УДК 539.3
EDN CSJLMN (https://elibrary.ru/csjlmn)
DOI 10.33113/mkmk.ras.2024.30.01.07

ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОБРАТИМОЙ ТЕРМОМЕХАНИКИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР*

Белов П.А., Лурье С.А.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В работе модель пространственно-временного трансверсально-изотропного континуума используется для того, чтобы развить наиболее полный вариант вариационной модели для связных обратимых динамических процессов теплопереноса и термомеханики деформируемых сред и с наибольшей полнотой учесть связные эффекты в отношении пространственных и временных эффектов. Временная ось является осью трансверсальной изотропии. При описании полей температуры и термомеханических процессов применяемая модель 4D пространственно-временного континуума позволяет естественным образом ввести термический потенциал, в качестве которого рассматривается четвертая компонента 4D вектора перемещений. Для определения силовой модели используется принцип возможных перемещений считая, что список аргументов определяется тензором обобщенных дисторсий и вектором 4D перемещений. Решается проблема идентификации физических постоянных модели для обратимых процессов. Для этого формулируются физически обоснованные гипотезы: гипотеза парности пространственных касательных напряжений, гипотеза классической зависимости импульса от скорости, гипотеза потенциальности теплового потока (ослабленная гипотеза Фурье). Предполагается также, что закон Дюамеля-Неймана по форме имеет вид классического закона Дюамеля-Неймана, обобщенного за счет учета релаксационных эффектов в температуре, давлении и шаровом тензоре деформаций. Отметим, что использование модели пространственно-временного континуума позволило для обратимых процессов получить обобщение закона теплопроводности Максвелла-Каттанео для теплового потока. Отличительной стороной предлагаемого метода моделирования является то, что в рамках рассматриваемых моделей обобщенные законы Максвелла-Каттанео и Дюамеля-Неймана не вводятся феноменологически, а получены как уравнения совместности при исключении термического потенциала из уравнений закона Гука для температуры, теплового потока и давления.

Ключевые слова: термоупругость; тепловой баланс; обратимые процессы термомеханики; тепловые волны; обобщенный закон Максвелла-Каттанео; обобщенный закон Дюамеля-Неймана; неклассические модули термомеханических свойств; масштабные эффекты

VARIATIONAL FORMULATION OF PROBLEMS OF REVERSIBLE THERMOMECHANICS FOR LAYERED STRUCTURES.

Belov P.A., Lurie S.A.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

---

* *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант №23-11-00275).*

ABSTRACT

In this work, the model of the spatio-temporal transversally isotropic continuum is used in order to develop the most complete version of the variational model for connected reversible dynamic processes of heat transfer and thermomechanics of deformable media and to take into account the connected effects in relation to spatial and temporal effects as fully as possible. The time axis is the axis of transversal isotropy. When describing temperature fields and thermomechanical processes, the applied model of the 4D space-time continuum allows us to naturally introduce the thermal potential, which is considered the fourth component of the 4D displacement vector. To determine the force model, we use the principle of possible displacements, considering that the list of arguments is determined by the tensor of generalized distortions and the vector of 4D displacements. The problem of identifying the physical constants of the model for reversible processes is solved. For this purpose, physically based hypotheses are formulated: the hypothesis of the pairing of spatial tangential stresses, the hypothesis of the classical dependence of momentum on velocity, the hypothesis of the potentiality of heat flow (weakened Fourier hypothesis). It is also assumed that the Duhamel-Neumann law has the form of the classical Duhamel-Neumann law, generalized by taking into account relaxation effects in temperature, pressure and the spherical strain tensor. Note that the use of the space-time continuum model made it possible to obtain a generalization of the Maxwell-Cattaneo heat flow law for reversible processes. A distinctive aspect of the proposed modeling method is that, within the framework of the models under consideration, the generalized Maxwell-Cattaneo and Duhamel-Neumann laws are not introduced phenomenologically, but are obtained as compatibility equations when the thermal potential is excluded from the equations of Hooke's law for temperature, heat flow and pressure.

Keywords: thermoelasticity; thermal balance; reversible processes of thermomechanics; thermal waves; generalized Maxwell-Cattaneo law; generalized Duhamel-Neumann law; non-classical moduli of thermomechanical properties; scale effects.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование связных проблем термомеханики с учетом особенностей процессов механического деформирования и теплопереноса чрезвычайно востребованы в настоящее время в связи с развитием современных технологических процессов и с необходимостью прогнозировать поведение материалов в условиях воздействия интенсивных физических полей. Например, известно, что классическая теория теплопереноса становится недостаточной для описания распространения тепла при низких температурах [1], а также для понимания термоупругих свойств малоразмерных систем [2,3], для случаев моделирования наноструктурных микроэлектронных компонентов и различных термоэлектрических устройств [4].

