



ВЫСШИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНЫ

Шешенин С.В., Кузьмин М.А., Артамонова Н.Б.

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

В статье проводится асимптотическое осреднение упругих однородных и неоднородных в поперечном направлении пластин вплоть до пятого приближения. Асимптотическое разложение применяется к трехмерным уравнениям равновесия теории упругости и сводит их к серии двумерных задач в плоскости пластины и одномерных задач в поперечном направлении. Следовательно, рассматриваемая методика является также методом понижения размерности исходных уравнений. Рассматривается геометрически линейная теория упругости. Асимптотическое решение удовлетворяет граничным условиям на лицевых поверхностях, но не на боковой поверхности. Соответственно краевой эффект не рассматривается. Асимптотическое понижение размерности рассматривалось многими авторами. Отличие этого исследования от известных работ в данном направлении заключается в рассмотрении четвертого и пятого асимптотических приближений. Показано, что для четвертого приближения состояния изгиба и деформирования в отсчетной плоскости не разделяются даже для однородной пластины.

Для однородной пластины используемая асимптотическая теория в первом приближении приводит к дифференциальным уравнениям, аналогичным теории Кирхгофа, а в третьем приближении – к теории третьего порядка. Теория Рейснера находится между ними. Для слоистой пластины первое приближение приводит к классической ламинатной теории.

Как частный случай проведенное асимптотическое исследование справедливо для сильно-ортотропных пластин, однородных и слоистых пластин. В качестве примера рассмотрен цилиндрический изгиб однородной и трехслойной пластин. Проведено сравнение четвертого асимптотического приближения с конечно-элементным решением. Показано, что четвертое приближение позволяет существенно уточнить поперечное касательное напряжение. Также асимптотическое представление может использоваться как база для сравнения различных феноменологических теорий пластин третьего и пятого порядков.

Ключевые слова: асимптотическое понижение размерности; асимптотическое разложение пятого порядка; поперечный изгиб; сильно-ортотропный материал; трехслойная пластина

HIGHER ASYMPTOTIC APPROXIMATIONS IN THE PROBLEM OF THE TRANSVERSE PLATE BENDING

Sheshenin S.V., Kuzmin M.A., Artamonova N.B.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

ABSTRACT

The article carries out asymptotic averaging of elastic homogeneous and transversely inhomogeneous plates up to the fifth approximation. The asymptotic expansion is applied to the three-dimensional equilibrium equations of elasticity theory and reduces them to a series of two-dimensional problems in the plane of the plate and one-dimensional problems in the transverse direction. Consequently, the technique under consideration is also a method for reducing the dimension of the original equations. The geometrically linear theory of elasticity is considered. The asymptotic solution satisfies the boundary conditions on the front surfaces, but not on the side surface. Accordingly, the edge effect is not considered. Asymptotic dimension reduction has been considered by many authors. The difference between this study and well-known works in this direction lies in the consideration of the fourth and fifth asymptotic approximations. It is shown that, for the fourth approximation, the states of bending and deformation in the reference plane are not separated even for a homogeneous plate.

For a homogeneous plate, the asymptotic theory used in the first approximation leads to differential equations similar to Kirchhoff's theory, and in the third approximation – to a third-order theory. Reissner's theory lies between them. For a layered plate, the first approximation leads to the classical laminate theory.

As a special case, the asymptotic study carried out is valid for strongly orthotropic plates, homogeneous and layered plates. As an example, the cylindrical bending of a homogeneous and three-layer plate is considered. A comparison is made of the fourth asymptotic approximation with the finite element solution. It is shown that the fourth approximation allows one to significantly refine the transverse shear stress. Also, the asymptotic representation can be used as a basis for comparing various phenomenological theories of third- and fifth-order plates.

Keywords: asymptotic dimension reduction; fifth-order asymptotic expansion; transverse bending; strongly orthotropic material; three-layer plate

ВВЕДЕНИЕ

Существуют различные методы, позволяющие свести трехмерные уравнения упругости к двумерным уравнениям теории пластин. Одним из методов редукции является асимптотический метод, который используется в нашем исследовании. Асимптотическая редукция была предложена в [1].

Применение асимптотического осреднения типа многомасштабного метода к тонким пластинам началось достаточно давно с работы [2]. Асимптотика строится относительно малого параметра, равного отношению толщины пластины к характерному размеру в плане пластины. Среди работ в этом направлении (см., например, [3-9]) отметим работу [6], в которой метод применен для сильно ортотропных пластин. В последнем случае имеется уже два малых параметра. Вторым малым параметром является отношение поперечных модулей упругости к модулям в плане пластины.

Эта работа продолжает исследование, начатое в [7], где теория была разработана для периодических в плане неоднородных или гофрированных пластин в трех приближениях, а также в работах [8,9], в которой рассматривалось осреднение слоистой пластины.

1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ Понижение размерности

Развитая ниже теория применима к однородным пластинам, слоистым пластинам и пластинам из функционально-градиентного материала (ФГМ). Будем рассматривать поперечный изгиб под действием поперечной нагрузки $\varepsilon^3 p(x)$

($\mathbf{x} = (x_1, x_2)$), приложенной к верхней поверхности. Нижняя поверхность свободна. В силу линейности задачи в этом предположении нет ограничения общности. Как обычно, вводим «быструю» координату $\xi_3 = x_3/\varepsilon$, ε – малый параметр, равный отношению толщины пластины к размеру пластины в плане. Далее будем писать просто ξ . Предполагаем, что перемещения имеют вид $u_i = u_i(x_1, x_2, \xi)$. Это значит, что они меняются в поперечном направлении быстрее, чем в плоскости x_1, x_2 . Плоскость $x_3 = 0$ является отсчетной. Она может быть выбрана произвольно, но для симметричных пластин удобно ее выбрать совпадающей со срединной плоскостью. Индексы, обозначенные малыми латинскими буквами, пробегает значения 1, 2, 3; большими – 1, 2. Запятой обозначаем производную по соответствующей координате: $f(x_1, x_2)_{,i} = \partial f / \partial x_i$ или $f(\xi)_{,3} = \partial f / \partial \xi = f'$. Нагрузка p зависит только от медленных координат x_1, x_2 . Это означает, что она слабо меняется на расстоянии порядка толщины пластины.

