УДК 539.3
EDN JDRDYO (https://elibrary.ru/jdrdyo)
DOI 10.33113/mkmk.ras.2024.30.03.06

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА КОНТИНУАЛЬНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК N-ГО ПОРЯДКА*

Жаворонок С.И.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

На основе Лагранжева формализма аналитической механики, распространенного на континуальные системы, получены уравнения динамики системы с диссипацией. Система определена на некотором многообразии конфигурационным пространством со множеством переменных поля первого рода, пространственной и граничной плотностями функционала Лагранжа, зависящей от переменных поля, их производных по временной переменной, а также некоторых линейных преобразований переменных поля, и диссипативной функцией, билинейной относительно первых производных переменных поля по времени аналогично функции Рэлея в механике дискретных систем. Построены уравнения движения, имеющие смысл уравнений Лагранжа второго рода континуальной системы с диссипацией, и их естественные краевые условия. Рассмотрено приложение полученного вариационного формализма аналитической механики континуальных диссипативных систем к построению линейной квазитрехмерной теории обобщенно-термоупругих оболочек. Модель оболочки формулируется на расслоении двумерного гладкого многообразия, соответствующего реперной поверхности оболочки. Переменные поля первого рода определены коэффициентами разложения вектора перемещения и вектора теплового смещения Био по биортогональной системе функций безразмерной нормальной координаты, образующей базис в пространстве функций, интегрируемых с квадратом. Путем пространственной редукции объемной и граничной плотностей функционалов Лагранжа и Рэлея, соответствующих модели обобщенной термоупругости Лорда-Шульмана, получены в общем виде поверхностная и контурная плотности функционалов и построены уравнения Лагранжа второго рода теории оболочек N-го порядка. Получены определяющие уравнения и приведена постановка начально-краевой задачи динамики для анизотропной обобщенно-термоупругой оболочки.

Ключевые слова: механика аналитическая; термодинамика; принципы вариационные; формализм Лагранжев; Лагранжа уравнения второго рода; оболочек теория N-го порядка

GEBERALIZED LAGRANGE EQUATIONS OF THE SECOND KIND FOR DISSIPATIVE CONTINUUM SYSTEMS IN THE SHELL THEORY OF N'TH ORDER

Zhavoronok Sergey I.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

* *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №24-19-00845).*

ABSTRACT

The new dynamic equations for a dissipative system are obtained on the basis of the background of the Lagrangian analytical mechanics formalism extended on continua. The considered system is defined on some manifold within a configuration space with the set of field variables of the first kind, the spatial and boundary density of the Lagrangian depending on the field variables, their time derivatives, and some their linear transforms, and the bilinear dissipation function depending on the time derivatives of the field variables analogous to the Rayleigh function in the dynamics of discrete systems. The corresponding dynamic equations interpreted as Lagrange equations of the second kind for a continuum dissipative system as well as their essential boundary conditions are derived. The proposed variational formalism of the analytical mechanics of dissipative continua is applied to the formulation of the linear quasi-3D theory of generally thermoelastic shells. The shell model is defined on the fibration of some smooth two-dimensional manifold corresponding to the shell base surface. The field variables of the first kind are determined by the expansion factors of the spatial fields of the displacement vector and Biot's heat translation vector on the biorthogonal system of functions of the dimensionless shell thickness coordinate being a basis in the space of square-integrable functions. The dimensional reduction of the volumetric and boundary densities of the Lagrange and Rayleigh functions of functions corresponding to the Lord-Shulman generalized thermoelasticity results in the formulation of the surface and contour densities of the generating functions of functions for the shell model and finally in the Lagrange equations of the second kind for the shell theory ofN'th order. The appropriate constitutive equations are obtained, and the statement of the initial-boundary value problem of dynamics of an anisotropic generally thermoelastic shell is presented.

Keywords: analytical mechanics; thermodynamics; variational principles; Lagrangian formalism; Lagrange equations of the second kind; shell theory of N'th order

ВВЕДЕНИЕ

Качественный анализ динамического деформирования и устойчивости тонкостенных конструктивных элементов, подверженных воздействию различных физических полей [1,2], требует разработки соответствующих связных моделей оболочек. При этом проблема описания высокочастотных колебаний, особенно неоднородных функционально-градиентных оболочек несимметричной структуры, приводит к необходимости формулировок теорий высших порядков [3]. Одним из методов построения иерархии моделей оболочек высшего порядка является метод редукции пространственной размерности задачи, основанный на разложении неизвестных по ортогональной системе функций нормальной координаты, проекционном методе Галеркина [4,5] либо вариационном методе Рэлея-Ритца [6], обеспечивающий удовлетворительную аппроксимацию трехмерного состояния неоднородных анизотропных тел [7,8] и вполне эффективный в задачах динамической термоупругости [4]. Дальнейшим развитием данного подхода является формулировка модели оболочки на основе вариационного формализма аналитической механики континуума [9] как дискретно-континуальной системы, определенной на двумерном многообразии множеством переменных поля первого рода, определенный коэффициентами разложения вектора перемещения по некоторой биортогональной системе функций безразмерной нормальной координаты, образующей базис в пространстве $\mathcal{L}^2\left[-1,1\right]$ [10,11], поверхностной и контурной плотностями функционала Лагранжа, порождаемыми редукцией исходных объемной и граничной плотностей. Уравнения движения оболочки и уравнения теплопереноса являются обобщенными уравнениями Лагранжа второго рода. Ниже данный подход в сочетании с формализмом Био [12] распространен на случай термоупругой оболочки как континуума с рэлеевским демпфированием [9].

1. ОБЩАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ КОНТИНУАЛЬНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

В соответствии с вариационным формализмом аналитической механики [9] континуальная система определена на некотором многообразии S с границей ∂S конфигурационным пространством $\Omega_N = \{q_I\}$, $I \in [0, N] \cap \mathbb{Z}$ с переменными поля q_I, предполагаемым Евклидовым с метрикой $\|q_I\| = \sqrt{(q_I, q_I)_S}$, порожденной скалярным произведением $(q_I, q_J)_S$; пространственной $\mathcal{L}_S(q_I, \dot{q}_I, \mathrm{L}_J[q_I])$, $\dot{q}_I \equiv \partial_t q_I$, $J \in [0, M] \cap \mathbb{Z}$ и граничной $\mathcal{L}_{\partial S}(q_I, \dot{q}_I)$ плотностями Лагранжиана [10,11,13], где $\mathrm{L}_J[q_I]$ – линейные операторы в Ω_N [13]. Функционал Лагранжа имеет вид [13]

$$\Lambda = \int_S \mathcal{L}_S(q_I, \dot{q}_I, \mathrm{L}_J[q_I])\,dS + \int_{\partial S} \mathcal{L}_{\partial S}(q_I, \dot{q}_I)\,d\Gamma. \tag{1.1}$$

Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского для континуальной диссипативной системы с лагранжианом (1.1) может быть записан так [9]

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta\Lambda + \left(Q_S^I, \delta q_I\right)_S + \left(Q_\Gamma^I, \delta q_I\right)_\Gamma \right] dt = 0, \tag{1.2}$$

где Q_S^I, Q_Γ^I – обобщенные силы, определенные в S и на ∂S, включающие и диссипативные силы; $t \in [t_0, t_1]$ – временная переменная. В том случае, когда диссипация может быть описана функционалом Рэлея с пространственной и граничной плотностями $\mathcal{D}_S$, $\mathcal{D}_{\partial S}$, квадратичными относительно скоростей $\dot{q}_I$ [9]

$$\mathcal{D}_S = B^{IJ} \dot{q}_I \dot{q}_J, \quad \mathcal{D}_{\partial S} = \beta^{IJ} \left(\dot{q}_I \dot{q}_J\right)\Big|_{M \in \partial S}, \tag{1.3}$$

обобщенные уравнения Лагранжа второго рода континуальной системы с переменными поля q_I, определенной плотностями функционалов (1.1), (1.3), следуют из вариационного принципа (1.2) и имеют общий вид, аналогичный [11]

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{q}_I} \nabla_\beta = \mathrm{L}_J^* \left[\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \mathrm{L}_J[q_I]} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial q_I} - \frac{\partial \mathcal{D}_S}{\partial \dot{q}_I}; \tag{1.4}$$

$\mathrm{L}_J^*[q_I]$ – линейные операторы, сопряженные $\mathrm{L}_J[q_I]$ относительно произведения $(q_I, \mathrm{L}_J[q_I])_S$. Уравнениям (1.4) соответствуют естественные краевые условия (1.5)

$$\left\{ -\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_{\partial S}}{\partial \dot{q}_I} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\partial S}}{\partial q_I} + B_J^L \left[\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \left(\mathrm{L}_J[q_I]\right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{D}_{\partial S}}{\partial \dot{q}_I} \right\} \delta q_I \Bigg|_{\partial S} = 0; \tag{1.5}$$

здесь $B_J^L[q_I]$ – краевые операторы, порождаемые произведением $(q_I, \mathrm{L}_J[q_I])_S$.