Связные проблемы тепломассопереноса требуют привлечения более общих моделей типа Максвелла-Каттанео [5], которые свободны от противоречий моделей теплопереноса диффузионного типа. Эта составляющая общей проблемы моделирования термодинамического процесса деформирования до настоящего времени является объектом тщательных исследований и обобщений. При этом следует иметь в виду, что, как правило, закон теплопроводности Фурье и его обобщения связаны с необратимыми термодинамическими процессами. Отметим, например, работы [6-8] где было показано, что время релаксации в законе теплопроводности Максвелла-Каттанео может определяться вязкоупругими свойствами сред и это, конечно, не исключает других причин, приводящих не к диффузионным, а к волновым механизмам передачи тепла. Необходимым является учет связности полей деформирования и тепловых полей в динамических процессах термомеханики в рамках и обратимых и необратимых процессов. В связи с этим отметим, что весьма эффективной для построения обобщенной динамической термоупругости оказалась идея рассмотрения пространственно-временного континуума (4D-среда), трансверсально-изотропного в отношении временной координаты [9,10]. Установлено, что законы Максвелла-Каттанео и Дюамеля Неймана в рамках таких обобщенных моделей не вводятся феноменологически, а могут быть построены как уравнения совместности [11-14]. В работах [11,15] отмечена и важность учета масштабных эффектов при моделировании термомеханических процессов, доказано, что масштабные эффекты существенно влияют на процессы теплопереноса, и, в частности, на переход от диффузионного механизма к волновому.

Наиболее сложной является проблема полноты сформулированных моделей, их согласованностью с физическим смыслом и их непротиворечивость экспериментальным данным. Эти вопросы возникают при решении проблемы идентификации физических параметров моделей в рамках обратимых и необратимых процессов. С формальной точки зрения построение согласованных физических моделей сводится к формулировке корректных разрешающих уравнений, краевых и начальных условий для процессов, в которых эффекты взаимовлияния механических и тепловых полей могут быть существенными и которые сопровождаются диссипацией. При этом вариационным методам моделирования, вероятно, нет альтернативы. Развитие вариационных моделей 4D сред позволило показать, что использование вариационного метода Л.И.Седова [16-18] при построении моделей позволил построить замкнутый вариант связной модели теплопереноса и термоупругости, согласованный термодинамикой необратимых процессов [10,11-14].

В настоящей работе развивается вариационная модель связных, обратимых, динамических процессов теплопереноса и термомеханики деформируемых сред. Предлагается процедура идентификации параметров вариационной модели из условий согласования формально построенной модели с известными физическими соотношениями в механике сред и теории теплообмена.

1. ВАРИАЦИОННАЯ 4D-ПОСТАНОВКА СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБРАТИМЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Будем рассматривать динамическое силовое и тепловое состояние изотропной среды. Деформированное состояние будем определять 3D-вектором перемещений r_i, а тепловое состояние – термическим потенциалом R. Определим 4D-вектор перемещений R_i следующим разложением

$$R_i = r_i + icRN_i$$
$$\begin{cases} r_i = R_a\delta^*_{ai} \\ R = R_aN_a/(ic) \end{cases} \tag{1}$$

Здесь δ_{ij} – 4D-тензор Кронекера $\left(\delta_{ij}\delta_{ij} = 4\right)$, $\delta^*_{ij} = \delta_{ij} - N_iN_j$ – 3D-тензор Кронекера $\left(\delta^*_{ij}\delta^*_{ij} = 3\right)$, N_i – орт времени, c – нормирующий множитель, размерности скорости, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Индексы пробегают значения от 1 до 4.

Для определения силовой модели используем принцип возможных перемещений считая, что список аргументов определяется тензором обобщенных 4D дисторсий $R_{i,j}$ и вектором 4D перемещений R_i (см. (1))

$$\begin{gathered}\delta A-\int\left(\sigma_{ij}\delta R_{i,j}+\sigma_i\delta R_i\right)dV_4=0,\\ \int\left(\sigma_{ij,j}-\sigma_i+P_i^{V_4}\right)\delta R_i dV_4-\int\left(P_i^{F_4}-\sigma_{ij}n_j\right)\delta R_i dF_4=0,\end{gathered}\tag{2}$$

где $A=\int P_i^{V_4}R_i dV_4+\int P_i^{F_4}R_i dF_4$ – работа внешних 4D-объёмных сил $P_i^{V_4}$.

