathbf{r}), \\
\chi_k^n(\mathbf{r}) &\equiv \chi_k(t_n, \mathbf{r}), \quad l = 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = n-1, n, \quad 0 \leq p \leq M+1, \\
0 \leq r &\leq L-2, \quad 0 \leq s \leq L, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h,
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$u_i^{(p)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_l(t, \mathbf{r}) x_3^p dx_3, \quad U^{(r)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^r dx_3, \tag{10}$$

$$l = 1, 2, \quad 0 \leq p \leq M+1, \quad 0 \leq r \leq L-2;$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ,  $p_{ij}^{(k)}$  – соответственно напряжения, полные и пластические деформации в  $k$ -м компоненте композиции ( $k = 0$  – связующий материал,  $k \geq 1$  – волокна  $k$ -го семейства);  $\chi_k$  – параметр упрочнения (Одквиста) в том же компоненте;  $U$  – удельная внутренняя энергия композиции;  $q_i$  – компоненты усредненного теплового потока в композиции, связанные с градиентом температуры  $\Theta$  соотношениями (50) из [18];  $q_\infty^{(\pm)}$  – заданные тепловые потоки через верхнюю (+) и нижнюю (–) лицевые плоскости пластины. Разыскиваемые двумерные функции  $u_i$  и  $\bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $0 \leq m \leq M$ ) в равенствах (2) и (3) однозначно вычисляются через градиент прогиба  $w$  и новые кинематические переменные  $u_i^{(p)}$  (см. (10)) [17,20].

В механической составляющей исследуемой динамической задачи производные по времени будем аппроксимировать их конечными центральными разностями на трехточечном шаблоне  $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ , что позволяет построить явную численную схему [17-21]. Заменяя в уточненных уравнениях движения гибкой пластины вторые производные по  $t$  от неизвестных функций  $w$  и  $u_i^{(p)}$  их конечно-разностными аналогами, при учете равенств (2), (6), (10) и обозначений, аналогичных (9), будем иметь [17,20]

$$\begin{aligned}
\frac{2h\rho}{\tau^2} \left( w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{j3}^n + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^n \partial_i w^n \right) + \sigma_{33}^{n(+)} - \sigma_{33}^{n(-)}, \\
\frac{\rho}{\tau^2} \left( u_i^{(l)n+1} - 2u_i^{(l)n} + u_i^{(l)n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{ij}^{(l)n} - M_{j3}^{(l)n} \partial_i w^n \right) - h^l \left[ \sigma_{33}^{n(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{n(-)} \right] \partial_i w^n - \\
&\quad - l M_{i3}^{(l-1)n} + l M_{33}^{(l-1)n} \partial_i w^n, \\
\mathbf{x} \in \Omega, \quad i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned}$$

(11)

где

$$\rho \equiv \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad (12)$$

$$lM_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \frac{h^l}{2} \left[ \left( \sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)} \right) \left( 1 - (-1)^l \right) + \right. \\ \left. + \frac{l}{l+1} \left( \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \left( 1 + (-1)^l \right) \right], \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq l \leq M + 1;$$

$\rho_0, \rho_k$  – объемные плотности связующей матрицы и арматуры  $k$ -го семейства;  $\omega_0$  – относительное объемное содержание связующего в представительном элементе композиции;  $\tau = \text{const} > 0$  – шаг по времени. Массовые внешние силы в равенствах (11) не учитываются. Усредненные напряжения в композиции  $\sigma_{ij}$  (см. (12)) и деформации  $\varepsilon_{ij}$  (см. (3)-(5)) в композиции вычисляются через напряжения  $\sigma_{ij}^{(k)}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = \overline{1, 3}, 0 \leq k \leq K$ ) в материалах композиции по правилу простой смеси [17,18,21], аналогично первому соотношению в (12).

Используя формулы (12) и предположения (9), в рассматриваемый момент времени  $t_n$  можно определить все силовые факторы  $M_{ij}^{(l)}$  и внешние распределенные силы  $\sigma_{33}^{(\pm)}$ , входящие в правые части уравнений (11). Следовательно, из этих равенств при учете соответствующих граничных и начальных условий [17,20] по явной схеме можно рассчитать значения искомых функций  $w^{n+1}$  и  $u_i^{(l)}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq l \leq M + 1$ )  $u_i^{(l)}$  в следующий момент времени  $t_{n+1}$ .

Для численного интегрирования теплофизической составляющей рассматриваемой связанной термомеханической задачи также используем явную, но двухслойную схему по времени. Тогда двумерные уравнения теплового баланса, дискретизированные по времени на шаблоне  $\{t_n, t_{n+1}\}$ , при учете соотношений (8), (10) и обозначений, аналогичных (9), примут вид [20,21]

$$\frac{\rho}{\tau} \left( U^{(m+1)} - U^{(m)} \right) = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}, \quad (13)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq L - 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$-\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} \left( l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)} \left( \Theta_{\infty}^{(-)} - \Theta^0 \right) + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}),$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} \left( l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)} \left( \Theta_{\infty}^{(+)} - \Theta^0 \right) - q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad (14)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0;$$

$$C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j + \\ + \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (15)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L - 2,$$

где

$$H(s) \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} [1 - (-1)^{s+1}], \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (16)$$

$$\bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = h^m [q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)}] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}),$$

$$W^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} x_3^m dx_3, \quad C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^K c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0, 1, 2),$$

$$\lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33} \Big|_{\Theta = \Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv q_3(t, \mathbf{x}, \pm h) = q_\infty^{(\pm)}(t, \mathbf{x});$$