Трехмерные уравнения равновесия теории упругости в области пластины V и граничные условия на верхней Σ_{top} и нижней Σ_{bot} ($\xi = -1/2$) поверхностях записываются в виде

$$(C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (1)$$

$$C_{ijkl} u_{k,l} n_j = \varepsilon^3 p(\mathbf{x}) \delta_{3i}, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{top}, \quad C_{ijkl} u_{k,l} n_j = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{bot}. \quad (2)$$

Здесь $C_{ijkl}(\xi)$ – упругие константы материала (предполагаемого ортотропным), зависящие от поперечной координаты, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к границе. Задача состоит в том, чтобы асимптотически удовлетворить условиям (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим процедуру понижения размерности уравнений с учетом граничных условий (1), (2) для связанного плоско-изгибного состояния, т.е. состояния изгиба/кручения совместно с растяжением/сдвигом в отсчетной плоскости. Перемещения разыскиваем в виде

$$u_I = v_I(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m N_I^{(e)PQ_0 \dots Q_{m-1}}(\xi) v_{P \dots Q_0 \dots Q_{m-1}}(x_1, x_2) - \varepsilon \xi_3 w_{,I}(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} N_I^{(b)PQ_0 \dots Q_{m-1}}(\xi) w_{,PQ_0 \dots Q_{m-1}}(x_1, x_2), \quad (3)$$

$$u_3 = \sum_{m=1}^M \varepsilon^m N_3^{(e)PQ_0 \dots Q_{m-1}}(\xi) v_{P \dots Q_0 \dots Q_{m-1}}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} N_3^{(b)PQ_0 \dots Q_{m-1}}(\xi) w_{,PQ_0 \dots Q_{m-1}}(x_1, x_2), \quad (4)$$

где v_1, v_2 – гладкие составляющие перемещения в отсчетной плоскости, w – гладкая составляющая прогиба. Индекс « e » (extension) у локальных функций $N_i^{(e)PQ_0 \dots Q_{m-1}}$ означает перемещения, связанные с перемещениями v_1, v_2 . Индекс « b » (bending) соответственно означает локальные перемещения, вызванные изгибом. Асимптотические представления (3), (4) приближают решение задачи (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Нижние индексы означают номер компоненты вдоль соответствующей оси. Верхние индексы – номер функции. В работах [6-9] M

равнялось трем. В данной работе получены следующие приближения, и M равно пяти. Наличие большого числа индексов не должно пугать читателя. Будет показано, что дифференциальные уравнения относительно «медленных» функций v_I и w имеют «стандартный» вид, а уравнения относительно функций $N_i^{(e)PQ_0 \dots Q_m}$ или $N_i^{(b)PQ_0 \dots Q_m}$ получаются линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Неудобство состоит в том, что число этих функций увеличивается с ростом M . Однако получаемые асимптотические уравнения теории пластин математически строго обоснованы. Как уже отмечалось, сравнение асимптотических уравнений первых трех приближений с классическими теориями описано в [6]. Отличие данной работы состоит в объединении перемещений, тогда как в работах [6,9] рассматривались только составляющие перемещения от изгиба. Ниже показано, что решение в виде только «изгибной» составляющей действительно существует для первых трех приближений, но уже не существует для четвертого приближения.

По перемещениям вычислим напряжения $\sigma = \sigma^{(e)} + \sigma^{(b)}$, где

$$\sigma_{ij}^{(e)} = P_{ij}^{PQ} v_{P,Q} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m P_{ij}^{PQ_0 \dots Q_m} w_{P, Q_0 \dots Q_m}, \tag{5}$$

$$P_{ij}^{PQ_0 \dots Q_m} = C_{ijkQ_m} N_k^{(e)PQ_0 \dots Q_{m-1}} + C_{ijk3} \left(N_k^{(e)PQ_0 \dots Q_m} \right)',$$

$$\sigma_{ij}^{(b)} = \varepsilon Q_{ij}^{PQ} w_{,PQ} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} Q_{ij}^{PQ_0 \dots Q_m} w_{,PQ_0 \dots Q_m}, \tag{6}$$

$$Q_{ij}^{PQ_0 \dots Q_m} = C_{ijkQ_m} N_k^{(b)PQ_0 \dots Q_{m-1}} + C_{ijk3} \left(N_k^{(b)PQ_0 \dots Q_m} \right)',$$

причем $P_{ij}^{PQ} = C_{ijPQ} + C_{ijk3} N_k^{(e)PQ}$, и $Q_{ij}^{PQ} = -\xi C_{ijPQ} + C_{ijk3} \left(N_k^{(b)PQ} \right)'$.

Дифференцируем напряжения (5) и (6), учитывая связь x_3 и ξ

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} = & 1/\varepsilon \left(P_{i3}^{PQ} \right)' v_{P,Q} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m-1} \left(\left(P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + P_{iQ_m}^{Q_1 P Q_0 \dots Q_{m-1}} \right) v_{P, Q_0 \dots Q_m} + \\ & + \left(Q_{i3}^{PQ} \right)' w_{,PQ} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \left(\left(Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + Q_{iQ_m}^{P Q_0 \dots Q_{m-1}} \right) w_{,P Q_0 \dots Q_m}. \end{aligned}$$

Требуется удовлетворить 3D уравнениям равновесия $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$, где $f_i = f_i(x_1, x_2, \xi)$, $f_3 = 0$ и граничным условиям на лицевых поверхностях Σ_{top} и Σ_{bot} . Уравнения равновесия приобретают вид

$$\begin{aligned} 1/\varepsilon \left(P_{i3}^{PQ_0} \right)' v_{P, Q_0} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m-1} \left(\left(P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + P_{iQ_m}^{Q_1 P Q_0 \dots Q_{m-1}} \right) v_{P, Q_0 \dots Q_m} + \\ + \left(Q_{i3}^{PQ_0} \right)' w_{,P Q_0} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \left(\left(Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + Q_{iQ_m}^{P Q_0 \dots Q_{m-1}} \right) w_{,P Q_0 \dots Q_m} + f_i = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Граничные условия выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} P_{i3}^{PQ_0} v_{P, Q_0} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} v_{P, Q_0 \dots Q_m} + \varepsilon Q_{i3}^{PQ_0} w_{,P Q_0} + \\ + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} w_{,P Q_0 \dots Q_m} = \begin{cases} \varepsilon^3 p \delta_{i3}, & \xi = 1/2 \\ 0, & \xi = -1/2 \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

Наличие граничных условий (8) на нижней и верхней поверхностях существенно отличает применение методики осреднения к пластинам по сравнению с осреднением трехмерной среды с периодической или непериодической структурой. Однако граничные условия на боковой поверхности, где возникает краевой эффект, не рассматриваются в процедуре понижения размерности.

Поперечная нагрузка в (8) пропорциональна ε^3 , чтобы прогиб w был конечен. Также требуется положить в (7)

$$\left(P_{i3}^{PQ}\right)' = 0, \quad \left(Q_{i3}^{PQ}\right)' = 0. \quad (9)$$

Граничные условия для (9) следуют из (8)

$$P_{i3}^{PQ} = 0, \quad Q_{i3}^{PQ} = 0, \quad \xi = \pm 1/2. \quad (10)$$

Для определения функций v_1 , v_2 и w используется осреднение уравнений равновесия в поперечном направлении. В нашем случае осреднение уравнений (7) дает

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m-1} \left\langle \left(P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m}\right)' + P_{iQ_m}^{Q_1 P Q_0 \dots Q_{m-1}} \right\rangle v_{P, Q_0 \dots Q_m} + \\ + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \left\langle \left(Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m}\right)' + Q_{iQ_m}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}} \right\rangle w_{, P Q_0 \dots Q_m} + \langle f_I \rangle = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем константы

$$a_{iQ_m P Q_0 \dots Q_{m-1}} = \left\langle \left(P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m}\right)' + P_{iQ_m}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}} \right\rangle, \quad b_{iQ_m P Q_0 \dots Q_{m-1}} = -\left\langle \left(Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m}\right)' + Q_{iQ_m}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}} \right\rangle,$$

где $\langle g \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} g(x_1, x_2, \xi) d\xi$.