Уравнения (1.4) и краевые условия (1.5) являются обобщением уравнений Лагранжа второго рода и естественных краевых условий, полученных

Н.А. Кильчевским в [9] при $\mathrm{L}_J \equiv \partial/\partial\xi_k$, и могут быть представлены в следующем виде

$$\partial_t P^I = L_J^* T^{IJ} + Q^I; \quad \left\{-\partial_t \bar{P}^I + \bar{Q}^I + B_J^L T^{IJ}\right\}\delta q_I\Big|_{\partial V} = 0. \tag{1.6}$$

Обобщенные импульсы и силы в (1.6) определяются уравнениями (1.7)

$$\begin{gathered} P^I = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{q}_I}; \quad \bar{P}^I = \frac{\partial \mathcal{L}_{\partial S}}{\partial \dot{q}_I}; \quad T^{IJ} = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial\left(\mathrm{L}_J\left[q_I\right]\right)}; \\ Q^I = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial q_I} - \frac{\partial \mathcal{D}_S}{\partial \dot{q}_I} = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial q_I} - B^{IJ}\dot{q}_J; \quad \bar{Q}^I = \frac{\partial \mathcal{L}_{\partial S}}{\partial q_I} - \frac{\partial \mathcal{D}_{\partial S}}{\partial \dot{q}_I} = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial q_I} - \beta^{IJ}\dot{q}_J. \end{gathered} \tag{1.7}$$

2. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ОБОБЩЕННО-ТЕРМОУПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК КАК ДВУМЕРНЫХ КОНТИНУАЛЬНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ

2.1. Основные геометрические соотношения.

Геометрические соотношения описаны в [11,13]. Пусть многообразие $S \subset \mathbb{R}^3$ – модель реперной поверхности оболочки, так что $\forall M \in S$ $\exists \mathbf{r}(M) = x^i\left(\xi^\alpha\right)\mathbf{e}_i$, $i = \overline{1,3}$ и $\alpha = \overline{1,2}$, $\xi^\alpha \in D_\xi \subseteq \mathbb{R}^2$ – координаты на S, $x^i\left(\xi^\alpha\right) \in C^{(2)}\left(D_\xi\right)$, $\mathbf{e}_i$ – декартовы координаты и базис; тогда $TS = \coprod\left\{d\xi^\alpha \mathbf{r}_\alpha \mid \mathbf{r}_\alpha = \partial\mathbf{r}\right\}$ – касательное расслоение S, $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial\xi^\alpha$ [13]. Ориентация S задана полем нормали $\mathbf{n} = a^{-1/2}\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2$, $a = \left|a_{\alpha\beta}\right|$, $a_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta$ – метрика, «$\cdot$» и «$\wedge$» – соответственно, скалярное и векторное произведения на TS; $b_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\beta$ – тензор кривизны S, $H = \frac{1}{2}b_\alpha^\alpha$, $K = a^{-1}\left|b_{\alpha\beta}\right|$.

Оболочка – тело $V \in \mathbb{R}^3$, $\partial V = S_B \oplus S_\pm$: $\forall M' \in \bar{V}$ $\mathbf{R}(M') = \mathbf{r}\left(\xi^\alpha\right) + \xi^3\mathbf{n}\left(\xi^\alpha\right)$, $S_\pm : \xi^3 = h_\pm\left(\xi^\alpha\right)$ – ее лицевые поверхности, S_B – боковая поверхность, $\xi^3 \in \left[h_-, h_+\right]$ – нормальная координата [11]. Соответственно, $\mathbf{R}_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{R} = A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}\mathbf{r}_\beta$, $\mathbf{R}^\alpha = A_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}\mathbf{r}^\beta$, где $A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} = \delta_\alpha^\beta - \xi^3 b_\alpha^\beta$, $A_{\cdot\gamma}^{\alpha\cdot} A_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma} = \delta_\beta^\alpha$; $\partial_3 \mathbf{R} \equiv \mathbf{n}$, $g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\xi^3 b_{\alpha\beta} + \left(\xi^3\right)^2 c_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta} = b_\alpha^\gamma b_{\beta\gamma}$; $g_{\alpha 3} = 0$, $g_{33} = 1$, $dV = dS\sqrt{g/a}\,d\xi^3$, где $\sqrt{g/a} = 1 - 2\xi^3 H + \left(\xi^3\right)^2 K$, $dS = \sqrt{a}\,d\xi^1 d\xi^2$. Введем безразмерную координату $\left[-1,1\right] \ni \zeta = \left(\xi^3 - \bar{h}\right)/h$, где $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \bar{h}\mathbf{n}$, $\bar{h} = \frac{1}{2}\left(h_+ + h_-\right)$ задает положение срединной поверхности, $2h = h_+ - h_-$ – толщина оболочки [11].

2.2. Вариационная формулировка модели обобщенной термоупругости.

Модель трехмерного обобщенно-термоупругого тела [9] определена двумя переменными поля – векторами перемещения $\mathbf{u}$ и теплового смещения Био [12] $\boldsymbol{\theta}$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\theta} = \Theta, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = -T_0^{-1}\mathbf{q}, \tag{2.1}$$

Θ – энтропия, T_0 – температура отсчетной конфигурации, $\mathbf{q}$ – поток тепла. Плотности функционалов Лагранжа и Рэлея [9,12] анизотропной среды имеют вид

$$\mathcal{L}_V\left(\mathbf{u},\boldsymbol{\theta},\dot{\mathbf{u}},\dot{\boldsymbol{\theta}},\nabla\otimes\mathbf{u},\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\rho\dot{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}}+T_0\tau_0\dot{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{\eta}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)+\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}-$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\nabla\otimes\mathbf{u}\right)^{\mathrm{T}}:\mathbf{C}:\nabla\otimes\mathbf{u}+\tfrac{1}{2}T_0c_e^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}:\nabla\otimes\mathbf{u}+\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}\right)^2; \tag{2.2}$$

$$\mathcal{L}_{\partial V}\left(\mathbf{u},\boldsymbol{\theta}\right)=\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\big|_{S_\sigma}-\left[1-T_0^{-1}\left(T_S-T_0\right)\right]\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{v}\big|_{S_T}-\left[1-T_0^{-1}\left(T_\infty-T_0\right)\right]\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{v}\big|_{S_\alpha}; \tag{2.3}$$

$$\mathcal{D}_V\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)=\tfrac{1}{2}T_0\,\dot{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{\lambda}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}};\quad \mathcal{D}_{\partial V}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)=\alpha^{-1}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}\cdot\mathbf{v}\right)^2, \tag{2.4}$$

$\mathbf{F}, \mathbf{f}$ – главные векторы внешних сил в V и на $S_\sigma\subseteq\partial V$; $\mathbf{C}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\lambda}$ – тензоры упругих, температурных констант и теплопроводности, $\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{I}$, $\mathbf{v}$ – единичная внешняя нормаль на S, c_e – теплоемкость, τ_0 – время релаксации теплового потока. Поверхностные плотности функционалов Лагранжа и Рэлея $\mathcal{L}_{\partial V}$ и $\mathcal{D}_{\partial V}$ получены с учетом тепловых краевых условий (2.5)-(2.7) на поверхности ∂V [14]

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}\big|_{S_T}=c_e\left[1-T_0^{-1}\left(T_S-T_0\right)\right]; \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{v}\big|_{S_q}=T_0^{-1}\int_{t_0}^{t}q_S\,d\tau; \tag{2.6}$$

$$\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}+\alpha^{-1}c_e\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)\Big|_{S_\alpha}=c_e\left[1-T_0^{-1}\left(T_\infty-T_0\right)\right]. \tag{2.7}$$

Условие (2.5) задано на поверхности $S_T\subset\partial V$, где определена температура T_S; условие (2.6) – на S_q с заданным потоком тепла q_S; наконец, условие (2.7) – в области S_α конвективного теплообмена с коэффициентом теплоотдачи α.