$\lambda_{33}$  – коэффициент теплопроводности композиции в поперечном направлении  $x_3$ , определяемый по формуле (51) из [18];  $\alpha^{(\pm)}$  – коэффициент теплоотдачи через верхнюю (+) и нижнюю (–) лицевые плоскости конструкции;  $\Theta_\infty^{(\pm)}$  – температуры окружающей среды со стороны тех же поверхностей;  $c_l^{(k)}$  – экспериментально определенные коэффициенты квадратичной аппроксимации удельной теплоемкости  $k$ -го компонента композиции  $c_k(\Theta - \Theta^0)$  (в случае учета ее термочувствительности)

$$c_k(\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)} \cdot (\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)} \cdot (\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (17)$$

Равенства (14) представляют собой тепловые граничные условия общего вида, заданные на лицевых плоскостях КМ-пластины и преобразованные с учетом разложения температуры в виде (8). Равенство (15) связывает коэффициенты полиномиальной аппроксимации (8) с двумерными функциями  $U^{(m)}$ , введенными в (10). Уравнения (14) и (15) справедливы для любого момента времени  $t \geq t_0$ .

В текущий момент времени  $t_n$  по формулам (16) при учете предположений (9) можно определить правые части в равенствах (13), из которых по явной схеме вычисляем значения функций  $U^{(m)}$  при  $t = t_{n+1}$ , используя при этом необходимые граничные и начальные условия (см. (72)-(74) в [18]). Таким образом, в следующий момент времени  $t_{n+1}$  правые части в равенствах (14) и (15) уже известны, поэтому из них, учитывая соотношения (16), можно определить искомые коэффициенты  $\Theta_l^{(n+1)}(\mathbf{x})$  ( $0 \leq l \leq L$ ) в полиномиальном представлении температуры (8).

В остальном предлагаемая численная схема (11) и (13) при учете соотношений (3), (7), (12), (16) и структурных соотношений механики композитов (51), (52) из [18] и (2.16)-(2.20) из [21] реализуется совершенно так же, как и в [17,18,20,21]. Согласно результатам работ [18,21], шаг по времени  $\tau$  в соотношениях (11) и (13) нужно задавать с учетом выполнения необходимых условий устойчивости Куранта [2].

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Как и в [20,21], рассмотрим неизотермическое вязкоупругопластическое и вязкоупруго-вязкопластическое динамическое поведение гибких КМ-пластин

толщиной  $2h = 2$  см, которые занимают в плане прямоугольную область  $\Omega$ :  $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$  и  $a = 3b$  при  $b = 50$  см ( $h/b = 1/50$ ). Кромки конструкций жестко закреплены, т.е.  $w = 0$  и  $u_i^{(m)} = 0$  при  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ,  $t \geq t_0$  (см. соотношения (10) и (11)). До момента времени  $t = t_0 = 0$  пластины находятся в покое ( $w = 0$  и  $u_i^{(m)} = 0$  при  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t < t_0$ ;  $i = 1, 2$  и  $0 \leq m \leq M + 1$ ) при температуре естественного состояния  $\Theta = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$  ( $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $|x_3| \leq h$ ,  $t < t_0$ ). При  $t = t_0$  конструкции нагружаются снизу избыточным давлением  $p(t)$ , порожденным воздушной взрывной волной [27]

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\beta(t-t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\beta = -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (19)$$

$t_{\max}$  – время, при котором давление достигает своего наибольшего значения  $p_{\max}$ ;  $t_{\min}$  – время, при котором уже можно пренебречь значением  $p(t)$  по сравнению с  $p_{\max}$  (так, соотношение (19) соответствует условию  $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$ ). На основании данных экспериментов [27] в расчетах примем  $t_{\max} = 0,1$  мс,  $t_{\min} = 2$  мс и  $p_{\max} = 4$  МПа.

Через лицевые плоскости КМ-конструкций ( $x_3 = \pm h$ ) теплообмен с окружающей средой происходит в условиях естественной конвекции ( $q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$  и  $\alpha^{(\pm)} = 30$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) [28]) при температуре воздуха  $\Theta_\infty^{(\pm)}$ , равной температуре естественного состояния пластины  $\Theta^0$  (см. (14)). На кромках  $|x_1| = a$  и  $|x_2| = b$  поддерживается фиксированная температура, также равная  $\Theta^0$ .

Конструкции выполнены из эпоксидной смолы [11] и армированы стеклянными волокнами [10]. Пластическое деформирование материалов композиций при активном их нагружении и постоянстве скорости деформации  $\dot{\varepsilon}$  и температуры  $\Theta$  задается соотношением [21]

$$\sigma = \text{sign}(\varepsilon_p) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} \varepsilon_p, \quad 0 \leq k \leq K,$$

где  $\sigma$  и  $\varepsilon_p$  – напряжение растяжения-сжатия и пластическая составляющая осевой деформации  $\varepsilon$ ;  $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\dot{\varepsilon}, \Theta)$  – модуль линейного упрочнения  $k$ -го компонента композиции;  $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\dot{\varepsilon}, \Theta)$  – предел текучести того же компонента. Физико-механические характеристики материалов композиции приведены в Таблице 1, где  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $\eta$  – коэффициент линейной вязкости при сдвиге в соотношениях модели Максвелла-Больцмана (соответствующая объемная вязкость  $\mu$  не учитывается (см. (2) в [18])),  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения,  $c$  – удельная теплоемкость. Во второй части Таблице 1 (при  $\dot{\varepsilon} = 104$  с<sup>-1</sup>) представлены только те данные, которые отличаются от значений характеристик, указанных в первой части (при  $\dot{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>). В расчетах

зависимости всех характеристик от скорости деформирования  $\dot{\epsilon}$  и температуры  $\Theta$  линейно аппроксимировались по данным, представленным в Таблице 1.