$P_i^{V_4}=p_i^V+p^V\left(ic\right)^{-1}N_i$, $\quad p_i^V=P_j^{V_4}\delta_{ji}^*\quad p^V=\left(ic\right)P_j^{V_4}N_j$ и внешних 4D-поверхностных сил $P_i^{F_4}$. $P_i^{F_4}=p_i^F+p^F\left(ic\right)^{-1}N_i$, $\quad p_i^F=P_j^{F_4}\delta_{ji}^*\quad p^F=\left(ic\right)P_j^{F_4}N_j$ на 4D-перемещениях R_i. Под объёмом V_4 будем понимать односвязное множество пространственно-временных событий, а под гиперповерхностью F_4 – кусочно-гладкую поверхность, ограничивающую выбранный объём.

1.1. Достаточные условия обратимости термомеханических процессов.

Достаточные условия обратимости термомеханических процессов определяются формулами Грина

$$\sigma_i=\frac{\partial U^{V_4}}{\partial R_i}\quad \sigma_{ij}=\frac{\partial U^{V_4}}{\partial R_{i,j}}.\tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получим формулировку вариационного принципа Лагранжа для обратимых термомеханических процессов в 4D-среде

$$\begin{gathered}\delta L=0\\ L=A-\int U^{V_4}dV_4\end{gathered}\tag{4}$$

Принцип Лагранжа (4) позволяет интерпретировать потенциал U^{V_4} как 4D-плотность потенциальной энергии.

1.2. Необходимые условия обратимости термомеханических процессов.

Необходимые условия обратимости термомеханических процессов определяются условиями Коши-Римана путем исключения из (3) потенциала U^{V_4}

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_i}{\partial R_m}-\dfrac{\partial\sigma_m}{\partial R_i}=0\\ \dfrac{\partial\sigma_i}{\partial R_{m,n}}-\dfrac{\partial\sigma_{mn}}{\partial R_i}=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial R_m}-\dfrac{\partial\sigma_m}{\partial R_{i,j}}=0\\ \dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial R_{m,n}}-\dfrac{\partial\sigma_{mn}}{\partial R_{i,j}}=0\end{cases}\tag{5}$$

Перепишем (5) в виде, удобном для определения нелинейных тензоров модулей обратимых свойств второго E_{im}, третьего E_{imn}, $\overline{E}_{ijm}$ и четвертого рангов E_{ijmn}

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_i}{\partial R_m}=\dfrac{\partial\sigma_m}{\partial R_i}=E_{im}\\ \dfrac{\partial\sigma_i}{\partial R_{m,n}}=\dfrac{\partial\sigma_{mn}}{\partial R_i}=E_{imn}\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial R_m}=\dfrac{\partial\sigma_m}{\partial R_{i,j}}=\overline{E}_{ijm}\\ \dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial R_{m,n}}=\dfrac{\partial\sigma_{mn}}{\partial R_{i,j}}=E_{ijmn}\end{cases}\tag{6}$$

Исключая в (6) производные от силовых факторов, получим свойства симметрии нелинейных тензоров модулей обратимых свойств

$$\begin{cases} E_{im} = E_{mi} \\ E_{imn} = \overline{E}_{mni} \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{E}_{ijm} = E_{mij} \\ E_{ijmn} = E_{mnij} \end{cases} \tag{7}$$

Обратим внимание на то, что условия (7) приводят к тому, что из двух тензоров третьего (нечетного) ранга $E_{imn};\overline{E}_{imn}$ независимым остается только один E_{imn}.

В результате установлено, что тензор модулей упругости третьего ранга в общем случае не ограничен никакими условиями симметрии.

Необходимые условия обратимости термомеханических процессов (5)-(1) сводятся в результате к условиям симметрии тензоров модулей четного ранга

$$\begin{cases} E_{im} = E_{mi} \\ E_{ijmn} = E_{mnij} \end{cases} \tag{8}$$

С учетом трансверсальной изотропности пространства событий в соответствии с (1) тензорный базис для тензоров модулей обратимых свойств второго ранга состоит из двух тензоров δ^*_{im} и $N_i N_m$, а разложение в этом базисе тензора E_{im} имеет вид

$$E_{im} = E_1 \delta^*_{im} + E_2 \left(ic\right)^{-2} N_i N_m . \tag{9}$$

Разложение (9) тождественно удовлетворяет условиям симметрии (8). Тензорный базис для тензоров модулей обратимых свойств третьего ранга состоит из четырех тензоров, являющихся тензорным произведением 3D-тензора Кронекера и орта времени и трех ортов времени, а разложение в этом базисе тензора E_{imn} имеет вид

$$\begin{aligned} E_{imn} = {} & E_3 \left(ic\right) \delta^*_{im} N_n + E_4 \left(ic\right)^{-1} \delta^*_{mn} N_i + E_5 \left(ic\right)^{-1} \delta^*_{ni} N_m + \\ & + E_6 \left(ic\right)^{-1} N_i N_m N_n . \end{aligned} \tag{10}$$

Ещё раз отметим, что единственный тензор модулей обратимых свойств третьего ранга не должен удовлетворять никаким условиям симметрии.