Формулировку модели (2.2)-(2.4) замыкают начальные условия, при условии теплового равновесия системы в момент $t=t_0$, имеющие следующий вид [14]

$$\mathbf{u}\big|_{t=t_0}=\mathbf{U}_0;\quad \dot{\mathbf{u}}\big|_{t=t_0}=\mathbf{V}_0;\quad \boldsymbol{\theta}\big|_{t=t_0}=\dot{\boldsymbol{\theta}}\big|_{t=t_0}=0, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ – поля перемещения и скорости в системе при $t=t_0$.

2.2. Редукция пространственной размерности трехмерной модели.

Редукция пространственной размерности задачи (2.2)-(2.4), (2.8) и переход к модели оболочки как континуально-дискретной системы [1] с конечным числом степеней свободы осуществляется в соответствии с общим подходом [10,11].

Введем координату $\left[-1,1\right]\ni\zeta=h^{-1}\left(\xi^3-\overline{h}\right)$. Пространственный оператор «набла» в координатах ξ^α, ζ имеет вид (2.9) [11]

$$\nabla=\mathbf{R}^\beta\left(\partial_\beta+h_\beta\partial_\zeta\right)+\mathbf{n}h^{-1}\partial_\zeta,\quad h_\beta=-h^{-1}\left(\partial_\beta\overline{h}+\zeta\partial_\beta h\right), \tag{2.9}$$

откуда при задании полей $\mathbf{u}\left(\xi^\beta,\zeta,t\right)$ и $\mathbf{s}\left(\xi^\beta,\zeta,t\right)$ в репере расслоения TS следует

$$\nabla\otimes\mathbf{u}=\overline{d}_{\alpha\beta}\mathbf{R}^\beta\mathbf{r}^\alpha+\overline{d}_{3\beta}\mathbf{R}^\beta\mathbf{n}+\overline{d}_{\alpha3}\mathbf{n}\mathbf{r}^\alpha+\overline{d}_{33}\mathbf{n}\mathbf{n};$$
$$\overline{d}_{\alpha\beta}=\nabla_\beta u_\alpha+h_\beta\partial_\zeta u_\alpha-b_{\alpha\beta}u_3;\quad \overline{d}_{\alpha3}=h^{-1}\partial_\zeta u_\alpha; \tag{2.10}$$
$$\overline{d}_{3\beta}=\nabla_\beta u_3+h_\beta\partial_\zeta u_3+b_\beta^\alpha u_\alpha;\quad \overline{d}_{33}=h^{-1}\partial_\zeta u_3;$$

$$\Theta=\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}=A_{\cdot\alpha}^{\beta\cdot}\left(\nabla_\beta\theta^\alpha+h_\beta\partial_\zeta\theta^\alpha-b_\beta^\alpha\theta^3\right)+h^{-1}\partial_\zeta\theta^3. \tag{2.11}$$

Определим векторы перемещения $\mathbf{u}\left(\xi^\beta,\zeta,t\right)$ и энтропии $\mathbf{s}\left(\xi^\beta,\zeta,t\right)$ частичными суммами рядов по функциям $\mathrm{p}_{(k)}\left(\zeta\right)$, $\mathrm{p}^{(m)}\left(\zeta\right)$, образующими в гильбертовом пространстве $\aleph\left[-1,1\right]$ [10,11] биортогональный базис

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}\left(\xi^\beta,\zeta,t\right)=u_\alpha^{(k)}\left(\xi^\beta,t\right)\mathrm{p}_{(k)}\left(\zeta\right)\mathbf{r}^\alpha+u_3^{(k)}\left(\xi^\beta,t\right)\mathrm{p}_{(k)}\left(\zeta\right)\mathbf{n},\ k,m=0\ldots N;\\&\boldsymbol{\theta}\left(\xi^\beta,\zeta,t\right)=\theta^\alpha_{(m)}\left(\xi^\beta,t\right)\mathrm{p}^{(m)}\left(\zeta\right)\mathbf{r}_\alpha+\theta^3_{(m)}\left(\xi^\beta,t\right)\mathrm{p}^{(m)}\left(\zeta\right)\mathbf{n};\end{aligned}\tag{2.12}$$

Коэффициенты $u_\alpha^{(k)}$, $u_3^{(k)}$, $\theta^\alpha_{(k)}$, $\theta^3_{(k)}$ задаются соотношениями (2.13)

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}^{(k)}\left(\xi^\beta,t\right)=\left(\mathbf{u}\left(\xi^\beta,\zeta,t\right),\mathrm{p}_{(k)}\left(\zeta\right)\right)_1=u_\alpha^{(k)}\left(\xi^\beta,t\right)\mathbf{r}^\alpha+u_3^{(k)}\left(\xi^\beta,t\right)\mathbf{n};\\&\boldsymbol{\theta}_{(m)}\left(\xi^\beta,t\right)=\left(\boldsymbol{\theta}\left(\xi^\beta,\zeta,t\right),\mathrm{p}^{(m)}\left(\zeta\right)\right)_1=\theta^\alpha_{(m)}\left(\xi^\beta,t\right)\mathbf{r}_\alpha+\theta^3_{(m)}\left(\xi^\beta,t\right)\mathbf{n};\end{aligned}\tag{2.13}$$

здесь в соответствии с [10,11] введено скалярное произведение (2.14) на $\aleph\left[-1,1\right]$

$$\left(u,v\right)_1=\int_{-1}^1u\left(\zeta\right)v\left(\zeta\right)d\zeta;\quad\left(\mathrm{p}^{(k)},\mathrm{p}_{(m)}\right)_1=\delta^{(k)}_{(m)}.\tag{2.14}$$

Теории оболочек N-го порядка соответствует удержание $N+1$ члена частичных сумм (2.12). Подстановка выражений (2.12), (2.13) в (2.2)-(2.4), (2.8) и при учете $dV=dS\sqrt{g/a}hd\zeta$ вычисление скалярных произведений (2.13) приводит плотности функционалов (2.2)-(2.4) к поверхностным и контурным плотностям, определяющим континуальную двумерную термомеханическую систему