Тогда два двумерных уравнения равновесия сил в плоскости x_1, x_2 получим из (11) умножением на ε

$$\sum_{m=1}^M \varepsilon^m a_{iQ_m P Q_0 \dots Q_{m-1}} v_{P, Q_0 \dots Q_m} - \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} b_{iQ_m P Q_0 \dots Q_{m-1}} w_{, P Q_0 \dots Q_m} + \varepsilon \langle f_I \rangle = 0. \quad (12)$$

В терминах стандартных усилий

$$T_{IJ} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{IJ}(x_3) dx_3 = \varepsilon \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{IJ}(\xi) d\xi$$

эти уравнения имеют вид $T_{IJ,J} + \varepsilon \langle f_I \rangle = 0$. Уравнения (12) дополняются уравнением равновесия моментов $M_{IJ,IJ} + \varepsilon^3 p(x) = 0$, получаемого из уравнений $M_{IJ,I} + Q_I = 0$, $Q_{I,I} = \varepsilon^3 p(x)$, которые выводятся интегрированием в поперечном направлении трехмерных уравнений теории упругости. Перерезывающие силы и моменты вводятся стандартно

$$Q_I = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{I3}(x_3) dx_3 = \varepsilon \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_{I3}(\xi) d\xi, \quad M_{IJ} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{IJ} x_3 dx_3 = \varepsilon^2 \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_{IJ}(\xi) \xi d\xi.$$

Уравнение равновесия моментов дает

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \langle P_{IJ}^{PQ} \xi \rangle v_{P \cdot QIJ} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+2} \langle P_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} \xi \rangle v_{P \cdot Q_0 \dots Q_m IJ} + \varepsilon^3 \langle Q_{IJ}^{PQ} \xi \rangle w_{PQIJ} + \\ + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+3} \langle Q_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} \xi \rangle w_{PQ_0 \dots Q_m IJ} = -\varepsilon^3 p. \end{aligned}$$

Если ввести константы $c_{IJPQ_0 \dots Q_m} = \langle P_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} \xi \rangle$ и $d_{IJPQ_0 \dots Q_m} = -\langle Q_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} \xi \rangle$, то это уравнение принимает вид

$$-\sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} c_{IJPQ_0 \dots Q_{m-1}} v_{P \cdot Q_0 \dots Q_{m-1} IJ} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+2} d_{IJPQ_0 \dots Q_{m-1}} w_{PQ_0 \dots Q_{m-1} IJ} = \varepsilon^3 p. \quad (13)$$

Константы d_{IJPQ} имеют смысл эффективных изгибных модулей упругости. Константы c_{IJPQ} есть модули взаимного влияния растяжения/сдвига и изгиба/кручения. При этом $b_{IJPQ} = c_{PQIJ}$ [6].

Итак, рассматриваемый метод представляет решение задачи об изгибе в виде (3)-(6). При этом требуется решить двумерные уравнения (12), (13), коэффициенты в которых определяются из решения локальных задач, описываемых ниже.

В первом приближении одномерные локальные краевые задачи описаны формулами (9), (10). Эти задачи и локальные задачи в следующих приближениях – это задачи с условиями типа Неймана, поэтому для их разрешимости требуется самоуравновешенность правых частей. Для выделения единственного решения наложим условия на функции $\mathbf{N}^{(e)}$ и $\mathbf{N}^{(b)}$.

$$\int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{N}^{(e)} d\xi = 0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{N}^{(b)} d\xi = 0. \quad (14)$$

При условиях (14) эти функции определяются формулами

$$N_i^{(e)PQ} = \int_{\xi}^{1/2} \frac{C_{i3PQ}}{C_{i3i3}}(\xi) d\xi, \quad N_i^{(b)PQ} = -\int_{\xi}^{1/2} \xi \frac{C_{i3PQ}}{C_{i3i3}}(\xi) d\xi.$$

Однако функции \mathbf{P} и \mathbf{Q} более интересны: $P_{ij}^{PQ}(\xi) = C_{ijPQ} - C_{ij33} C_{33PQ} / C_{3333}$, $Q_{ij}^{PQ}(\xi) = (-C_{ijPQ} + C_{ij33} C_{33PQ} / C_{3333}) \xi$, поскольку они определяют распределение напряжений в поперечном направлении в первом приближении $\sigma_{ij} = P_{ij}^{PQ} v_{P \cdot Q} + \varepsilon Q_{ij}^{PQ} w_{PQ}$. Эффективные упругие модули в плоскости пластины равны $a_{IJPQ} = \langle P_{IJ}^{PQ}(\xi) \rangle$. Константы $b_{IJPQ} = -\langle Q_{IJ}^{PQ}(\xi) \rangle$ есть модули связанности растяжения и изгиба. В данном исследовании рассмотрим случай пластины, симметричной относительно срединной плоскости. Тогда $b_{IJPQ} = c_{IJPQ} = 0$. Также в первом приближении выполняются равенства $\langle Q_{IQ_1}^{PQ_0} \rangle = 0$, $b_{IP_0Q_1} = 0$.

Локальные задачи второго приближения формулируются как

$$\begin{cases} \left(P_{i3}^{PQ_0Q_1}(\mathbf{N}^{(e)}) \right)' + P_{iQ_1}^{PQ_0} = a_{iP_0Q_1}, & \left(Q_{i3}^{PQ_0Q_1}(\mathbf{N}^{(b)}) \right)' + Q_{iQ_1}^{PQ_0} = 0, & \xi \in (-1/2, 1/2), \\ P_{i3}^{PQ_0Q_1}(\mathbf{N}^{(e)}) = 0, & Q_{i3}^{PQ_0Q_1}(\mathbf{N}^{(b)}) = 0, & \xi = -1/2, 1/2. \end{cases} \quad (15)$$

Во втором приближении выполняется равенство $Q_{IQ_2}^{PQ_0Q_1} = 0$

В третьем приближении задача для функций \mathbf{P} аналогична задаче второго приближения (15)

$$\begin{aligned} \left(P_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} \left(\mathbf{N}^{(e)} \right) \right)' + P_{iQ_2}^{PQ_0Q_1} &= a_{iPQ_0Q_1Q_2}, \quad \xi \in (-1/2, 1/2), \\ P_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} \left(\mathbf{N}^{(e)} \right) &= 0, \quad \xi = \pm 1/2. \end{aligned}$$