Тензорный базис для тензоров модулей обратимых свойств четвертого ранга строится из десяти тензоров, являющихся тензорными произведениями двух 3D-тензоров Кронекера, одного 3D-тензора Кронекера и двух ортов времени и, наконец, тензорного произведения четырёх ортов времени. Разложение в этом базисе тензора E_{ijmn} имеет вид

$$\begin{aligned} E_{ijmn} = {} & E_7 \delta^*_{ij} \delta^*_{mn} + E_8 \delta^*_{im} \delta^*_{nj} + E_9 \delta^*_{in} \delta^*_{jm} + E_{10} \delta^*_{ij} N_m N_n + E_{11} \delta^*_{im} N_j N_n + \\ & + E_{12} \delta^*_{in} N_m N_j + E_{13} \delta^*_{jm} N_n N_i + E_{14} \delta^*_{jn} N_m N_i + E_{15} \delta^*_{mn} N_i N_j + \\ & + E_{16} N_i N_j N_m N_n . \end{aligned} \tag{11}$$

Условия симметрии (8) сокращают число модулей в тензоре (11) с десяти до восьми

$$\begin{cases} \left(E_{10} - E_{15}\right) = 0 \\ \left(E_{12} - E_{13}\right) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Тензор (11) приобретает вид

$$
\begin{aligned}
E_{ijmn} &= E_7\delta^*_{ij}\delta^*_{mn} + E_8\delta^*_{im}\delta^*_{nj} + E_9\delta^*_{in}\delta^*_{jm} + \\
&+\left(E_{10}+E_{15}\right)\left(\delta^*_{ij}N_mN_n + \delta^*_{mn}N_iN_j\right)\Big/2 + \\
&+\left(E_{12}+E_{13}\right)\left(\delta^*_{in}N_mN_j + \delta^*_{mj}N_iN_n\right)\Big/2 + \\
&+E_{11}\delta^*_{im}N_jN_n + E_{14}\delta^*_{jn}N_mN_i + E_{16}N_iN_jN_mN_n.
\end{aligned} \tag{13}
$$

1.3. Определяющие соотношения.

Рассмотрим соотношения (6). Их можно трактовать как общее решение однородной алгебраической системы (5) относительно производных от силовых факторов. Нетрудно проверить непосредственной подстановкой, что общее решение системы (6) будет иметь вид

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\sigma_i}{\partial R_m} = E_{im} \\
\dfrac{\partial\sigma_i}{\partial R_{m,n}} = E_{imn}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial R_m} = E_{mij} \\
\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial R_{m,n}} = E_{ijmn}
\end{cases} \tag{14}
$$

Представление (14) является дифференциальной формой определяющих уравнений для физически нелинейных сред, справедливых для обратимых процессов. Равенства (14) можно представить в виде, удобном для интегрирования в квадратурах

$$
\begin{cases}
d\sigma_i = \dfrac{\partial\sigma_i}{\partial R_m}dR_m + \dfrac{\partial\sigma_i}{\partial R_{m,n}}dR_{m,n} = E_{im}dR_m + E_{imn}dR_{m,n} \\
d\sigma_{ij} = \dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial R_m}dR_m + \dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial R_{m,n}}dR_{m,n} = E_{mij}dR_m + E_{ijmn}dR_{m,n}
\end{cases} \tag{15}
$$

При гипотезах линейности физических уравнений и ненапряженного начального состояния из (15) вытекают линейные уравнения закона Гука

$$
\begin{cases}
\sigma_i = E_{im}R_m + E_{imn}R_{m,n} \\
\sigma_{ij} = E_{mij}R_m + E_{ijmn}R_{m,n}
\end{cases} \tag{16}
$$

Запишем определяющие соотношения (16) в более подробном виде, учитывая структуру тензоров модулей упругости (9), (10), (13). Уравнения закона Гука для обобщенных внутренних сил σ_i в 4D-принимают вид

$$
\sigma_i = E_1r_i + E_3\dot{r}_i + E_5R_{,i} + \left(E_4r_{m,m} + E_2R + E_6\dot{R}\right)(ic)^{-1}N_i. \tag{17}
$$