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_S\left(u_\alpha^{(k)},u_3^{(k)},\theta^\alpha_{(k)},\theta^3_{(k)},\dot u_\alpha^{(k)},\dot u_3^{(k)},\dot\theta^\alpha_{(k)},\dot\theta^3_{(k)},\overline{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)},\overline{\nabla}_\beta u_3^{(k)},\overline{\nabla}_\beta\theta^\alpha_{(k)}\right)=\\&=\tfrac12\rho^{(m)}_{(k)}\left(\dot u^\alpha_{(m)}\dot u_\alpha^{(k)}+\dot u^3_{(m)}\dot u_3^{(k)}\right)+\tfrac12T_0\tau_0\left(\lambda^{(km)}_{\alpha\beta}\dot\theta^\alpha_{(k)}\dot\theta^\beta_{(m)}+2\lambda^{(km)}_{\alpha3}\dot\theta^\alpha_{(k)}\dot\theta^3_{(m)}+\right.\\&\left.+\lambda^{(km)}_{33}\dot\theta^3_{(k)}\dot\theta^3_{(m)}\right)-\tfrac12\left(\overline{\overline{C}}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}_{(km)}\overline{\nabla}_\delta u_\gamma^{(m)}+\overline{\overline{C}}{}^{\alpha\beta3\delta}_{(km)}\overline{\nabla}_\delta u_3^{(m)}+\overline{C}{}^{\alpha\beta\gamma}_{(km)}u_\gamma^{(m)}+\overline{C}{}^{\alpha\beta3}_{(km)}u_3^{(m)}\right)\times\\&\times\left(\overline{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}+H^{(\bullet k)}_{\beta(n\bullet)}u_\alpha^{(n)}-b_{\beta\alpha}u_3^{(k)}\right)-\\&-\tfrac12\left(\overline{\overline{C}}{}^{3\beta\gamma\delta}_{(km)}\overline{\nabla}_\delta u_\gamma^{(m)}+\overline{\overline{C}}{}^{3\beta3\delta}_{(km)}\overline{\nabla}_\delta u_3^{(m)}+\overline{C}{}^{3\beta\gamma}_{(km)}u_\gamma^{(m)}+\overline{C}{}^{3\beta3}_{(km)}u_3^{(m)}\right)\times\\&\times\left(\overline{\nabla}_\beta u_3^{(k)}+H^{(\bullet k)}_{\beta(n\bullet)}u_3^{(n)}+b^\alpha_\beta u_\alpha^{(k)}\right)-\\&-\tfrac12h^{-1}\left(\overline{C}{}^{\alpha3\gamma\delta}_{(km)}\overline{\nabla}_\delta u_\gamma^{(m)}+\overline{C}{}^{\alpha33\delta}_{(km)}\overline{\nabla}_\delta u_3^{(m)}+\overline{C}{}^{\alpha3\gamma}_{(km)}u_\gamma^{(m)}+\overline{C}{}^{\alpha33}_{(km)}u_3^{(m)}\right)D^{(\bullet k)}_{(n\bullet)}u_\alpha^{(n)}-\\&-\tfrac12h^{-1}\left(\overline{C}{}^{33\gamma\delta}_{(km)}\overline{\nabla}_\delta u_\gamma^{(m)}+\overline{C}{}^{333\delta}_{(km)}\overline{\nabla}_\delta u_3^{(m)}+\overline{C}{}^{33\gamma}_{(km)}u_\gamma^{(m)}+\overline{C}{}^{333}_{(km)}u_3^{(m)}\right)D^{(\bullet k)}_{(n\bullet)}u_3^{(n)}+\\&+\tfrac12T_0\kappa_e^{(nl)}\left[\overline{\Lambda}{}^{\alpha\beta}_{(kl)}\left(\overline{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}+H^{(\bullet k)}_{\beta(m\bullet)}u_\alpha^{(m)}-b_{\beta\alpha}u_3^{(k)}\right)+h^{-1}\Lambda^{\alpha3}_{(kl)}D^{(\bullet k)}_{(m\bullet)}u_\alpha^{(m)}+\right.\\&+\overline{\Lambda}{}^{3\beta}_{(kl)}\left(\overline{\nabla}_\beta u_3^{(k)}+H^{(\bullet k)}_{\beta(m\bullet)}u_3^{(m)}+b^\alpha_\beta u_\alpha^{(k)}\right)+h^{-1}\Lambda^{33}_{(kl)}D^{(\bullet k)}_{(m\bullet)}u_3^{(m)}+\\&\left.+A^{\beta\cdot(\bullet k)}_{\cdot\alpha(l\bullet)}\left(\overline{\nabla}_\beta\theta^\alpha_{(k)}+H^{(\bullet m)}_{\beta(k\bullet)}\theta^\alpha_{(m)}\right)+\left(h^{-1}D^{(\bullet k)}_{(l\bullet)}-b^\alpha_\beta A^{\beta\cdot(\bullet k)}_{\cdot\alpha(l\bullet)}\right)\theta^3_{(k)}\right]\times\\&\times\left[\overline{\Lambda}{}^{\gamma\delta}_{(np)}\left(\overline{\nabla}_\delta u_\gamma^{(p)}+H^{(\bullet p)}_{\delta(q\bullet)}u_\gamma^{(q)}-b_{\gamma\delta}u_3^{(p)}\right)+h^{-1}\Lambda^{\gamma3}_{(np)}D^{(\bullet p)}_{(q\bullet)}u_\gamma^{(q)}+\right.\\&+\overline{\Lambda}{}^{3\delta}_{(np)}\left(\overline{\nabla}_\delta u_3^{(p)}+H^{(\bullet p)}_{\delta(q\bullet)}u_3^{(q)}+b^\gamma_\delta u_\gamma^{(p)}\right)+h^{-1}\Lambda^{33}_{(np)}D^{(\bullet p)}_{(q\bullet)}u_3^{(q)}+\end{aligned}$$

$$+A^{\delta\cdot(\bullet p)}_{\cdot\gamma(n\bullet)}\left(\overline{\nabla}_{\delta}\theta^{\gamma}_{(p)}+H^{(\bullet q)}_{\delta(p\bullet)}\theta^{\gamma}_{(q)}\right)+\left(h^{-1}D^{(\bullet q)}_{(p\bullet)}-b^{\gamma}_{\delta}A^{\delta\cdot(\bullet q)}_{\cdot\gamma(p\bullet)}\right)\theta^{3}_{(q)}\Big]+$$
$$+P^{\alpha}_{(k)}u^{(k)}_{\alpha}+P^{3}_{(k)}u^{(k)}_{3}-T^{(k)}_{\alpha}\theta^{\alpha}_{(k)}-T^{(k)}_{3}\theta^{3}_{(k)};$$

$$\tag{2.15}$$

$$\mathcal{L}_{\Gamma}\left(u^{(k)}_{\alpha},u^{(k)}_{3},\theta^{\alpha}_{(k)},\theta^{3}_{(k)}\right)=q^{\alpha}_{\Gamma(k)}u^{(k)}_{\alpha}+q^{3}_{\Gamma(k)}u^{(k)}_{3}-$$
$$-\left[1-T_0^{-1}\left(T^{(k)}_{\Gamma}-T_0\right)\right]\nu_{\alpha}\theta^{\alpha}_{(k)}\Big|_{\Gamma_T}-\left[1-T_0^{-1}\left(T^{\Gamma}_{\infty}-T_0\right)\right]\nu_{\alpha}\theta^{\alpha}_{(0)}\Big|_{\Gamma_\alpha}; \tag{2.16}$$

$$\mathcal{D}_{S}\left(\dot\theta^{\alpha}_{(k)},\dot\theta^{3}_{(k)}\right)=\tfrac{1}{2}T_0\left(\lambda^{(km)}_{\alpha\beta}\dot\theta^{\alpha}_{(k)}\dot\theta^{\beta}_{(m)}+2\lambda^{(km)}_{\alpha3}\dot\theta^{\alpha}_{(k)}\dot\theta^{3}_{(m)}+\lambda^{(km)}_{33}\dot\theta^{3}_{(k)}\dot\theta^{3}_{(m)}\right)+$$
$$+\alpha^{(km)}_{\alpha\beta}\dot\theta^{\alpha}_{(k)}\dot\theta^{\beta}_{(m)}+2\alpha^{(km)}_{\alpha3}\dot\theta^{\alpha}_{(k)}\dot\theta^{3}_{(m)}+\alpha^{(km)}_{33}\dot\theta^{3}_{(k)}\dot\theta^{3}_{(m)}; \tag{2.17}$$

$$\mathcal{D}_{\Gamma}\left(\dot s^{\alpha}_{(k)}\right)=\tfrac{1}{2}\alpha^{(km)}_{\Gamma}\dot\theta^{\alpha}_{(k)}\dot\theta^{\beta}_{(m)}\,\nu_{\alpha}\nu_{\beta}\Big|_{\Gamma}. \tag{2.18}$$