При проведении расчетов по координатам  $x_1$  и  $x_2$  вводилась сетка с шагами  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50 = 1$  см при шаге по времени  $\tau = 0,5$  мкс. При такой дискретизации необходимые условия устойчивости разработанной в разделе 1 численной схемы выполняются с запасом для каждого из материалов стеклопластиковой композиции (см. (82) в [18]), а значит и для композиции в целом при любой структуре армирования.

Исследовалось динамическое поведение стеклопластиковых пластин с двумя однородными структурами ( $\omega_k = \text{const}$ ,  $\theta_k = \text{const}$ ,  $\varphi_k = \text{const}$ ,  $1 \leq k \leq K$ ): 1) 2D-армирование, когда два ( $K = 2$ ) семейства волокон уложены по направлениям  $Ox_1$  и  $Ox_2$  (см. рис.1а) с плотностями  $\omega_1 = 0,2$  и  $\omega_2 = 0,3$  соответственно; 2) пространственное 4D-армирование ( $K = 4$ ), при котором первые два семейства арматуры также уложены по направлениям  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , а третье и четвертое семейства расположены наклонно в плоскости  $Ox_2x_3$  и их направления задаются углами (см. равенства (1) и рис.2):  $\theta_3 = \pi/4$ ,  $\theta_4 = 3\pi/4$ ,  $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$  (см. рис.1б, где  $\theta = \pi/4$ ). В случае второй структуры плотности армирования имеют значения:  $\omega_1 = \omega_2 = 0,2$  и  $\omega_3 = \omega_4 = 0,05$ . При обоих типах армирования объем используемой арматуры один и тот же.

Таблица 1.

Физико-механические характеристики материалов композиции [10,11].

Характеристика материала	Эпоксидная смола		Стеклопластиковое волокно	
	$\Theta = 20^\circ\text{C}$	$\Theta = 40^\circ\text{C}$	$\Theta = 20^\circ\text{C}$	$\Theta = 80^\circ\text{C}$
$\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$				
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1210,0	1208,0	2520,0	2519,6
$E$ , ГПа	2,8	2,3	86,8	86,3
$\nu$	0,330	0,333	0,250	0,254
$\eta$ , Мпа·с	680	600	2500	2400
$\sigma_s$ , МПа	20	18	4500	4400
$E_s$ , ГПа	1,114	0,783	6,230	5,168
$\lambda$ , Вт/(м·К)	0,243	0,240	0,89	0,86
$\alpha \cdot 10^6$ , К <sup>-1</sup>	68,1	70,3	2,5	2,6
$c$ , кДж/(кг·К)	1,54	1,60	0,800	0,839
$\dot{\epsilon} = 104,0 \text{ c}^{-1}$				
$\sigma_s$ , МПа	22,0	19,5	4600	4550
$E_s$ , ГПа	1,238	0,853	6,314	5,458

В работе [21] были проведены расчеты неизотермической вязкоупруго-вязкопластической динамики стеклопластиковой пластины со структурой,

аналогичной первому типу армирования, при использовании простейшей неклассической теории изгиба Амбарцумяна [26] (при задании в (2) и (3) значения  $M = 0$ ) и при варьировании порядка полинома  $L$  в аппроксимации температуры (8). Там было продемонстрировано, что для адекватного определения температуры  $\Theta$  при таких расчетах в разложении (8) нужно задавать  $L = 6$  или  $L = 7$ , а не традиционно используемое в задачах термомеханического деформирования тонкостенных элементов конструкций значения  $L = 2$  [8,18]. (При  $L \geq 8$  линейризованная система уравнений (14) и (15) является плохо обусловленной, поэтому решение соответствующей задачи расходится.) Основываясь на этих результатах, в настоящем исследовании в соотношении (8) принималось  $L = 7$ .

В работах же [17,20] было показано, что как изотермическое, так и неизотермическое вязкоупругопластическое динамическое деформирование КМ-пластин следует моделировать в рамках уточненной теории их изгиба, задавая в соотношениях (2) и (3) значения  $M = 6$  или  $M = 7$ , а не  $M = 0$ , как в [18,21]. (При задании  $M \geq 8$  решение рассматриваемой задачи расходится по причинам, которые аналогичны указанным выше, что приводит к неустойчивому численному алгоритму.)

Во Введении уже отмечалось, что в данном исследовании изучается влияние аппроксимаций (2) и (3) высоких порядков (при  $M = 7$ ) на расчетное термомеханическое поведение и остаточное состояние динамически изгибаемых КМ-пластин при вязкоупруго-вязкопластическом деформировании их компонентов композиций.

На рис.3 изображены осцилляции прогиба центральной точки ( $w_0(t) \equiv w(t,0,0)$ ) пластины с 2D-структурой армирования, полученные по уточненной теории изгиба с использованием модели термовязкоупруго-вязкопластического деформирования компонентов ее композиции. (Зависимости  $w_0(t)$ , рассчитанные по другим теориям, в том числе и для конструкции с 4D-структурой, качественно аналогичны кривой, изображенной на рис.3, поэтому здесь не приводятся.) Как видно из рис.3, к моменту времени  $t = 1$  с поперечные колебания такой КМ-пластины почти полностью прекращаются, поэтому термомеханическое состояние данной конструкции при  $t = 1$  с можно рассматривать как остаточное.