Константы в правой части $a_{i3PQ_0Q_1Q_2}$ находятся из предыдущего приближения $a_{i3PQ_0Q_1Q_2} = \left\langle P_{iQ_2}^{PQ_0Q_1} \right\rangle$. Однако более интересны функции $Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2}$ и $\mathbf{N}^{(b)}$, определяемые из краевой задачи

$$\begin{aligned} \left(Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} \left(\mathbf{N}^{(b)} \right) \right)' + Q_{iQ_2}^{PQ_0Q_1} &= b_{iQ_2PQ_0Q_1}, \quad \xi \in (-1/2, 1/2), \\ Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} \left(\mathbf{N}^{(b)} \right) &= 0, \quad \xi = -1/2, \quad Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} \left(\mathbf{N}^{(b)} \right) = \delta_{i3} d_{PQ_0Q_1Q_2}, \quad \xi = 1/2. \end{aligned} \quad (16)$$

В отличие от предыдущих краевых задач, рассматриваемое граничное условие на верхней поверхности пластины в (16) является неоднородным. Докажем, что задачи (16) имеют решение для $b_{iQ_2PQ_0Q_1} = 0$. Хорошо известно, что баланс правых частей в (16) необходим и достаточен для существования решения уравнения (16)

$$\int_{-1/2}^{1/2} Q_{iQ_2}^{PQ_0Q_1}(\xi) d\xi + \delta_{i3} d_{PQ_0Q_1Q_2} = 0.$$

Для $i=1,2$ равенство очевидно выполняется, поскольку, как отмечено выше, $Q_{iQ_2}^{PQ_0Q_1} = 0$. Рассмотрим для $i=3$ преобразование

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(Q_{3Q_2}^{PQ_0Q_1}(\xi) \xi \right)' d\xi = \int_{-1/2}^{1/2} \left(Q_{3Q_2}^{PQ_0Q_1}(\xi) \right)' \xi d\xi + \int_{-1/2}^{1/2} Q_{3Q_2}^{PQ_0Q_1}(\xi) d\xi.$$

Интеграл в левой части равен нулю из-за однородных граничных условий (15): $Q_{3Q_2}^{PQ_0Q_1}(\pm 1/2) = 0$. Член $\left(Q_{3Q_2}^{PQ_0Q_1}(\xi) \right)'$ равен $Q_{2Q_1}^{PQ_0}(\xi)$ вследствие уравнений (15). Следовательно, имеем

$$0 = \int_{-1/2}^{1/2} Q_{2Q_1}^{PQ_0}(\xi) \xi d\xi + \int_{-1/2}^{1/2} Q_{3Q_2}^{PQ_0Q_1}(\xi) d\xi = d_{Q_2Q_1PQ_0} + \int_{-1/2}^{1/2} Q_{iQ_2}^{PQ_0Q_1}(\xi) d\xi.$$

Именно это равенство требовалось доказать.

Третье приближение дает единственные ненулевые локальные функции $Q_{33}^{PQ_0Q_1Q_2}$. Остальные локальные функции равны нулю. Константы $b_{iQ_2PQ_0Q_1} = - \left\langle \left(Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} \right)' + Q_{iQ_2}^{PQ_0Q_1} \right\rangle$ равны нулю. Первый член равен нулю вследствие граничных условий (16), а второй – поскольку $Q_{iQ_2}^{PQ_0Q_1} = 0$. Равенство $b_{iQ_2PQ_0Q_1} = 0$ свидетельствует, что взаимное влияние изгиба и растяжения/сдвига в первых трёх приближениях отсутствует в случае пластины с симметричной структурой. Это доказывает справедливость асимптотического разложения, проведенного в [6,7,9], а также известных теорий пластин третьего порядка. Конечно, интересно, справедливо ли это для приближения четвертого порядка.

2. ЧЕТВЕРТОЕ И ПЯТОЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Ниже мы покажем, что поперечная нагрузка вызывает перемещения в отсчетной плоскости, которые возникают в четвертом приближении. Далее мы рассматриваем случай $f_I = 0$. Уравнения (12), (13) с точностью до $O(\varepsilon^5)$ выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} & \varepsilon a_{IQ_1PQ_0} v_{P,Q_0Q_1} + \varepsilon^2 a_{IQ_2PQ_0Q_1} v_{P,Q_0Q_1Q_2} + \varepsilon^3 a_{IQ_3PQ_0Q_1Q_2} v_{P,Q_0Q_1Q_2Q_3} + \\ & + \varepsilon^4 a_{IQ_4PQ_0Q_1Q_2Q_3} v_{P,Q_0Q_1Q_2Q_3Q_4} + \varepsilon^5 a_{IQ_5PQ_0Q_1Q_2Q_3Q_4} v_{P,Q_0Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5} + \\ & + \varepsilon^6 a_{IQ_6PQ_0Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5} v_{P,Q_0Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6} - \varepsilon^4 b_{IQ_3PQ_0Q_1Q_2} w_{P,Q_0Q_1Q_2Q_3} - \\ & - \varepsilon^5 b_{IQ_4PQ_0Q_1Q_2Q_3} w_{P,Q_0Q_1Q_2Q_3Q_4} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^2 c_{IIPQ_0} v_{P,Q_0IJ} - \varepsilon^3 c_{IIPQ_0Q_1} v_{P,Q_0Q_1IJ} - \varepsilon^4 c_{IIPQ_0Q_1Q_2} v_{P,Q_0Q_1Q_2IJ} + \\ & + \varepsilon^3 d_{IIPQ_0} w_{P,Q_0IJ} + \varepsilon^4 d_{IIPQ_0Q_1} w_{P,Q_0Q_1IJ} + \\ & + \varepsilon^5 d_{IIPQ_0Q_1Q_2} w_{P,Q_0Q_1Q_2IJ} = \varepsilon^3 p. \end{aligned} \quad (18)$$

Для решения системы (17), (18) применяем стандартный прием асимптотического анализа, представляя перемещения и прогиб в виде разложений $v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \dots$, $w = w^{(0)} + \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \dots$. Тогда можно выписать рекуррентную последовательность уравнений, формулируемых в срединной плоскости