Здесь введены обозначения компонентов главных векторов обобщенных внешних сил на реперной поверхности S и контуре $\Gamma_{\sigma}=\partial S\cap S_{\sigma}$ [11,13]

$$P^{i}_{(k)}=\left(\sqrt{g/a}\rho F^{i},\mathrm{p}_{(k)}\right)_1+\sqrt{g_+/a}\,q^{i}_{+}\mathrm{p}^{+}_{(k)}+\sqrt{g_-/a}\,q^{i}_{-}\mathrm{p}^{-}_{(k)};$$

$$q^{i}_{\Gamma(k)}=h\left(q^{i}\Big|_{S_\sigma\cap S_B},\mathrm{p}_{(k)}\right)_1;\quad T^{(k)}_{\Gamma}=h\left(T_S\Big|_{S_T\cap S_B},\mathrm{p}^{(k)}\right)_1,$$

$\mathrm{p}^{+}_{(k)}=\mathrm{p}_{(k)}(1)$, $\mathrm{p}^{-}_{(k)}=\mathrm{p}_{(k)}(-1)$. Компоненты вектора внешней нормали лицевой поверхности определяются следующими выражениями [13]

$$\mathbf{v}^{\pm}=\sqrt{1-g^{\alpha\beta}_{\pm}h^{\pm}_{\alpha}h^{\pm}_{\beta}}\left(\mp h^{\pm}_{\beta}\mathbf{r}^{\beta}\pm\mathbf{n}\right);\quad h^{\pm}_{\beta}=\partial_{\beta}h_{\pm};\ g^{\pm}_{\alpha\beta}=\left(\mathbf{R}_{\alpha}\cdot\mathbf{R}_{\beta}\right)_{\zeta=\pm1};\ g_{\pm}=\left|g^{\pm}_{\alpha\beta}\right|.$$

$$T^{(k)}_{i}=-\left[\left(1-\frac{T^{+}_{S}-T}{T_0}\right)\Bigg|_{S_T\cap S_+}+\left(1-\frac{T^{+}_{\infty}-T_0}{T_0}\right)\Bigg|_{S_\alpha\cap S_+}\right]\sqrt{\frac{g_+}{a}}\nu^{+}_{i}\mathrm{p}^{(k)}_{+}+$$
$$+\left[\left(1-\frac{T^{-}_{S}-T}{T_0}\right)\Bigg|_{S_T\cap S_+}+\left(1-\frac{T^{-}_{\infty}-T_0}{T_0}\right)\Bigg|_{S_\alpha\cap S_+}\right]\sqrt{\frac{g_-}{a}}\nu^{-}_{i}\mathrm{p}^{(k)}_{-};$$

$$\alpha^{(km)}_{\alpha\beta}=\frac{\sqrt{g_+\left(1-g^{\gamma\delta}_{+}h^{+}_{\gamma}h^{+}_{\delta}\right)}}{\alpha_{S_+}\sqrt{a}}h^{+}_{\alpha}h^{+}_{\beta}\mathrm{p}^{(k)}_{+}\mathrm{p}^{(m)}_{+}+\frac{\sqrt{g_-\left(1-g^{\gamma\delta}_{-}h^{-}_{\gamma}h^{-}_{\delta}\right)}}{\alpha_{S_-}\sqrt{a}}h^{-}_{\alpha}h^{-}_{\beta}\mathrm{p}^{(k)}_{-}\mathrm{p}^{(m)}_{-};$$

$$\alpha^{(km)}_{\alpha3}=-\frac{\sqrt{g_+\left(1-g^{\gamma\delta}_{+}h^{+}_{\gamma}h^{+}_{\delta}\right)}}{\alpha_{S_+}\sqrt{a}}h^{+}_{\alpha}\mathrm{p}^{(k)}_{+}\mathrm{p}^{(m)}_{+}-\frac{\sqrt{g_-\left(1-g^{\gamma\delta}_{-}h^{-}_{\gamma}h^{-}_{\delta}\right)}}{\alpha_{S_-}\sqrt{a}}h^{-}_{\alpha}\mathrm{p}^{(k)}_{-}\mathrm{p}^{(m)}_{-};$$

$$\alpha^{(km)}_{33}=\frac{\sqrt{g_+\left(1-g^{\gamma\delta}_{+}h^{+}_{\gamma}h^{+}_{\delta}\right)}}{\alpha_{S_+}\sqrt{a}}\mathrm{p}^{(k)}_{+}\mathrm{p}^{(m)}_{+}+\frac{\sqrt{g_-\left(1-g^{\gamma\delta}_{-}h^{-}_{\gamma}h^{-}_{\delta}\right)}}{\alpha_{S_-}\sqrt{a}}\mathrm{p}^{(k)}_{-}\mathrm{p}^{(m)}_{-}.$$

3. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ N-ГО ПОРЯДКА ОБОБЩЕННО-ТЕРМОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

3.1. Уравнения Лагранжа второго рода теории N-го порядка обобщенно-термоупругих неоднородных анизотропных оболочек.

Таким образом, модель обобщенно-термоупругой неоднородной анизотропной оболочки, соответствующая теории N-го порядка [11], в рамках Лагранжева формализма аналитической механики континуума [9] представляет собой диссипативную систему, заданную на двумерном многообразии S конфигурационным пространством $\Omega_N = \left\{ u_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)}, \theta_{(k)}^\alpha, \theta_{(k)}^3 \right\}_{k\in[0,N]\cap\mathbb{Z}}$, функционалом Лагранжа (1.1) с поверхностной (2.15) и контурной (2.16) плотностями, а также функционалом Рэлея (1.3) с поверхностной (2.17) и контурной (2.18) плотностями. Уравнения движения и уравнения теплопереноса в оболочке являются обобщенными уравнениями Лагранжа второго рода (1.4) или (1.6); так, уравнения движения (1.6) по форме записи идентичны уравнениям для упругой оболочки [11]

$$\begin{aligned} \rho_{(k)}^{(m)} \ddot{u}_{(m)}^\alpha &= \overline{\overline{\nabla}}_\beta s_{(k)}^{\alpha\beta} - H_{\beta(k\cdot)}^{(\cdot m)} s_{(m)}^{\alpha\beta} - b_\beta^\alpha s_{(k)}^{3\beta} - h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(\cdot m)} s_{(m)}^{\alpha 3} + P_{(k)}^\alpha; \\ \rho_{(k)}^{(m)} \ddot{u}_{(m)}^3 &= \overline{\overline{\nabla}}_\beta s_{(k)}^{3\beta} - H_{\beta(k\cdot)}^{(\cdot m)} s_{(m)}^{3\beta} + b_{\alpha\beta} s_{(k)}^{\alpha\beta} - h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(\cdot m)} s_{(m)}^{33} + P_{(k)}^3. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Уравнения переноса тепла записываются следующим образом

$$\begin{aligned} &\tau_0 \left(\lambda_{\alpha\beta}^{(km)} \ddot{\theta}_{(m)}^\beta + \lambda_{\alpha 3}^{(km)} \ddot{\theta}_{(m)}^3 \right) + \left(\lambda_{\alpha\beta}^{(km)} + T_0^{-1} \alpha_{\alpha\beta}^{(km)} \right) \dot{\theta}_{(m)}^\beta + \left(\lambda_{\alpha 3}^{(km)} + T_0^{-1} \alpha_{\alpha 3}^{(km)} \right) \dot{\theta}_{(m)}^3 = \\ &\qquad = \overline{\overline{\nabla}}_\beta \left(A_{\cdot\alpha(l\cdot)}^{\beta\cdot(\cdot k)} Q^{(l)} \right) - H_{\beta(m\cdot)}^{(\cdot k)} A_{\cdot\alpha(l\cdot)}^{\beta\cdot(\cdot m)} Q^{(l)} + T_0^{-1} T_\alpha^{(k)}; \\ &\tau_0 \left(\lambda_{3\alpha}^{(km)} \ddot{\theta}_{(m)}^\alpha + \lambda_{33}^{(km)} \ddot{\theta}_{(m)}^3 \right) + \left(\lambda_{3\alpha}^{(km)} + T_0^{-1} \alpha_{3\alpha}^{(km)} \right) \dot{\theta}_{(m)}^\alpha + \left(\lambda_{33}^{(km)} + T_0^{-1} \alpha_{33}^{(km)} \right) \dot{\theta}_{(m)}^3 = \\ &\qquad = -\left(b_\beta^\alpha A_{\cdot\alpha(l\cdot)}^{\beta\cdot(\cdot k)} - h^{-1} D_{(l\cdot)}^{(\cdot k)} \right) Q^{(l)} + T_0^{-1} T_3^{(k)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь использованы обозначения линейных операторов [11,13]