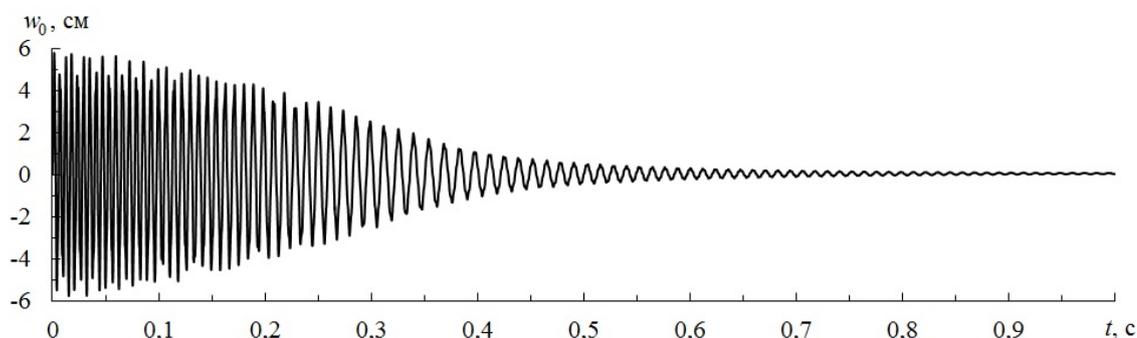


Рис.3. Осцилляции прогиба центральной точки стеклопластиковой пластины с 2D-структурой армирования.

На рис.4 представлены зависимости от  $t$  максимальных значений температуры  $\Theta_m(t; M) = \max_r \Theta(t, \mathbf{r}; M)$  ( $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$  и  $|x_3| \leq h$ ), рассчитанные по разным теориям для пластины с 2D-структурой армирования в окрестности начального момента времени ( $0 \leq t \leq 60$ мс). Кривые  $I$  и  $I'$  получены по уточненной теории изгиба ( $M=7$  в соотношениях (2) и (3)) при учете (кривая  $I$ ) и неучете (кривая  $I'$ ) зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования, т.е. кривая  $I'$  рассчитана по теории, разработанной в [20], при использовании экспериментальных данных, приведенных в первой части Таблице 1 (при  $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ ). Кривая 2 на рис.4 определена при использовании теории изгиба Амбарцумяна (при  $M=0$  в (2) и (3)) и учете зависимости пластических свойств компонентов композиции от скорости деформирования.

Сравнение всех кривых на рис.4 показывает, что зависимости  $\Theta_m(t; M)$ , полученные по разным теориям, с течением времени различаются все более заметно. Сопоставление же точек, имеющих максимальные ординаты на кривых  $I$  и 2, демонстрирует, что использование теории Амбарцумяна (кривая 2) для расчета динамики рассматриваемой КМ-пластины приводит к занижению наибольшего значения температуры, достигаемого в процессе ее осцилляций ( $\Theta_{\max}(M) = \max_{t \geq t_0} \Theta_m(t; M)$ ), всего на  $1,6^\circ\text{C}$  по сравнению с результатом расчета по уточненной теории изгиба (кривая  $I$ ). Аналогичный вывод справедлив и при сравнении кривых  $I$  и  $I'$  на рис.4: разница значений  $\Theta_{\max}$  при этом еще меньше и составляет всего  $1^\circ\text{C}$ . Согласно поведению всех кривых на рис.4, расчеты, выполненные по всем обсуждаемым теориям, предсказывают, что рассматриваемая КМ-пластина при динамическом неупругом изгибном деформировании нагревается в отдельных точках менее чем на  $15^\circ\text{C}$ . С течением времени осцилляции зависимостей  $\Theta_m(t; M)$ , полученных по разным теориям, затухают, и к моменту времени  $t=1$  с они практически полностью прекращаются, причем ординаты точек на всех кривых на рис.4 при  $t=1$  с имеют значения, близкие к  $27^\circ\text{C}$ . (Соответствующие участки кривых на рис.4 не изображены).

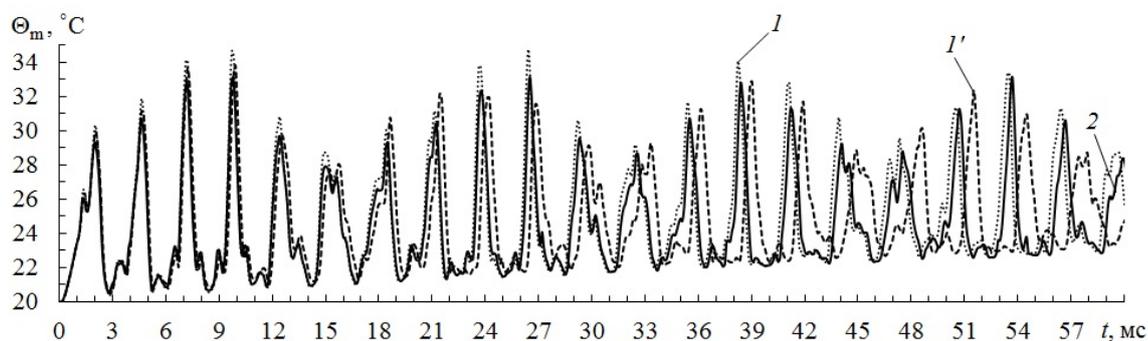


Рис.4. Зависимости от времени наибольших значений температуры в стеклопластиковой пластине с 2D-структурой армирования, рассчитанные по разным теориям.