Уравнения закона Гука для напряжений σ_{ij} в 4D записываются в следующей форме

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= E_3(ic)N_jr_i + E_4\delta^*_{ij}R + E_5(ic)^{-1}N_ir_j + E_6N_iN_jR + E_7\delta^*_{ij}r_{m,m} + \\
&+E_8r_{i,j} + E_9r_{j,i} + \left(E_{10}+E_{15}\right)\delta^*_{ij}\dot{R}\big/2 + \left(E_{10}+E_{15}\right)N_iN_jr_{m,m}\big/2 + \\
&+\left(E_{12}+E_{13}\right)(ic)N_jR_{,i}\big/2 + \left(E_{12}+E_{13}\right)(ic)^{-1}N_i\dot{r}_j\big/2 + \\
&+E_{11}(ic)^{-1}N_j\dot{r}_i + E_{14}(ic)N_iR_{,j} + E_{16}N_iN_j\dot{R}.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Исследуем физические свойства тензора напряжений в 4D (18), устанавливая соответствие компонент этого тензора с известными в механике твёрдого тела силовыми факторами. Пользуясь определением силовых факторов различной тензорной размерности в 3D, как физических величин, совершающих работу на соответствующих кинематических переменных, дадим определения 3D-тензора пространственных напряжений σ^*_{ab}, 3D-вектора импульса p_a, 3D-вектора теплового потока q_a, и 3D-скаляров давления p и температуры T

$$\begin{aligned}
&\sigma^*_{ab} = \sigma_{ij}\delta^*_{ia}\delta^*_{jb} = E_7\delta^*_{ab}r_{m,m} + E_8 r_{a,b} + E_9 r_{b,a} + \left(E_{10}+E_{15}\right)\delta^*_{ab}\dot{R}/2 + E_4\delta^*_{ab}R,\\
&p = \sigma_{ij}\delta^*_{ij}/3 = \left(E_7 + E_8/3 + E_9/3\right) r_{m,m} + \left(E_{10}+E_{15}\right)\dot{R}/2 + E_4 R,\\
&p_a = -\sigma_{ij}\delta^*_{ia}N_j/(ic) = -E_{11}(ic)^{-2}\dot{r}_a - E_3 r_a - \left(E_{12}+E_{13}\right)R_{,a}/2,\\
&q_a = \sigma_{ij}N_i\delta^*_{ja}(ic) = \left(E_{12}+E_{13}\right)\dot{r}_a/2 + E_5 r_a + E_{14}(ic)^2 R_{,a},\\
&T = \sigma_{ij}N_iN_j = \left(E_{10}+E_{15}\right) r_{m,m}/2 + E_{16}\dot{R} + E_6 R.
\end{aligned} \tag{19}$$

1.4. Идентификация параметров модели.

Идентификацию модулей обратимых свойств начнем с закона Гука для 3D-тензора-девиатора пространственных напряжений. Из уравнений (19) имеем

$$\tau^*_{ab} = \sigma^*_{ab}/2 + \sigma^*_{ba}/2 - \delta^*_{ab}\sigma^*_{kk}/3 = \left(E_8+E_9\right)\left(r_{a,b}/2 + r_{b,a}/2 - r_{k,k}\delta^*_{ab}/3\right). \tag{20}$$

Уравнения закона Гука для 3D-тензора-девиатора пространственных напряжений (20) полностью совпадает с классическими. Единственная комбинация модулей легко отождествляется с удвоенным модулем сдвига

$$E_8 + E_9 = 2\mu. \tag{21}$$

Уравнение закона Гука для антисимметричной части 3D-тензора касательных напряжений (см (19))

$$\left(\sigma^*_{ab} - \sigma^*_{ba}\right)/2 = \left(E_8 - E_9\right)\left(r_{a,b} - r_{b,a}\right)/2.$$

В соответствии с классической «гипотезой парности касательных напряжений» третий коэффициент Ламе должен быть равен нулю

$$\left(E_8 - E_9\right) = 2\chi = 0. \tag{22}$$

В совокупности с определением первых двух коэффициентов Ламе, гипотеза парности (22) дает

$$\begin{cases} E_7 = \lambda \\ E_8 = \mu \\ E_9 = \mu \end{cases} \tag{23}$$

Таким образом, определены три исходных модуля (23) через два коэффициента Ламе μ, λ и третий, неклассический коэффициент Ламе χ, который в силу гипотезы парности следует считать равным нулю.