$$H_{\alpha(m\cdot)}^{(\cdot k)} = \left[-\left(\partial_\alpha \overline{h} \right) h^{-1} \delta_{(m)}^{(n)} - \partial_\alpha \left(\ln h \right) Z_{(m\cdot)}^{(\cdot n)} \right] D_{(n\cdot)}^{(\cdot k)};$$

$$Z_{(m\cdot)}^{(\cdot n)} = \left(\zeta \mathrm{p}_{(m)}, \mathrm{p}^{(n)} \right)_1; \quad A_{\cdot\alpha(m\cdot)}^{\beta\cdot(\cdot k)} = \left(A_{\cdot\alpha}^{\beta\cdot} \mathrm{p}_{(m)}, \mathrm{p}^{(k)} \right)_1; \quad D_{(m\cdot)}^{(\cdot k)} = \left(\tfrac{d}{d\zeta} \mathrm{p}_{(m)}, \mathrm{p}^{(k)} \right)_1.$$

Уравнениям Эйлера-Лагранжа (3.1), (3.2) соответствуют механические (3.3) и тепловые (3.4) естественные краевые условия (1.6) на контуре Γ

$$\left[s_{(k)}^{\alpha\beta} \nu_\beta - q_{\Gamma(k)}^\alpha \right] \delta u_\alpha^{(k)} \Big|_\Gamma = 0; \quad \left[s_{(k)}^{3\beta} \nu_\beta - q_{\Gamma(k)}^3 \right] \delta u_3^{(k)} \Big|_\Gamma = 0; \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &\Bigg\{ \nu_\beta \left(-\alpha_\Gamma^{(km)} \nu_\alpha \dot{\theta}_{(m)}^\beta \Big|_{\Gamma\cap\Gamma_\alpha} + A_{\cdot\alpha(l\cdot)}^{\beta\cdot(\cdot k)} Q^{(l)} \right) + \left[1 - T_0^{-1} \left(T_\Gamma^{(k)} - T_0 \right) \right] \nu_\alpha \Big|_{\Gamma\cap\Gamma_T} + \\ &\qquad + \delta_{(0)}^{(k)} \left[1 - T_0^{-1} \left(T_\infty^\Gamma - T_0 \right) \right] \nu_\alpha \Big|_{\Gamma\cap\Gamma_\alpha} \Bigg\} \delta\theta_{(k)}^\alpha \Big|_\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Краевые условия на лицевых поверхностях $S_\pm$ удовлетворяются приближенно при сходимости решения по мере роста порядка теории N. Точное удовлетворение краевым условиям возможно на базе расширенной теории N-го порядка [13,15], учитывающей условия на $S_\pm$ в форме связей вариационной задачи.

Постановку начально-краевой задачи замыкают начальные условия, следующие из (2.8) при учете (2.12), (2.13)

$$\begin{aligned} &u_\alpha^{(k)} \Big|_{t=t_0} = U_\alpha^{(k)}; \quad \dot{u}_\alpha^{(k)} \Big|_{t=t_0} = V_\alpha^{(k)}; \quad u_3^{(k)} \Big|_{t=t_0} = U_3^{(k)}; \quad \dot{u}_3^{(k)} \Big|_{t=t_0} = V_3^{(k)}; \\ &\theta_{(k)}^\alpha \Big|_{t=t_0} = 0; \quad \dot{\theta}_{(k)}^\alpha \Big|_{t=t_0} = 0; \quad \theta_{(k)}^3 \Big|_{t=t_0} = 0; \quad \dot{\theta}_{(k)}^3 \Big|_{t=t_0} = 0; \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$U_{\alpha}^{(k)}=\left(U_{\alpha},\mathrm{p}^{(k)}\right)_1;\quad U_{3}^{(k)}=\left(U_{3},\mathrm{p}^{(k)}\right)_1;\quad V_{\alpha}^{(k)}=\left(V_{\alpha},\mathrm{p}^{(k)}\right)_1;\quad V_{3}^{(k)}=\left(V_{3},\mathrm{p}^{(k)}\right)_1.$$

3.1. Определяющие уравнения линейной теории N-го порядка обобщенно-термоупругих неоднородных анизотропных оболочек.

Определяющие уравнения (1.7) теории N-го порядка неоднородных анизотропных оболочек переменной толщины следуют из (2.15) и (2.17)

$$\begin{aligned}
s_{(k)}^{\alpha\beta}&=\overline{\overline{C}}{}_{(km)T}^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\overline{\nabla}_{\delta}u_{\gamma}^{(m)}+\overline{\overline{C}}{}_{(km)T}^{\alpha\beta3\delta}\,\overline{\nabla}_{\delta}u_{3}^{(m)}+\overline{C}_{(km)T}^{\alpha\beta\gamma}u_{\gamma}^{(m)}+\overline{C}_{(km)T}^{\alpha\beta3}u_{3}^{(m)}-T_0\kappa_e^{(nl)}\overline{\Lambda}_{(kl)}^{\alpha\beta}\Theta_{(n)};\\
s_{(k)}^{3\beta}&=\overline{\overline{C}}{}_{(km)T}^{3\beta\gamma\delta}\,\overline{\nabla}_{\delta}u_{\gamma}^{(m)}+\overline{\overline{C}}{}_{(km)T}^{3\beta3\delta}\,\overline{\nabla}_{\delta}u_{3}^{(m)}+\overline{C}_{(km)T}^{3\beta\gamma}u_{\gamma}^{(m)}+\overline{C}_{(km)T}^{3\beta3}u_{3}^{(m)}-T_0\kappa_e^{(nl)}\overline{\Lambda}_{(kl)}^{3\beta}\Theta_{(n)};\\
s_{(k)}^{\alpha3}&=\overline{C}_{(km)T}^{\alpha3\gamma\delta}\,\overline{\nabla}_{\delta}u_{\gamma}^{(m)}+\overline{C}_{(km)T}^{\alpha33\delta}\,\overline{\nabla}_{\delta}u_{3}^{(m)}+\overline{C}_{(km)T}^{\alpha3\gamma}u_{\gamma}^{(m)}+\overline{C}_{(km)T}^{\alpha33}u_{3}^{(m)}-T_0\kappa_e^{(nl)}\Lambda_{(kl)}^{\alpha3}\Theta_{(n)};\\
s_{(k)}^{33}&=\overline{C}_{(km)T}^{33\gamma\delta}\,\overline{\nabla}_{\delta}u_{\gamma}^{(m)}+\overline{C}_{(km)T}^{333\delta}\,\overline{\nabla}_{\delta}u_{3}^{(m)}+\overline{C}_{(km)T}^{33\gamma}u_{\gamma}^{(m)}+\overline{C}_{(km)T}^{333}u_{3}^{(m)}-T_0\kappa_e^{(nl)}\Lambda_{(kl)}^{33}\Theta_{(n)}.
\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
Q^{(k)}&=\kappa_e^{(nk)}\Big[\Theta_{(n)}+\overline{\Lambda}_{(np)}^{\gamma\delta}\left(\overline{\nabla}_{\delta}u_{\gamma}^{(p)}+H_{\delta(q\bullet)}^{(\bullet p)}u_{\gamma}^{(q)}-b_{\gamma\delta}u_{3}^{(p)}\right)+\\
&+\overline{\Lambda}_{(np)}^{3\delta}\left(\overline{\nabla}_{\delta}u_{3}^{(p)}+H_{\delta(q\bullet)}^{(\bullet p)}u_{3}^{(q)}+b_{\delta}^{\gamma}u_{\gamma}^{(p)}\right)+h^{-1}D_{(q\bullet)}^{(\bullet p)}\left(\Lambda_{(np)}^{\gamma3}u_{\gamma}^{(q)}+\Lambda_{(np)}^{33}u_{3}^{(q)}\right)\Big];
\end{aligned}\tag{3.7}$$