Качественно аналогичные результаты получаются при сравнении зависимостей  $\Theta_m(t; M)$  и значений  $\Theta_{\max}(M)$ , рассчитанных по разным теориям

для стеклопластиковой пластины с 4D-структурой армирования. Соответствующие кривые здесь не приводятся в силу их существенного сходства с зависимостями, представленными на рис.4. Однако в силу относительной тонкости рассматриваемых КМ-пластин значения  $\Theta_{\max}(M)$  для конструкции с 4D-структурой получаются примерно на  $0,5^\circ\text{C}$  больше аналогичных величин, рассчитанных по тем же теориям для пластины с 2D-структурой армирования (см. рис.4).

И хотя температурные зависимости  $\Theta_m(t;M)$ , изображенные на рис.4, имеют не очень сильное различие (в частности при сравнении значений  $\Theta_{\max}(M)$ ), расчеты, выполненные по разным теориям, могут приводить к существенно различным механическим откликам рассматриваемых КМ-пластин, особенно это касается их остаточных состояний. Так, на рис.5 представлены зависимости от  $t$  наибольших значений интенсивности деформаций эпоксисвязующего  $\varepsilon_*^{(0)}$  ( $\varepsilon_m^{(0)}(t;M) = \max_r \varepsilon_*^{(0)}(t,r;M)$ ) в пластине с 2D-структурой армирования. Кривые 1, 2 и 1' на рис.5 получены по тем же теориям, что и кривые с такими же номерами на рис.4. Кривая же 1'' на рис.5 рассчитана по уточненной теории изгиба (при  $M=7$ ) в предположении об изотермическом вязкоупруго-вязкопластическом деформировании материалов композиции, т.е. без учета теплового отклика. Кривые 1 и 1'' на рис.5 при выбранном по вертикальной оси масштабе визуально практически неразличимы, так как ординаты их точек различаются только во второй или третьей значащей цифре. В частности, при  $t=1$  с ордината точки на кривой 1'' всего на 2,2% меньше, чем на кривой 1.

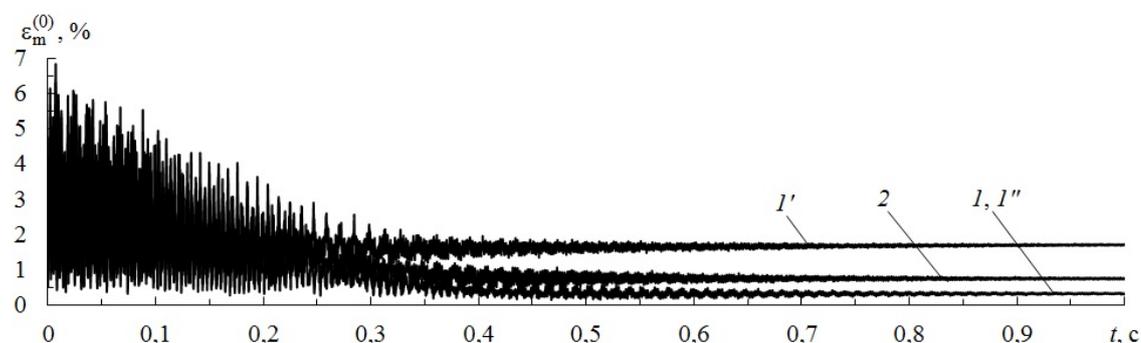


Рис.5. Зависимости от времени максимальных значений интенсивности деформаций связующего в стеклопластиковой пластине с 2D-структурой армирования, рассчитанные по разным теориям.

Как видно, кривые 2 и 1' на рис.5 существенно отличаются от кривой 1, особенно в окрестности момента времени  $t=1$  с, когда и осцилляции величин  $\varepsilon_m^{(0)}(t;M)$  практически полностью прекращаются. Так, ордината точки на кривой 2 при  $t=1$  с в 2,36 раза больше, чем на кривой 1, т.е. расчет термовязкоупруго-вязкопластического поведения КМ-пластины по теории изгиба Амбарцумяна (кривая 2) приводит к существенному завышению остаточного деформированного состояния компонентов ее композиции по сравнению с расчетом, выполненным по уточненной теории изгиба (кривая 1). Аналогично, ордината точки на кривой 1' при  $t=1$  с в 5,35 раза больше, чем на кривой 1. А значит, неучет зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования

(кривая  $I'$ ) также приводит к значительному завышению остаточного деформированного состояния компонентов композиции по сравнению с расчетом, учитывающим эту зависимость (кривая  $I$ ).

Зависимости  $\varepsilon_m^{(0)}(t;M)$ , полученные для конструкции с 4D-структурой армирования, здесь не приведены, так как они качественно схожи с кривыми, изображенными на рис.5. Количественное различие заключается лишь в том, что для пластины с пространственным армированием максимально достигаемые в процессе осцилляций значения  $\varepsilon_m^{(0)}(t;M)$  получаются несколько большими, чем для конструкции 2D-структурой. Однако в остаточном состоянии КМ-пластины с пространственным армированием величина  $\varepsilon_m^{(0)}(t;M)$  получается меньшей, чем в конструкции с плоско-перекрестным армированием. Так, при  $t = 1$  с значение  $\varepsilon_m^{(0)}(t;M)$ , рассчитанное для пластины с 4D-структурой армирования по уточненной теории изгиба ( $M = 7$ ) с использованием модели термовязкоупруго-вязкопластического деформирования ее компонентов композиции, на 12% меньше аналогичной величины, полученной для конструкции с 2D-структурой армирования (см. правую точку на кривой  $I$  на рис.5). Следовательно, если величину  $\varepsilon_m^{(0)}(t;M)$  в остаточном состоянии (при  $t \rightarrow \infty$ ) рассматривать как меру поврежденности эпоксисвязующего, то даже в относительно тонкой стеклопластиковой пластине при ее динамическом изгибном деформировании замена плоско-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру приводит к заметному уменьшению степени поврежденности связующего материала, т.е. такая замена структур армирования является эффективной.