Уравнение закона Гука для температуры содержит три исходных модуля обратимых свойств (19)

$$T = \left(E_{10}+E_{15}\right) r_{m,m}/2 + E_6 R + E_{16}\dot{R}. \tag{24}$$

Введем для двух линейных комбинаций исходных модулей следующие обозначения

$$\begin{cases} \left(E_{10}+E_{15}\right)/2 = -\dfrac{\left(K-K_T\right)}{K_T\alpha} \\ E_{16} = \tau E_6 \end{cases} \tag{25}$$

Уравнение закона Гука для температуры (24) с учетом (25) приобретает вид

$$T = -\frac{\left(K - K_T\right)}{K_T \alpha} r_{m,m} + E_6\left(R + \tau \dot{R}\right). \tag{26}$$

Из уравнения закона Гука для температуры (26) следует определение оператора температуры $t(...)$

$$t\left(R\right) = E_6\left(R + \tau \dot{R}\right) = T + \frac{\left(K - K_T\right)}{K_T \alpha} r_{m,m}. \tag{27}$$

Подействуем на уравнение закона Гука для теплового потока (19) оператором температуры (27)

$$\begin{gathered} q_a + \tau \dot{q}_a = -k_V \left[T + \frac{\left(K - K_T\right)}{K_T \alpha} r_{m,m} \right]_{,a} + \frac{\left(E_{12} + E_{13}\right)}{2} \tau \ddot{r}_a + \\ + \left[\frac{\left(E_{12} + E_{13}\right)}{2} + E_5 \tau \right] \dot{r}_a + E_5 r_a. \end{gathered} \tag{28}$$

Полученное уравнение является обобщением закона теплопроводности Максвелла-Каттанео. Оно построено как уравнение совместности, путем исключения из уравнений закона Гука для температуры и теплового потока термического потенциала R. Оно полностью совпадает с классическим законом Максвелла-Каттанео при справедливости «ослабленной гипотезы Фурье» – тепловой поток должен быть потенциальным векторным полем и не содержать вектор перемещений и его производные по времени. Иначе тепловой поток будет содержать вихревую составляющую, что противоречит экспериментальным данным о потенциальности теплового потока.

Уравнение для обобщенного закона теплопроводности Максвелла-Каттанео (28) содержит пять линейных комбинаций исходных модулей. Три модуля, в соответствии с классическими представлениями, выражаются через время релаксации теплового потока τ, коэффициент теплопроводности при постоянном объёме k_V, и комбинацию известных термомеханических параметров $\frac{\left(K - K_T\right)}{K_T \alpha}$, где K; K_T – соответственно адиабатический и изотермический модули объёмной деформации, α – коэффициент температурного расширения.

Ещё две комбинации исходных модулей можно принять равными нулю на основании «ослабленной гипотезы Фурье»

$$\begin{cases} \left(E_{12} + E_{13}\right)/2 = 0 \\ E_5 = 0 \end{cases} \tag{29}$$

Подействуем на уравнение закона Гука для давления (19) оператором температуры (27). Получим

$$\begin{gathered} p + \tau \dot{p} = \left[K + \frac{E_4}{E_6} \frac{\left(K - K_T\right)}{K_T \alpha} \right] r_{m,m} + \frac{E_4}{E_6} T + \frac{\left(E_{10} + E_{15}\right)}{2E_6} \dot{T} + \\ + \left[\frac{\left(E_{10} + E_{15}\right)}{2E_6} \frac{\left(K - K_T\right)}{K_T \alpha} + K\tau \right] \dot{r}_{m,m}. \end{gathered} \tag{30}$$

Примем «гипотезу Дюамеля-Неймана»

$$E_4 = -K_T \alpha E_6. \tag{31}$$

Соотношение (30) тогда полностью совпадет с классическим законом Дюамеля-Неймана в предельном случае затухания всех термомеханических переходных процессов, когда слагаемыми, содержащими производные по времени в (30), можно пренебречь по сравнению со слагаемыми, содержащими сами функции.

В результате, с учетом (25), (30), (31) получим

$$p+\tau\dot{p}=K_T\left(r_{m,m}-\alpha T\right)+\left[K\tau-\frac{\left(K-K_T\right)^2}{\left(K_T\alpha\right)^2}\right]\dot{r}_{m,m}-\frac{\left(K-K_T\right)}{\left(K_T\alpha\right)}\dot{T}. \tag{32}$$

Полученное обобщение закона Дюамеля-Неймана является уравнением совместности, являющееся результатом исключения из уравнений закона Гука (19) для температуры и давления термического потенциала.

Наконец, рассмотрим уравнение закона Гука (19) для импульса

$$p_a=-E_{11}\left(ic\right)^{-2}\dot{r}_a-E_3r_a-\frac{\left(E_{12}+E_{13}\right)}{2}R_{,a}. \tag{33}$$

Оно не должно противоречить классическому определению импульса. Поэтому из трех модулей, входящих в выражение для импульса, один будет определяться через плотность среды ρ, а оставшиеся две комбинации следует положить равными нулю

$$\begin{cases} E_{11}=\rho c^2 \\ E_3=0 \\ \left(E_{12}+E_{13}\right)/2=0 \end{cases} \tag{34}$$