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 : & \varepsilon^4 a_{IQ_1PQ_0} v_{P,Q_0Q_1}^{(3)} - \varepsilon^4 b_{IQ_3PQ_0Q_1Q_2} w_{P,Q_0Q_1Q_2Q_3}^{(0)} = 0, \\ \varepsilon^5 : & \varepsilon^5 a_{IQ_1PQ_0} v_{P,Q_0Q_1}^{(4)} + \varepsilon^5 a_{IQ_2PQ_0Q_1} v_{P,Q_0Q_1Q_2}^{(3)} - \varepsilon^5 b_{IQ_3PQ_0Q_1Q_2} w_{P,Q_0Q_1Q_2Q_3}^{(1)} - \\ & - \varepsilon^5 b_{IQ_4PQ_0Q_1Q_2Q_3} w_{P,Q_0Q_1Q_2Q_3Q_4}^{(0)} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 : & d_{IIPQ_0} w_{P,Q_0IJ}^{(0)} = p, \\ \varepsilon^4 : & d_{IIPQ_0} w_{P,Q_0IJ}^{(1)} + d_{IIPQ_0Q_1} w_{P,Q_0Q_1IJ}^{(0)} = 0, \\ \varepsilon^5 : & -c_{IIPQ_0} v_{P,Q_0IJ}^{(3)} + d_{IIPQ_0} w_{P,Q_0IJ}^{(2)} + d_{IIPQ_0Q_1} w_{P,Q_0Q_1IJ}^{(1)} + \\ & + d_{IIPQ_0Q_1Q_2} w_{P,Q_0Q_1Q_2IJ}^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для симметричной пластины $d_{IIPQ_0Q_1} = 0$, $c_{IIPQ_0} = 0$, поэтому из (20) получаем, что $w^{(1)} = 0$. Далее получаем, что прогибы $w^{(0)}$, $w^{(2)}$ находятся из тех же уравнений, что были получены в работах, в которых уравнение для прогиба не рассматривалось совместно с уравнениями равновесия в отсчетной плоскости (см., например, [6,8,9])

$$d_{IIPQ_0} w_{P,Q_0IJ}^{(0)} = p, \quad d_{IIPQ_0} w_{P,Q_0IJ}^{(2)} + d_{IIPQ_0Q_1Q_2} w_{P,Q_0Q_1Q_2IJ}^{(0)} = 0. \quad (21)$$

Из системы (19) следует, что продольные перемещения $v^{(3)}$ и $v^{(4)}$ определяются только прогибом $w^{(0)}$ и не зависят от $w^{(2)}$.

Локальные функции \mathbf{P} для четвертого и пятого приближений находятся из краевых задач, аналогичных задачам второго приближения (15), т.е. с однородными граничными условиями

$$P_{i3}^{PQ} = 0, \quad P_{i3}^{PQ_0Q_1} = 0, \quad P_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} = 0, \quad \xi = \pm 1/2. \quad (22)$$

Для функций \mathbf{Q} условия также однородные при $\xi = -1/2$

$$Q_{i3}^{PQ} = 0, \quad Q_{i3}^{PQ_0Q_1} = 0, \quad Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} = 0, \quad Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2Q_3} = 0, \quad Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2Q_3Q_4} = 0. \quad (23)$$

На верхней поверхности условия для функций \mathbf{Q} имеют вид

$$\begin{aligned} Q_{i3}^{PQ} = 0, \quad Q_{i3}^{PQ_0Q_1} = 0, \quad Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} = d_{PQ_0Q_1Q_2}, \quad Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2Q_3} = 0, \\ Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2Q_3Q_4} = d_{PQ_0Q_1Q_2Q_3Q_4}. \end{aligned} \quad (24)$$

Осталось проверить выполнение граничных условий (8) на верхней и нижней поверхностях. Выпишем эти условия с точностью до $O(\varepsilon^5)$

$$\begin{aligned} P_{i3}^{PQ} \left(\varepsilon^3 v_P^{(3)},_Q + \varepsilon^4 v_P^{(4)},_Q + \varepsilon^5 v_P^{(5)},_Q \right) + \varepsilon^1 P_{i3}^{PQ_0Q_1} \left(\varepsilon^3 v_P^{(3)},_{Q_0Q_1} + \varepsilon^4 v_P^{(4)},_{Q_0Q_1} \right) + \\ + \varepsilon^2 P_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} \varepsilon^3 v_P^{(3)},_{Q_0Q_1Q_2} + \varepsilon Q_{i3}^{PQ} \left(w_{,PQ}^{(0)} + \varepsilon w_{,PQ}^{(1)} + \varepsilon^2 w_{,PQ}^{(2)} + \varepsilon^3 w_{,PQ}^{(3)} + \varepsilon^4 w_{,PQ}^{(4)} \right) + \\ + \varepsilon^2 Q_{i3}^{PQ_0Q_1} \left(w_{,PQ_0Q_1}^{(0)} + \varepsilon w_{,PQ_0Q_1}^{(1)} + \varepsilon^2 w_{,PQ_0Q_1}^{(2)} + \varepsilon^3 w_{,PQ_0Q_1}^{(3)} \right) + \\ + \varepsilon^3 Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} \left(w_{,PQ_0Q_1Q_2}^{(0)} + \varepsilon w_{,PQ_0Q_1Q_2}^{(1)} + \varepsilon^2 w_{,PQ_0Q_1Q_2}^{(2)} \right) + \\ + \varepsilon^4 Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2Q_3} \left(w_{,PQ_0Q_1Q_2Q_3}^{(0)} + \varepsilon w_{,PQ_0Q_1Q_2Q_3}^{(1)} \right) + \varepsilon^5 Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2Q_3Q_4} w_{,PQ_0Q_1Q_2Q_3Q_4}^{(0)} = \\ = \begin{cases} \varepsilon^3 p \delta_{i3}, & \xi = 1/2 \\ 0, & \xi = -1/2 \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

Можно заметить, что условия (25) выполняются при выполнении условий (22)-(24) и уравнений (21). Другими словами, можно сказать, что граничные условия на верхней поверхности и уравнения равновесия моментов приводят к одним и тем же уравнениям (21) для $w^{(0)}$ и $w^{(2)}$.

3. СРАВНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ С КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫМ РЕШЕНИЕМ

Были проведены вычислительные эксперименты для сравнения прогиба и напряжений в четвертом приближении на примере задачи о цилиндрическом изгибе. Пластина имеет безразмерную длину 1 в направлении координаты x_1 , толщину h в направлении x_3 . Будут сравниваться различные приближения асимптотической теории друг с другом и с конечно-элементным экспериментом в случае, где это возможно. Для всех примеров нагрузка взята синусоидальной

$$p(x_1) = h^3 \sin(\pi x_1).$$

На концах пластины подразумеваются шаровые опоры. Толщина пластины $h = 0.1$. Конечно-элементная модель (КЭМ) имеет 100 элементов в направлении x_1 , 40 элементов для каждого слоя в случае слоистой пластины. Для однородной пластины подразумевается 1 слой.

Сначала рассмотрим случай однородной изотропной пластины (рис.1). Материал имеет модуль Юнга $E = 200$ ГПа и $\nu = 0.3$. Приведем сравнение графиков напряжений, прогиба и перемещения в направлении оси x_1 . Графики напряжений откладываются от поперечной координаты ξ , графики прогиба и перемещения в плоскости откладываются от продольной координаты x_1 . Из графика для поперечного касательного напряжения видно, что второе асимптотическое приближение совпадает с четвертым приближением

и с конечно-элементным решением. Заметим, что для асимптотической теории и изотропной пластины второе приближение для поперечного касательного напряжения совпадает с формулой Журавского. Первое асимптотическое приближение совпадает с теорией Кирхгофа. Из графика нормального напряжения видно, что для изотропной пластины и выбранной толщины распределение действительно является линейным.