Несмотря на то, что зависимости  $\varepsilon_m^{(0)}(t;M)$ , определенные по вязкоупруго-вязкопластической модели деформирования КМ-пластин как при учете, так и неучете теплового отклика в них, получаются очень близкими (см. кривые  $I$  и  $I''$  на рис.5), в целом остаточное деформированное состояние компонентов их композиций может существенно различаться, что приводит к существенному различию остаточного прогиба, рассчитанного по этим теориям. Так, на рис.6 изображены зависимости остаточных прогибов  $w(x_2)$  в центральных поперечных сечениях КМ-пластин ( $x_1 = 0$ ) с 2D-структурой (рис.6а) и с 4D-структурой армирования (рис.6б), рассчитанные по разным теориям в момент времени  $t = 1$  с. Кривые на рис.6 получены при тех же условиях, что и кривые на рис.5 с такими же номерами. Из рис.6 видно, что на нем не только кривые 2 и  $I'$  (как и на рис.5), но и кривые  $I''$  существенно отличаются от кривых  $I$ . Следовательно, расчет термовязкоупруго-вязкопластического динамического изгиба стеклопластиковых пластин по теории Амбарцумяна (кривые 2) приводит к значительному искажению остаточного прогиба таких КМ-конструкций по сравнению с расчетом, выполненным по уточненной теории изгиба (кривые  $I$ ). Аналогично, расчеты, проведенные даже с использованием уточненной теории изгиба, но с применением модели, не учитывающей зависимость пластических свойств компонентов композиции от скорости их деформирования (кривые  $I'$ ), также приводят к существенному искажению формы остаточного прогиба по сравнению с расчетами, учитывающими эту зависимость (кривые  $I$ ). Кроме того, расчеты, выполненные по уточненной

теории изгиба с учетом чувствительности пластических свойств материалов композиции к скорости их деформирования, но без учета теплового отклика (кривые  $l''$ ), также приводят к значительному искажению формы остаточного прогиба стеклопластиковых пластин по сравнению с расчетами, проведенным по аналогичным теориям, но при учете температурного отклика в таких КМ-конструкциях (кривые  $l$ ).

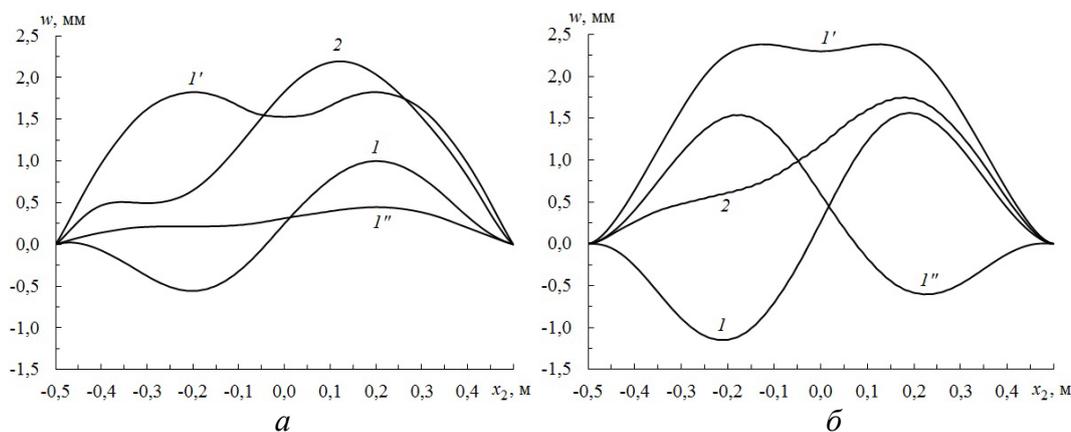


Рис.6. Остаточные прогибы КМ-пластин, рассчитанные по разным теориям в сечении  $x_1 = 0$ : а) случай 2D-структуры армирования; б) случай 4D-структуры армирования.

Сравнение поведения кривых 2 на рис.6а,б показывает: расчеты, выполненные по теории изгиба Амбарцумяна, предсказывают, что максимальный по модулю остаточный прогиб пластины с 2D-структурой армирования (см. рис.6а) больше аналогичной величины для конструкции с 4D-структурой (см. рис.6б). Однако все остальные кривые на рис.6а,б, рассчитанные по уточненной теории изгиба, наоборот, предсказывают, что для рассматриваемых относительно тонких стеклопластиковых пластин максимальные по модулю остаточные прогибы, определенные с использованием разных механических моделей их деформирования, для конструкции с 2D-структурой армирования (см. рис.6а) всегда меньше, чем для пластины с 4D-структурой (см. рис.6б). Следовательно, использование простейшей неклассической теории изгиба Амбарцумяна [26] для расчета неупругой динамики гибких КМ-пластин может приводить к количественно неверным представлениям о величине остаточного прогиба в таких конструкциях с разными типами армирования.