В случае условий (34) уравнение закона Гука для импульса принимает классический вид

$$p_a=\rho\dot{r}_a. \tag{35}$$

Запишем уравнения движения. Из принципа возможных перемещений (2) с учетом (17), (19) и условий (23), (25),(29) следуют 4D-уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}-\sigma_i+P_i^{V_4}&=\left(2\mu+\lambda\right)r_{m,mi}+\mu\left(\Delta r_i-r_{m,mi}\right)-\rho\ddot{r}_i+E_1r_i-\\&-K_T\alpha E_6R_{,i}-\frac{\left(K-K_T\right)}{\left(K_T\alpha\right)}\dot{R}_{,i}+\\&+\left\{-k_VE_6\Delta R+\tau E_6\ddot{R}-E_2R-K_T\alpha E_6r_{m,m}-\frac{\left(K-K_T\right)}{K_T\alpha}\dot{r}_{m,m}\right\}\left(ic\right)^{-1}N_i+\\&+P_i^{V_4}=0.\end{aligned} \tag{36}$$

Полагая равными нулю жесткости винклеровских оснований $E_1=0,\ E_2=0$, найдем

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}-\sigma_i+P_i^{V_4}&=\left(2\mu+\lambda\right)r_{m,mi}+\mu\left(\Delta r_i-r_{m,mi}\right)-\rho\ddot{r}_{ii}\\&-K_T\alpha E_6R_{,i}-\frac{\left(K-K_T\right)}{\left(K_T\alpha\right)}\dot{R}_{,i}+\\&+\left\{-k_VE_6\Delta R+\tau E_6\ddot{R}-K_T\alpha E_6r_{m,m}-\frac{\left(K-K_T\right)}{K_T\alpha}\dot{r}_{m,m}\right\}\left(ic\right)^{-1}N_i+\\&+P_i^{V_4}=0.\end{aligned} \tag{37}$$

Разделим (37) на пространственную и временную части и учтем (37). Пространственная часть полученных равенств даст 3D-уравнения движения с учетом теплообмена

$$\begin{gathered}(2\mu+\lambda)r_{m,mk}+\mu\left(\Delta r_k-r_{m,mk}\right)-\rho\ddot{r}_k-K_T\alpha E_6 R_{,k}-\\ -\frac{(K-K_T)}{(K_T\alpha)}\dot{R}_{,k}+P_i^{V_4}\delta_{ik}^*=0.\end{gathered}\tag{38}$$

Уравнения движения в смешанной форме (в 3D-перемещениях и температуре) получим, действуя на уравнения движения (38) оператором температуры (27)

$$\begin{gathered}\left[(2\mu+\lambda_T)r_{m,mk}+\mu\left(\Delta r_k-r_{m,mk}\right)-\rho\ddot{r}_k+P_i^{V_4}\delta_{ik}^*-K_T\alpha T_{,k}\right]+\\ +\tau\left[(2\mu+\lambda)\dot{r}_{m,mk}+\mu\left(\Delta\dot{r}_k-\dot{r}_{m,mk}\right)-\rho\dddot{r}_k+\dot{P}_i^{V_4}\delta_{ik}^*\right]-\\ -\frac{(K-K_T)}{(K_T\alpha)E_6}\left[\dot{T}+\frac{(K-K_T)}{K_T\alpha}\dot{r}_{m,m}\right]_{,k}=0.\end{gathered}\tag{39}$$

Оставшуюся неопределенной константу E_6 формально выразим через другую константу l

$$E_6=\frac{k_V}{l^2}\frac{(2\mu+\lambda)}{(K_T\alpha)^2}.\tag{40}$$

В результате, с учетом (40) уравнения движения (39) приобретают вид

$$\begin{gathered}\left[(2\mu+\lambda_T)r_{m,mk}+\mu\left(\Delta r_k-r_{m,mk}\right)-\rho\ddot{r}_k+P_i^{V_4}\delta_{ik}^*-K_T\alpha T_{,k}\right]+\\ +\tau\left[(2\mu+\lambda)\dot{r}_{m,mk}+\mu\left(\Delta\dot{r}_k-\dot{r}_{m,mk}\right)-\rho\dddot{r}_k+\dot{P}_i^{V_4}\delta_{ik}^*\right]-\\ -\frac{l^2}{k_V}\frac{(K-K_T)}{(2\mu+\lambda)}\left[K_T\alpha\dot{T}+(K-K_T)\dot{r}_{m,m}\right]_{,k}=0.\end{gathered}\tag{41}$$

Временная часть уравнения (41) даст скалярное уравнение нестационарного баланса тепла

$$k_V\Delta R-\tau\ddot{R}+(K_T\alpha)r_{m,m}+\frac{(K-K_T)}{(K_T\alpha)E_6}\dot{r}_{m,m}-\left(P_i^{V_4}N_i\right)\frac{(ic)}{E_6}=0.\tag{42}$$