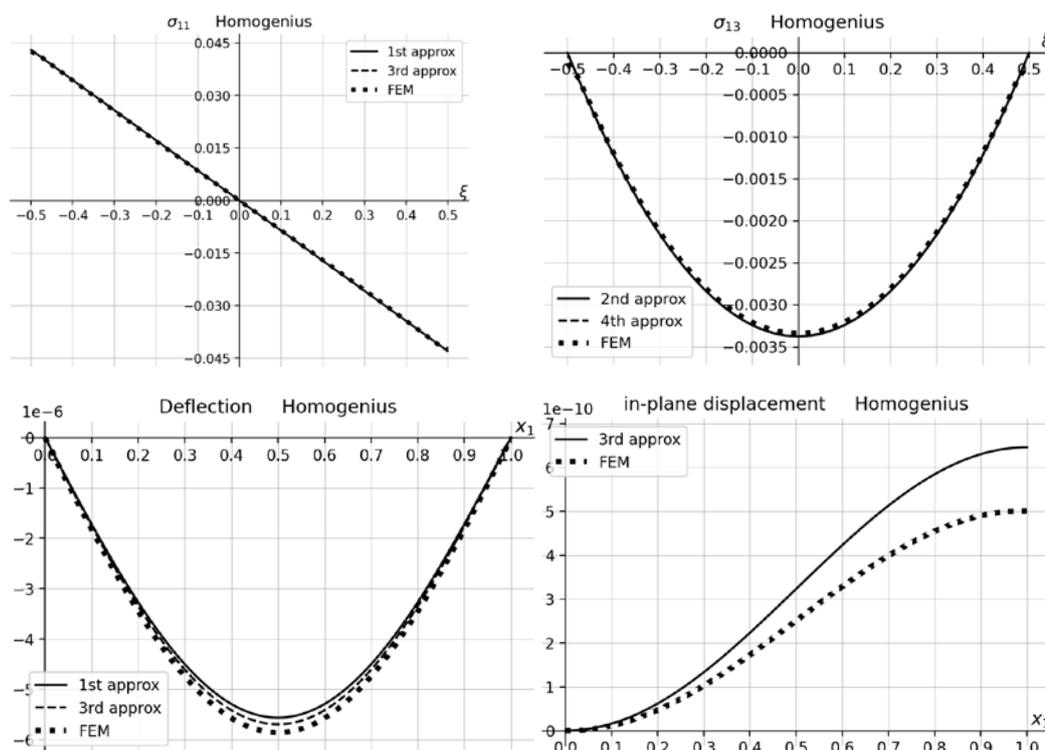


Рис.1. Распределение напряжений и прогиба для изотропной пластины.

Рассмотрим пример ортотропного материала, полученного осреднением однонаправленного полимерно-волокнистого композита, волокна которого направлены вдоль оси x_1 . Матрицей является эпоксидная смола, волокна углеродные. Отметим, что точность формул осреднения для выбранной концентрации волокон не анализировалась, поскольку осредненный материал выбран как пример ортотропного материала. Анализ формул осреднения упругих модулей волокнистого композита является отдельным вопросом, которому посвящена обширная литература. Как пример, расчетные формулы для констант эффективной среды взяты из [10] (M – матрица, I – включение)

$$E_{11} = \gamma_I E_I + \gamma_M E_M + 4\gamma_I \gamma_M \frac{(v_I - v_M)^2 G_M}{\gamma_M G_M / (k_I + G_I / 3) + \gamma_I G_M / (k_M + G_M / 3) + 1},$$

$$K_{23} = k_M + \frac{G_M}{3} + \frac{\gamma_I}{\left[k_I - k_M + \frac{1}{3}(G_I - G_M) \right] + \frac{\gamma_M}{k_M + \frac{4}{3}G_M}},$$

$$G_{23} = G_M + \frac{G_M \gamma_I}{\left(\frac{G_M}{G_I - G_M} + \frac{k_M + \frac{7}{3} G_M}{2k_M + \frac{8}{3} G_M} \right)}, \quad G_{12} = G_M \frac{G_I (1 + \gamma_I) + \gamma_M G_M}{\gamma_M G_I + G_M (1 + \gamma_I)},$$

$$E_{22} = \frac{4G_{23}K_{23}}{K_{23} + G_{23} + 4\nu_{12}^2 G_{23} K_{23} / E_{11}}, \quad \nu_{23} = \frac{K_{23} - G_{23} - \frac{4\nu_{12}^2 G_{23} K_{23}}{E_{11}}}{K_{23} + G_{23} + \frac{4\nu_{12}^2 G_{23} K_{23}}{E_{11}}}.$$

Материальные свойства компонент и их концентрации приведены в Таблице 1, в которой γ – концентрация волокон. Модули даны в ГПа. Материальные параметры волокна и матрицы взяты из [11].

Таблица 1.

Материал	γ	E	ν	G
смола	0.5	2.4	0.35	0.9
волокно	0.5	850	0.27	330.0

Рассчитанные эффективные свойства среды приведены в Таблице 2. Графики напряжений, прогиба и перемещения срединной плоскости в направлении x_1 при толщине пластины $h = 0.1$ приведены на рис.2.

Таблица 2.