Поведение всех кривых на рис.6 свидетельствует о том, что после неупругого динамического деформирования в прямоугольных удлиненных КМ-пластинах образуются складки, которые ориентированы в продольном направлении  $Ox_1$ . Возникновение такой гофрированной остаточной формы объясняется тем, что в процессе пластического деформирования рассматриваемые стеклопластиковые пластины при изгибе трансформируются в искривленные КМ-панели, выпуклые вверх, а затем в процессе осцилляций прощелкивают вниз – в сторону выгнутости сформировавшихся панелей (динамическая потеря устойчивости).

Кривые  $l'$  на рис.6, рассчитанные по термовязкоупругопластической модели деформирования компонентов композиции рассматриваемых пластин, обладают симметрией относительно вертикальной прямой  $x_2 = 0$ , т.е.  $w(x_1, x_2) = w(x_1, -x_2)$ .

Остальные же кривые на рис.6, полученные с учетом зависимости пластических свойств компонентов композиции от скорости их деформирования, такой симметрией не обладают. Этот факт объясняется тем, что получающаяся в процессе неупругого изгибного деформирования искривленная КМ-панель в дальнейшем при поперечных осцилляциях может прощелкивать по несимметричной форме. В качестве несимметричного возмущающего фактора при этом выступают ошибки округления, которые накапливаются к расчетному моменту времени, когда КМ-конструкция прощелкивает вниз. Отметим, что ранее такая же асимметрия остаточных прогибов была обнаружена и для цилиндрических удлиненных КМ-панелей, неупругая динамика которых рассчитывалась по вязкоупруго-вязкопластической модели деформирования компонентов их композиций [19].

## ВЫВОДЫ

Разработанная уточненная теория неізотермического вязкоупруго-вязкопластического динамического деформирования гибких армированных пластин позволяет с разной степенью точности рассчитывать их термомеханическое поведение и остаточное состояние.

Выполненные расчеты продемонстрировали, что при интенсивном кратковременном нагружении в поперечном направлении относительно тонкие стеклопластиковые пластины в процессе осцилляций в отдельных точках нагреваются не более чем на 15°С, а после полного прекращения колебаний – не более чем на 7°С. Однако, несмотря на столь незначительный дополнительных нагрев таких КМ-конструкций их вязкоупруго-вязкопластический расчет следует проводить с учетом теплового отклика в них даже при отсутствии источников тепла немеханического происхождения. В частности, неучет температурного отклика приводит к существенному искажению величины и формы остаточного прогиба стеклопластиковых пластин.

Использование для расчета неупругой динамики таких КМ-конструкций традиционной неклассической теории изгиба Амбарцумяна [21,26] приводит к значительному завышению остаточного деформированного состояния материалов их композиций и остаточных прогибов. Аналогично, неучет чувствительности пластических свойств компонентов композиций к скорости их деформирования (термовязкоупругопластическая модель [20]) также приводит к существенному завышению остаточного деформированного состояния фаз композиций (причем в разы) и остаточных прогибов, а также к искажению остаточной формы таких КМ-конструкций. Следовательно, для проведения адекватных расчетов вязкоупругопластической динамики армированных пластин нужно использовать уточненную теорию изгиба (см. выражения (2) и (3) при  $M = 7$ ), учитывая при этом не только чувствительность пластических свойств их материалов композиций к скорости деформирования, но и тепловой отклик, который возникает в тонкостенных КМ-конструкциях.

Замена плоской многонаправленной структуры армирования (см. рис.1а) на пространственную структуру (см. рис.1б) даже в относительно тонкой стеклопластиковой пластине может оказаться эффективной при сохранении общего расхода арматуры, так как позволяет снизить максимум интенсивности остаточных деформаций эпоксисвязующего более чем на 10%.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник.* – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
2. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций.* – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
3. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // International Journal of Non-Linear Mechanics.* – 2011. – Vol.46. – Pp.807-817.
4. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андриюшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек.* – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.
5. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций.* – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
6. Куликов Г.М. *Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // Изв. РАН. МТТ.* – 1994. – №2. – С.33-42.
7. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2<sup>nd</sup> ed.* – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.
8. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа.* – Saarbrucken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.
9. Димитриенко Ю.И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах.* – М.: Физматлит, 2019. – 448 с.
10. Карпинос Д.М. *Композиционные материалы: Справочник.* – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
11. Любин Дж. *Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Книга 1.* – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
12. Vena P., Gastaldi D., Contro R. *Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // International Journal of Plasticity.* – 2008. – Vol.24. – Pp.483-508.
13. Qatu M.S, Sullivan R.W., Wang W. *Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009 // Composite Structures.* – 2010. – Vol.93. – Pp.14-31.
14. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. *Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // International Journal of Plasticity.* – 2012. – Vol.36. – Pp.86-112.
15. Alderliesten R.C., Benedictus R. *Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review // Int. J. Impact Eng.* – 2014. – Vol.67. – Pp.27-38.
16. Ахундов В.М. *Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // Механика композитных материалов.* – 2015. – Т.51. – №3. – С.539-558.
17. Янковский А.П. *Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования пластин с пространственными структурами армирования // Вычислительная механика сплошных сред.* – 2020. – Т.13. – №1. – С.5-22.
18. Янковский А.П. *Моделирование неизотермического вязкоупругопластического поведения гибких армированных пластин // Вычислительная механика сплошных сред.* – 2020. – Т.13. – №3. – С.350-370.