здесь $\Theta\left(\xi^{\alpha},\zeta,t\right)=\Theta_{(n)}\left(\xi^{\alpha},t\right)\mathrm{p}^{(n)}\left(\zeta\right)$ – энтропия, определенная частичной суммой ряда по базисным функциям $\mathrm{p}^{(n)}\left(\zeta\right)$ со следующими коэффициентами

$$\Theta_{(n)}=A_{\cdot\gamma(n\bullet)}^{\delta\cdot(\bullet p)}\left(\overline{\nabla}_{\delta}\theta_{(p)}^{\gamma}+H_{\delta(p\bullet)}^{(\bullet q)}\theta_{(q)}^{\gamma}\right)+\left(h^{-1}D_{(p\bullet)}^{(\bullet q)}-b_{\delta}^{\gamma}A_{\cdot\gamma(p\bullet)}^{\delta\cdot(\bullet q)}\right)\theta_{(q)}^{3}.$$

Материальные константы, входящие в (3.6), имеют вид, аналогичный [11]

$$\begin{aligned}
&\overline{\overline{C}}{}_{(km)T}^{\alpha\beta\gamma\delta}=\overline{\overline{C}}{}_{(km)}^{\alpha\beta\gamma\delta}-T_0\overline{\Lambda}_{(kl)}^{\alpha\beta}\kappa_e^{(nl)}\overline{\Lambda}_{(nm)}^{\gamma\delta};\quad \overline{\overline{C}}{}_{(km)T}^{\alpha\beta3\delta}=\overline{\overline{C}}{}_{(km)}^{\alpha\beta3\delta}-T_0\overline{\Lambda}_{(kl)}^{\alpha\beta}\kappa_e^{(nl)}\overline{\Lambda}_{(nm)}^{3\delta};\\
&\overline{\overline{C}}{}_{(km)T}^{3\beta\gamma\delta}=\overline{\overline{C}}{}_{(km)}^{3\beta\gamma\delta}-T_0\overline{\Lambda}_{(kl)}^{3\beta}\kappa_e^{(nl)}\overline{\Lambda}_{(nm)}^{\gamma\delta};\quad \overline{\overline{C}}{}_{(km)T}^{3\beta3\delta}=\overline{\overline{C}}{}_{(km)}^{3\beta3\delta}-T_0\overline{\Lambda}_{(kl)}^{3\beta}\kappa_e^{(nl)}\overline{\Lambda}_{(nm)}^{3\delta};\\
&\overline{C}_{(km)T}^{\alpha3\gamma\delta}=\overline{C}_{(km)}^{\alpha3\gamma\delta}-T_0\Lambda_{(kl)}^{\alpha3}\kappa_e^{(nl)}\overline{\Lambda}_{(nm)}^{\gamma\delta};\quad \overline{C}_{(km)T}^{\alpha33\delta}=\overline{C}_{(km)}^{\alpha33\delta}-T_0\Lambda_{(kl)}^{\alpha3}\kappa_e^{(nl)}\overline{\Lambda}_{(nm)}^{3\delta};\\
&\overline{C}_{(km)T}^{33\gamma\delta}=\overline{C}_{(km)}^{33\gamma\delta}-T_0\Lambda_{(kl)}^{33}\kappa_e^{(nl)}\overline{\Lambda}_{(nm)}^{\gamma\delta};\quad \overline{C}_{(km)T}^{333\delta}=\overline{C}_{(km)}^{333\delta}-T_0\Lambda_{(kl)}^{33}\kappa_e^{(nl)}\overline{\Lambda}_{(nm)}^{3\delta};\\
&C_{(km)T}^{\alpha3\gamma3}=C_{(km)}^{\alpha3\gamma3}-T_0\Lambda_{(kl)}^{\alpha3}\kappa_e^{(nl)}\Lambda_{(nm)}^{\gamma3};\quad C_{(km)T}^{\alpha333}=C_{(km)}^{\alpha333}-T_0\Lambda_{(kl)}^{\alpha3}\kappa_e^{(nl)}\Lambda_{(nm)}^{33};\\
&C_{(km)T}^{33\gamma3}=C_{(km)}^{33\gamma3}-T_0\Lambda_{(kl)}^{33}\kappa_e^{(nl)}\Lambda_{(nm)}^{\gamma3};\quad C_{(km)T}^{3333}=C_{(km)}^{3333}-T_0\Lambda_{(kl)}^{33}\kappa_e^{(nl)}\Lambda_{(nm)}^{33}
\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{\overline{C}}{}_{(km)T}^{i\beta\gamma}=H_{\delta(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{\overline{C}}{}_{(nm)T}^{i\beta\gamma\delta}+b_{\delta}^{\gamma}\overline{\overline{C}}{}_{(km)T}^{i\beta3\delta}+h^{-1}D_{(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{C}_{(nm)T}^{i\beta\gamma3};\\
&\overline{\overline{C}}{}_{(km)}^{i\beta3}=H_{\delta(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{\overline{C}}{}_{(nm)T}^{\alpha\beta3\delta}-b_{\gamma\delta}\overline{\overline{C}}{}_{(km)T}^{i\beta\gamma\delta}+h^{-1}D_{(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{C}_{(nm)T}^{i\beta33};\\
&\overline{C}_{(km)}^{i3\gamma}=H_{\delta(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{C}_{(nm)T}^{i3\gamma\delta}+b_{\delta}^{\gamma}\overline{C}_{(km)T}^{i33\delta}+h^{-1}D_{(k\bullet)}^{(\bullet n)}C_{(nm)T}^{i3\gamma3};\\
&\overline{C}_{(km)}^{i33}=H_{\delta(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{C}_{(nm)T}^{i33\delta}-b_{\gamma\delta}\overline{C}_{(km)T}^{i3\gamma\delta}+h^{-1}D_{(k\bullet)}^{(\bullet n)}C_{(nm)T}^{i333};\\
&\overline{C}_{(km)}^{33\gamma}=H_{\delta(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{C}_{(nm)T}^{33\gamma\delta}+b_{\delta}^{\gamma}C_{(km)T}^{333\delta}+h^{-1}D_{(k\bullet)}^{(\bullet n)}C_{(nm)T}^{33\gamma3};\\
&\overline{C}_{(km)}^{333}=H_{\delta(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{C}_{(nm)T}^{333\delta}-b_{\gamma\delta}C_{(km)T}^{33\gamma\delta}+h^{-1}D_{(k\bullet)}^{(\bullet n)}C_{(nm)T}^{3333}
\end{aligned}$$

при учете температурных составляющих в соответствии с (3.8). Здесь, как и ранее в работах [11,13] введены обозначения линейных операторов

$$\overline{\overline{C}}{}_{(km)}^{\alpha\beta\gamma\delta}=h\left(\sqrt{g/a}\,\overline{\overline{C}}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}_{(m)}\right)_1,\ldots;\quad \overline{\Lambda}_{(km)}^{\alpha\beta}=h\left(\sqrt{g/a}\,\overline{\Lambda}^{\alpha\beta}\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}_{(m)}\right)_1,\ldots;$$

$$\lambda_{\alpha\beta}^{(km)} = h\left(\sqrt{g/a}\lambda_{\alpha\beta}\mathrm{p}^{(k)},\mathrm{p}^{(k)}\right)_1;$$

$$\kappa_e^{(nl)} = h^{-1}\left(\sqrt{a/g}c_e^{-1}\mathrm{p}^{(n)},\mathrm{p}^{(l)}\right)_1; \quad \rho_{(k)}^{(m)} = h\left(\sqrt{g/a}\rho\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}_{(m)}\right)_1;$$