E_{11}	E_{22}	ν_{12}	ν_{23}	G_{12}	G_{23}
426	6.9	0.30	0.49	2.65	2.32

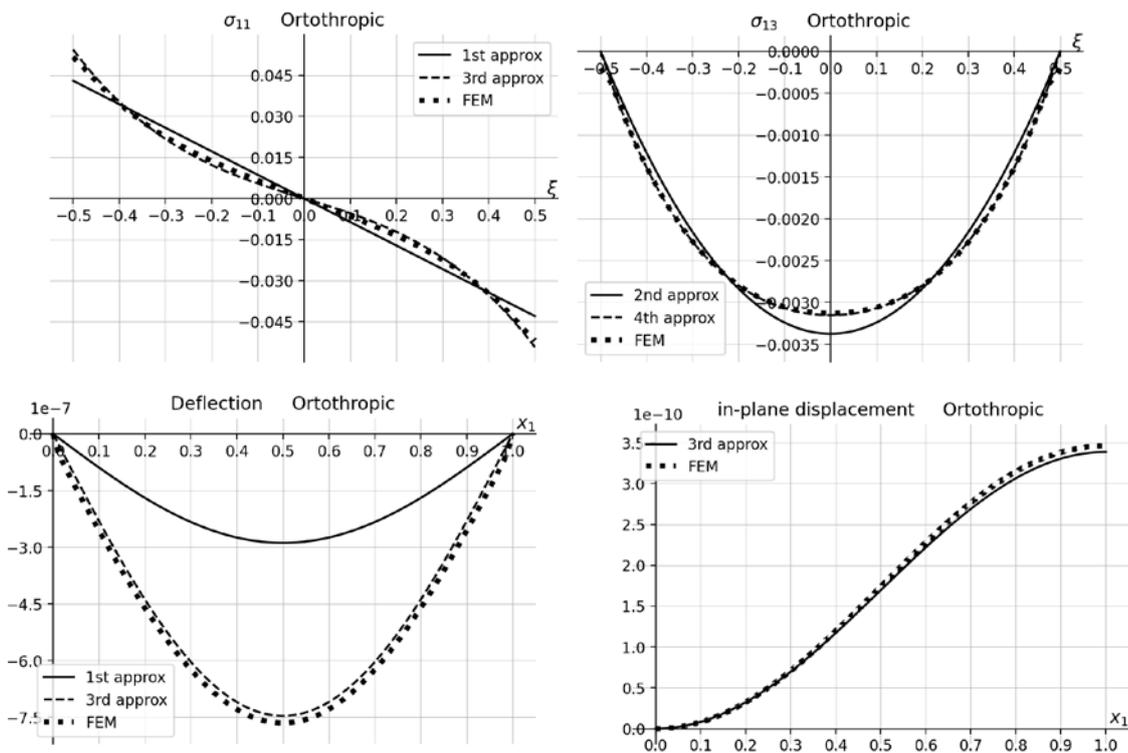


Рис.2. Распределение напряжений и прогиба для ортотропной пластины.

На рис.2 так же, как и на рис.1, не приведен график поперечного нормального напряжения, поскольку оно совпадает с напряжением, рассчитанным МКЭ. Однако нормальное изгибное напряжение уже не имеет линейного распределения вдоль поперечного направления и хорошо совпадает с конечно-элементным решением. Поперечное касательное напряжение в 4-м приближении совпадает с рассчитанным по МКЭ, но отличается от напряжения во 2-м приближении асимптотического метода. Особенно сильно отличие прогиба, рассчитанного в первом и третьем асимптотических приближениях. Последнее весьма хорошо совпадает с решением по МКЭ. Еще раз отметим, что прогиб в первом приближении – это также решение по теории Кирхгофа. Приведенный график лишь подтверждает известный факт, что теория Кирхгофа дает сильно неточное значение прогиба для ортотропного материала. Перемещение вдоль x_1 мало по сравнению с прогибом, но хорошо совпадает с конечно-элементным решением.

В качестве следующего примера рассмотрим симметричную сэндвич-пластину, состоящую из двух материалов: никель посередине и керамика с краев. Такие материалы используются, например, в теплоизоляционных покрытиях: керамика обладает свойством низкой теплопроводности, но хрупка, а никель увеличивает общую прочность. Материальные параметры приняты следующими (модули в ГПа): $E_{nic} = 200$, $\nu_{nic} = 0.31$, $E_{cer} = 380$, $\nu_{cer} = 0.25$. Толщина пластины $h = 0.1$, толщина центрального слоя равна $2h/3$. Графики напряжений, прогиба и перемещения срединной плоскости в направлении x_1 приведены на рис.3.

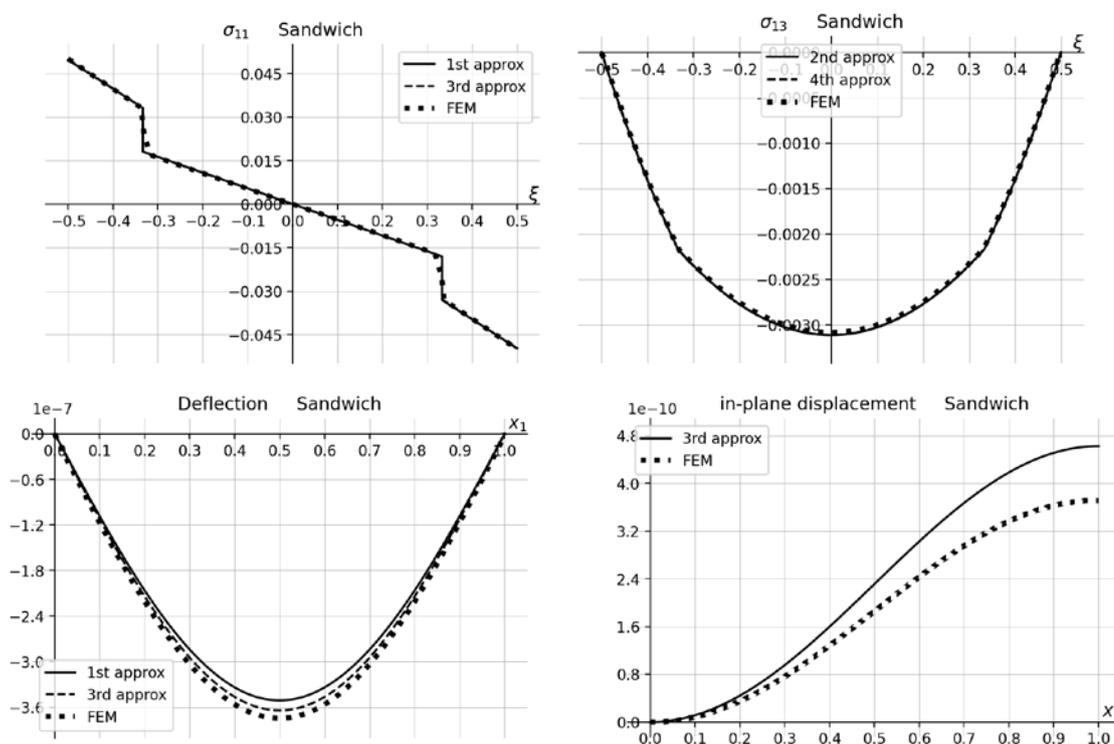


Рис.3. Распределение напряжений и прогиба для изотропной сэндвич-пластины.

В последнем примере рассмотрим поведение асимптотического решения при увеличении отношения модулей жесткости двух материалов. Для этого ослабим модуль Юнга прослойки из предыдущего примера в 10 раз: $E_{nic} = 20$.

Из рис.4 видно, что для сэндвич-пластины из изотропных материалов все напряжения достаточно хорошо совпадают с напряжениями, рассчитанными конечно-элементным методом. Однако прогиб в первом приближении достаточно сильно отличается от прогиба, полученного в третьем приближении или от прогиба полученного с помощью МКЭ.