19. Янковский А.П. *Моделирование вязкоупругопластического поведения пологих оболочек с учетом скорости деформирования материала* // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т.63. – №2. – С.140-150.
20. Янковский А.П. *Уточненная модель неізотермического вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пластин* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т.29. – №3. – С.320-339.
21. Янковский А.П. *Моделирование неізотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования изгибаемых армированных пластин* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2023. – №5. – С.147-169.
22. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур*. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.
23. Reissner E. *The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates* // Journal of Applied Mechanics. – 1945. – Vol.12. – No.2. – Pp.69-77.
24. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.
25. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. – Amsterdam: Elsevier, 2013. – 412 p.
26. Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания*. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
27. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading* // Computers & Structures. – 1987. – Vol.26. – No.1/2. – Pp.1-15.
28. Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М., Нечаев С.Г., Иванов И.Е., Матюхин Л.М., Морозов К.А. *Теплотехника: Учеб. для вузов. 4-е изд., испр.* – М.: Высшая школа, 2003. – 671 с.

## REFERENCES

1. Tarnopol'skii Yu.M., Zhigun I.G., Poliakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannyye kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Spatially reinforced composite materials: Handbook]*. Moskva, Mashinostroenie, 1987, 224 p.
2. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksij [Nonlinear problems of dynamics composites designs]*. Nizhnij Novgorod, Izdatel'stvo Natsional'nogo issledovatel'skogo Nizhegorodskogo gosudarstvennogo universiteta imeni N.I. Lobachevskogo, 2002, 400 p.
3. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2011, Vol.46, Pp.807-817.
4. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]*. Moskva, Fizmatlit, 2014, 408 p.
5. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogoslojnykh konstruksij [Mechanics of multilayer structures]*. Moskva, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
6. Kulikov G.M. *Termouprugost' gibkikh mnogoslojnykh anizotropnykh obolochek [Thermo-elasticity flexible multilayered anisotropic shells]*. Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela, 1994, No.2, Pp.33-42.

7. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis* / 2<sup>nd</sup> ed. Boca Raton, CRC Press, 2004, 831 p.
8. Andreev A.N. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotorye aspekty chislennogo analiza [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]*. Saarbrucken (Deutschland), Palmarium Academic Publishing, 2013, 93 p.
9. Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika kompozitnykh konstruksij pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of composite structures at high temperatures]*. Moskva, Fizmatlit, 2019, 448 p.
10. Karpinos D.M. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Composite materials. Reference Book]*. Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.
11. Lubin G. *Handbook of composites*. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, 442 p.
12. Vena P., Gastaldi D., Contro R. *Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites*. International Journal of Plasticity, 2008, Vol.24, Pp.483-508.
13. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. *Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009*. Composite Structures, 2010, Vol.93, Pp.14-31.
14. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. *Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle*. International Journal of Plasticity, 2012, Vol.36, Pp.86-112.
15. Alderliesten R.C., Benedictus R. *Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review*. Int. J. Impact Eng., 2014, Vol.67, Pp.27-38.
16. Akhundov V.M. *Incremental carcass theory of fibrous media under larger elastic and plastic deformations*. Mechanics of composite materials, 2015, Vol.51, No.3, Pp.539-558.
17. Yankovskii A.P. *A Refined Model of Viscoelastic-Plastic Deformation of Flexible Plates with Spatial Reinforcement Structures*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2021, Vol.62, No.7, Pp.1045-1062.
18. Yankovskii A.P. *Modeling of Nonisothermal Viscoelastic-Plastic Behavior of Flexible Reinforced Plates*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2022, Vol.63, No.7, Pp.1243-1263.
19. Yankovskii A.P. *Simulation of viscoelastic-plastic behavior of shallow shells with account for strain rate of materials*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2022, Vol.63, No.2, Pp. 298-307.
20. Yankovskii A.P. *Utochnennaya model' neizotermicheskogo vyazkouprugoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh plastin [Refined model of non-isothermal viscoelastic-plastic deformation of flexible reinforced plates]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2023, Vol.29, No.3, Pp.320-339.
21. Yankovskii A.P. *Modeling of non-isothermal viscoelastic-viscoplastic deformation of bending reinforced plates*. Mechanics of Solids, 2023, Vol.58, No.5, Pp.1559-1577.
22. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. *Raschety na prochnost', ustojchivost' i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur [Calculations on strength, stability and fluctuations in conditions of high temperatures]*. Moskva, Mashinostroenie, 1965, 567 p.

23. Reissner E. *The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates*. Journal of Applied Mechanics, 1945, Vol.12, No.2, Pp.69-77.
24. Bogdanovich A.E. *Nelinejnye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]*. Riga, Zinatne, 1987, 295 p.
25. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. Amsterdam, Elsevier, 2013, 412 p.
26. Ambarcumian S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost', ustojchivost' i kolebaniya [The theory of anisotropic plates. Strength, stability and fluctuations]*. Moscow, Nauka, 1987, 360 p.
27. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading*. Computers & Structures, 1987, Vol.26, No.1/2, Pp.1-15.
28. Lukanin V.N., Shatrov M.G., Camfer G.M., Nechaev S.G., Ivanov I.E., Matyukhin L.M., Morozov K.A. *Teplotekhnika: Uchebnyk dlya vuzov [Heat engineering: Textbook for universities]*. Moskva, Vysshaya shkola, 2003, 671 p.

Поступила в редакцию 17 мая 2024 года.

---

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с., Лаборатория «Физики быстропротекающих процессов», ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: [yankovsky\\_ap@itam.nsc.ru](mailto:yankovsky_ap@itam.nsc.ru)