компоненты тензоров упругих и температурных констант заданы в базисе $\mathbf{r}_\alpha$, $\mathbf{n}$

$$\overline{\overline{C}}^{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\lambda}^{\beta\bullet}A_{\mu}^{\delta\bullet}C^{\alpha\lambda\gamma\mu}; \; \overline{\overline{C}}^{\alpha\beta3\delta} = A_{\lambda}^{\beta\bullet}A_{\mu}^{\delta\bullet}C^{\alpha\lambda3\mu}; \; \overline{C}^{\alpha33\delta} = A_{\mu}^{\delta\bullet}C^{\alpha33\mu}; \; \overline{C}^{333\delta} = A_{\mu}^{\delta\bullet}C^{333\mu};$$

$$\overline{\overline{C}}^{3\beta\gamma\delta} = A_{\lambda}^{\beta\bullet}A_{\mu}^{\delta\bullet}C^{3\lambda\gamma\mu}; \; \overline{\overline{C}}^{3\beta3\delta} = A_{\lambda}^{\beta\bullet}A_{\mu}^{\delta\bullet}C^{3\lambda3\mu}; \; \overline{C}^{\alpha3\gamma\delta} = A_{\mu}^{\delta\bullet}C^{\alpha\lambda\gamma\mu}; \; \overline{C}^{33\gamma\delta} = A_{\mu}^{\delta\bullet}C^{33\gamma\mu};$$

$$\overline{\Lambda}^{\alpha\beta} = A_{\lambda}^{\beta\bullet}\Lambda^{\alpha\lambda}; \quad \overline{\Lambda}^{3\beta} = A_{\lambda}^{\beta\bullet}\Lambda^{3\lambda}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе Лагранжева формализма аналитической динамики континуальных систем получены обобщенные уравнения Лагранжа для произвольной системы, заданной конфигурационным пространством с переменными поля первого рода, плотностью функционала Лагранжа, зависящей от некоторых линейных операторов над переменными поля, и квадратичной по обобщенным скоростям функционала Рэлея. Показано приложение данного вариационного формализма к построению теории N-го порядка неоднородных анизотропных обобщенно-термоупругих оболочек переменной толщины, позволяющей описывать динамику тонкостенных существенно неоднородных конструкций с учетом диссипации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hu Y., Zhou Q., Yang T. *Magneto-thermo-elastic coupled free vibration and nonlinear frequency analytical solutions of FGM cylindrical shells* // Thin-Walled Structures. – 2024. – Vol.195. – 111406.
2. Hu Y., Feng Y., Yang T. *Nonlinear dynamical modeling and free vibration of functionally graded cylindrical shell in air-gap magnetic and thermal fields* // Thin-Walled Structures. – 2024. – Vol.199. – 111787.
3. Li S.-R., Zhang F., Batra R.C. *Thermoelastic damping in high frequency resonators using higher-order shear deformation theories* // Thin-Walled Structures. – 2023. – Vol.188. – 110778.
4. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. *Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач*. – Львов: Вища Школа, 1978. – 192 с.
5. Amosov A.A., Zhavoronok S.I. *An approximate high-order theory of thick anisotropic shells* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2003. – Vol.1. – No.5. – Pp.28-38.
6. Хома И.Ю. *Общая теория анизотропных оболочек.* – Киев: Наукова думка, 1986. – 170 с.
7. Амосов А.А., Жаворонок С.И., Леонтьев К.А. *О решении некоторых задач о напряженно-деформированном состоянии анизотропных толстостенных оболочек вращения в трехмерной постановке* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т.10. – №3. – С.301-310.
8. Жаворонок С.И., Леонтьев А.Н., Леонтьев К.А. *Анализ сходимости решения при расчете толстостенных оболочек вращения произвольной формы* // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. – 2010. – Т.6. – №1-2. – С.105-111.

9. Кильчевский Н.А., Кильчинская Г.А., Ткаченко Н.Е. *Аналитическая механика континуальных систем.* – Киев: Наукова Думка, 1979. – 189 с.
10. Жаворонок С.И. *Вариационные уравнения трехмерной теории анизотропных оболочек* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4-5. – С.2154-2156.
11. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №1. – С.116-132.
12. Био М. *Вариационные принципы в теории теплообмена.* – М: Энергия, 1975. – 209 с.
13. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода расширенной трехмерной теории N-го порядка анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №3. – С.370-381.
14. Григорьянц Н.М., Киклевич С.К. *Вариационные принципы обобщённой теплопроводности* // Прикладная механика. – 1977. –Т.XIV. – №1. – С.34-38.
15. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *The variational equations of the extended N'th order shell theory and its application to some problems of dynamics* // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2015. – No.2. – Pp.36-59.

REFERENCES

1. Hu Y., Zhou Q., Yang T. *Magneto-thermo-elastic coupled free vibration and nonlinear frequency analytical solutions of FGM cylindrical shells*. Thin-Walled Structures, 2024, Vol.195, 111406.
2. Hu Y., Feng Y., Yang T. *Nonlinear dynamical modeling and free vibration of functionally graded cylindrical shell in air-gap magnetic and thermal fields*. Thin-Walled Structures, 2024, Vol.199, 111787.
3. Li S.-R., Zhang F., Batra R.C. *Thermoelastic damping in high frequency resonators using higher-order shear deformation theories*. Thin-Walled Structures, 2023, Vol.188, 110778.
4. Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Lizunov P.P. *Neklassicheskaya teoriya obolochek i ee prilozhenie k resheniyu inzhenernykh zadach [Nonclassical shell theory and its application to solve engineering problems]*. L'vov, Vishha Shkola, 1978, 192 p.
5. Amosov A.A., Zhavoronok S.I. *An approximate high-order theory of thick anisotropic shells*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2003, Vol.1, No.5, Pp.28-38.
6. Khoma I.Yu. *Obshhaya teoriya anizotropnykh obolochek [General theory of anisotropic shells]*. Kiev, Naukova dumka, 1986, 170 p.
7. Amosov A.A., Zhavoronok S.I., Leontiev K.A. *O reshenii nekotoryh zadach o napryazhenno-deformirovannom sostoyanii anizotropnyh tolstostennyh obolochek vrashcheniya v trekhmernoj postanovke [On the solution of some problems of sress-strain state of anisotropic thick-walled shells of revolution in three-dimensional problem statement]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2004, Vol.10, No.3, Pp.301-310.
8. Zhavoronok S.I., Leontiev A.N., Leontiev K.A. *Analysis of thick-walled rotation shells based on legendre polynomials*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2010, Vol.6, Nos.1-2, Pp.105-111.

9. Kil’chevskij N.A., Kil’chinskaya G.A., Tkachenko N.E. *Analiticheskaya mekhanika kontinual'nyh sistem [Analytical mechanics of continuum systems]*. Kiev, Naukova Dumka, 1979, 189 p.
10. Zhavoronok S.I. *Variatsionnye uravneniya trekhmernoj teorii anizotropnykh obolochek [Variational equations of a three-dimensional anisotropic theory of shells]*. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo, 2011, Nos.4-5, Pp.2154-2156.
11. Zhavoronok S.I. *Obobshhennye uravneniya Lagranzha vtorogo roda trekhmernoj teorii anizotropnykh obolochek [Generalized Lagrange equations of the second kind of three-dimensional anisotropic shell’s theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2011, Vol.17, No.1, Pp.116-132.
12. Biot M. A. *Variational principles in heat transfer*. Oxford Univ. Press, 1970, 185 p.
13. Zhavoronok S.I. *Obobshhennye uravneniya Lagranzha vtorogo roda rasshirennoj trekhmernoj teorii N-go poryadka anizotropnykh obolochek [The generalized Lagrange equations of the second kind for the extended three-dimensional N’th order theory of anisotropic shells]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2015, Vol.21, No.3, Pp.370-381.
14. Grigor’yanc N.M., Kiklevich S.K. *Variatsionnye printsipy obobshhyonnoj teploprovodnosti [Variational principles of generalized heat conduction]*. Prikladnaya mekhanika. 1977, Vol.14, No.1, Pp.34-38.
15. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *The variational equations of the extended N’th order shell theory and its application to some problems of dynamics*. PNRPU Mechanics Bulletin, 2015, No.2, Pp.36-59.

Поступила в редакцию 19 сентября 2024 года.

Сведения об авторе:

Жаворонок Сергей Игоревич – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: zhavoronok@iam.ras.ru