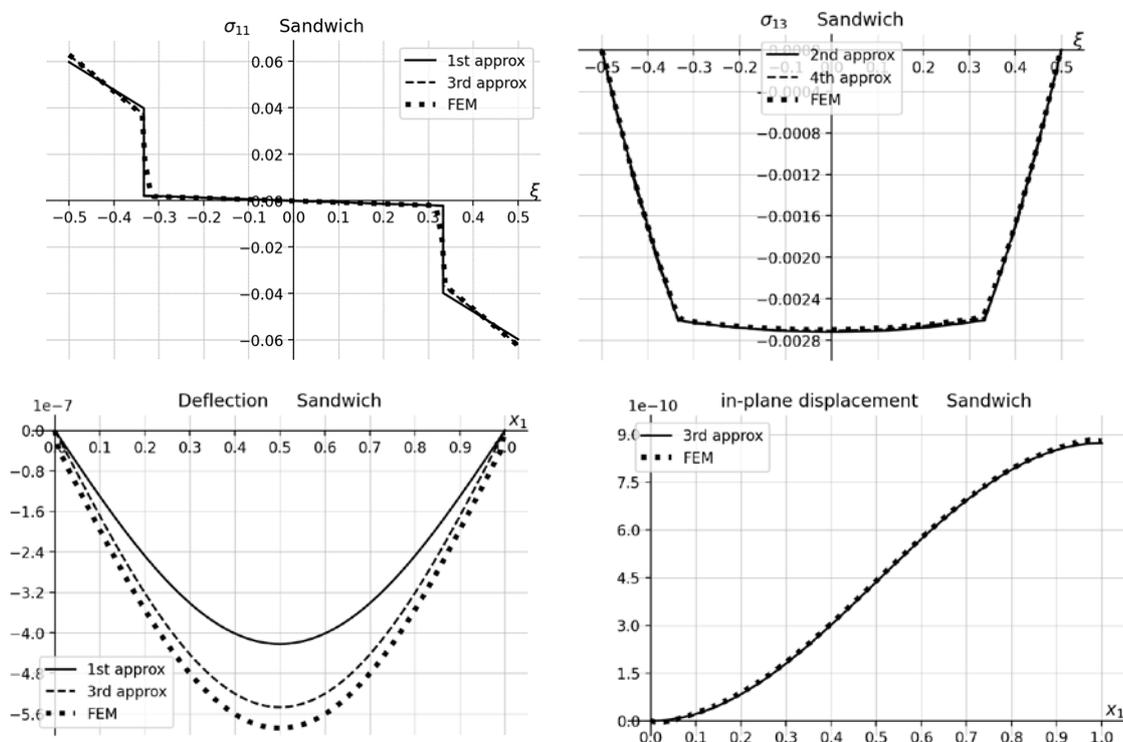


Рис.4. Распределение напряжений и прогиба для сэндвич-пластины с мягким средним слоем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлено асимптотическое получение уравнений равновесия пластин вплоть до пятого приближения для однородного и неоднородного ортотропного материала, исходя из трехмерных уравнений теории упругости. Представление ограничено случаем симметричной в поперечном направлении пластины.

Следует отметить, что для однородной пластины используемая асимптотическая теория в первом приближении приводит к дифференциальным уравнениям, аналогичным теории Кирхгофа, а в третьем приближении – к теории третьего порядка. Теория Рейсснера находится между ними.

В четвертом приближении возникают перемещения в срединной плоскости, зависящие от прогиба. Задача определения продольных перемещений решается независимо от задачи для определения прогиба. Важно отметить, что проведенные вычисления показали, что величина продольных перемещений весьма мала и может не учитываться.

Из приведенных вычислительных примеров можно сделать вывод, что асимптотический метод может использоваться для анализа точности различных теорий пластин наравне с методом конечных элементов. В рассмотренных примерах четвертое приближение дает решения для напряжений и прогиба, близкое к конечно-элементным решениям, полученным на мелкой сетке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gol'denveizer A.L. *Methods for justifying and refining the theory of shells: A survey of recent results* // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1968. – Vol.32. – No.4. – Pp.704-718.
2. Kohn R.V., Vogelius M. *A new model of thin plates with rapidly varying thickness* // Int. J. Solids Struct. – 1984. – Vol.20. – No.4. – Pp.333-350.
3. Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells*. – New York: World Scientific, 2000. – 768 p.
4. Панасенко Г.П., Резцов М.В. *Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине* // Доклады АН СССР. – 1987. – Т.294. – №5. – С.1061-1065.
5. Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. *Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости* // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Т.7. – №19.
6. Шешенин С.В., Мурадханов Р.Р. *Асимптотическое исследование изгиба пластины для сильно ортотропного материала* // Известия РАН. МТТ. – 2023. – №3. – С.36-57.
7. Шешенин С.В. *Асимптотический анализ периодических в плане пластин* // Известия РАН. МТТ. – 2006. – №6. – С.71-79.
8. Шешенин С.В. *Применение метода осреднения к пластинам, периодическим в плане* // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2006. – №1. – С.47-51.
9. Шешенин С.В., Скопцов К.А. *Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений* // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – №2. – С.49-61.
10. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. – М.: Мир, 1974. – 340 с.
11. Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Mechanics and analysis of composite materials*. – Oxford: Elsevier Science Techn., 2001.

REFERENCES

1. Gol'denveizer A.L. *Methods for justifying and refining the theory of shells: A survey of recent results*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1968, Vol.32, No.4, Pp.704-718.
2. Kohn R.V., Vogelius M. *A new model of thin plates with rapidly varying thickness*. Int. J. Solids Struct., 1984, Vol.20, No.4, Pp.333-350.
3. Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells*. New York, World Scientific, 2000, 768 p.
4. Panasenko G.P., Reztsov M.V. *Osrednenie trekhmernoj zadachi teorii uprugosti v neodnorodnoj plastine [Averaging of a three-dimensional problem of elasticity theory in an inhomogeneous plate]*. Doklady Akademii nauk SSSR, 1987, Vol.294, No.5, Pp.1061-1065.
5. Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Sravnitel'nyj analiz reshenij asimptoticheskoj teorii mnogoslojnykh tonkikh plastin i trekhmernoj teorii uprugosti [Comparison analysis of asymptotic theory of multilayer composite plates and three-dimensional theory of elasticity]*. Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovatsii, 2013, Vol.7, No.19.
6. Sheshenin S.V., Muradkhanov R.R. *Asymptotic study of plate bending for a strongly orthotropic material*. Mechanics of Solids, 2023, Vol.58, No.3, Pp.697-715.

7. Sheshenin S.V. *Asymptotic analysis of plates with periodic cross-sections*. Mechanics of Solids, 2006, Vol.41, No.6, Pp.57-63.
8. Sheshenin S.V. *Primenenie metoda osredneniya k plastinam, periodicheskim v plane [Application of the homogenization method for the in-plane periodical plates]*. Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika, 2006, No.1, Pp.47-51.
9. Sheshenin S.V., Skoptsov K.A. *Teoriya plastin, osnovannaya na metode asimptoticheskikh razlozhenij [Theory of plates based on the method of asymptotic decompositions]*. Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody, 2014, No.2, Pp.49-61.
10. Christensen R. *Vvedenie v teoriyu vyazkouprugosti [Introduction to the theory of viscoelasticity]*. Moskva, Mir, 1974, 340 p.
11. Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Mechanics and analysis of composite materials*. Oxford, Elsevier Science Techn., 2001.

Поступила в редакцию 31 мая 2024 года.

Сведения об авторах:

Шешенин Сергей Владимирович – д.ф.-м.н., проф., проф., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: sergey.sheshenin@mail.ru

Кузьмин Максим Александрович – студ., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: maximim10@mail.ru

Артамонова Нина Брониславовна – к.ф.-м.н., к.г.-м.н., с.н.с., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: artamonovanb@mail.ru