Уравнение нестационарного баланса тепла в смешанной форме (42) при действии на него оператором температуры (27), приобретает вид

$$\begin{gathered}-k_V\Delta T+\tau\ddot{T}-k_V\frac{(K-K_T)}{(K_T\alpha)}\Delta r_{m,m}-\\ -\left[\frac{\tau k_V}{l^2}\frac{(2\mu+\lambda)}{(K_T\alpha)}+\frac{(K-K_T)}{(K_T\alpha)}\right]\dot{r}_{m,m}-\frac{k_V}{l^2}\frac{(2\mu+\lambda)}{(K_T\alpha)}r_{m,m}+\\ +\left(P_i^{V_4}+\tau\dot{P}_i^{V_4}\right)(ic)N_i=0.\end{gathered}\tag{43}$$

Таким образом, дана идентификация всем модулям обратимых свойств в 4D-термомеханике обратимых процессов. Из четырнадцати исходных модулей семь выражены через известные физические константы материала $\mu,\ \lambda,\ \lambda_T,\ \alpha,\ \rho,\ k_V,\ \tau$, шесть $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_5,\ (E_8-E_9)/2,\ (E_{12}+E_{13})/2$ приняты равными нулю в силу сформулированных физически обоснованных гипотез и одна в силу определения (40), выражена через неклассическую физическую константу l, которая является характерной длиной масштабных эффектов в формулируемой здесь модели обратимой термомеханики

$$\begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \\ E_3 = 0 \\ E_4 = -K_T \alpha E_6 \\ E_5 = 0 \\ E_6 = \dfrac{1}{l^2} \dfrac{(2\mu+\lambda) k_V}{(K_T\alpha)^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_7 = \lambda \\ E_8 = E_9 = \mu \\ (E_{10} + E_{15})/2 = -(K - K_T)/(K_T \alpha) \\ E_{11} = \rho c^2 \\ (E_{12} + E_{13})/2 = 0 \\ E_{14} = k_V E_6 c^{-2} \\ E_{16} = \tau E_6 \end{cases} \tag{44}$$

С учетом равенств (44), система определяющих уравнений связной термомеханической проблемы принимают вид

$$\begin{cases} \sigma^*_{ab} = 2\mu\left(r_{a,b}/2 + r_{b,a}/2 - r_{m,m}\delta^*_{ab}/3\right) + \\ \qquad + \left[(2\mu/3 + \lambda) r_{m,m} - \dfrac{(K-K_T)}{(K_T\alpha)} \dot{R} - \dfrac{k_V}{l^2} \dfrac{(2\mu+\lambda)}{(K_T\alpha)} R \right] \delta^*_{ab} \\ p = (2\mu/3 + \lambda) r_{m,m} - \dfrac{(K-K_T)}{(K_T\alpha)} \dot{R} - \dfrac{k_V}{l^2} \dfrac{(2\mu+\lambda)}{(K_T\alpha)} R \\ p_a = \rho \dot{r}_a \\ q_a = -k_V \dfrac{k_V}{l^2} \dfrac{(2\mu+\lambda)}{(K_T\alpha)^2} R_{,a} \\ T = -\dfrac{(K-K_T)}{(K_T\alpha)} r_{m,m} + \dfrac{k_V}{l^2} \dfrac{(2\mu+\lambda)}{(K_T\alpha)^2} \left(R + \tau \dot{R}\right) \end{cases} \tag{45}$$

Уравнения движения и уравнения теплообмена для предложенной связной модели термомеханики определяются уравнениями (38) и (42), записанных в «перемещениях» и уравнениями (41) и (43) записанными в смешанной форме. Вид этих уравнений показывает наличие новых релаксационных эффектов, новых эффектов связности и эффектов масштаба, которые определяются особенностями процесса динамики деформирования, когда, например, адиабатический и изотермический модули объёмной деформации различны $K - K_T \neq 0$.

2. О ПОСТАНОВКЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим множество событий, определяющих состояние термоупругого тела в пространстве-времени. В некоторый момент времени оно занимает некоторый заданный 3D-объём, ограниченный замкнутой 2D-поверхностью. С точки зрения 4D-пространства такая ситуация по аналогии заменяется гиперплоскостью с нормалью, направленной параллельно орту времени, на которой определен замкнутый 2D-контур, соответствующий замкнутой поверхности в 3D. События, лежащие на гиперплоскости внутри замкнутого контура, относятся к событиям, происходящим внутри и на поверхности 3D-объёма. В разные моменты времени замкнутая поверхность и объём термоупругого тела мало отличаются друг от друга. Иначе, пространство событий, определяющее некоторый термомеханический процесс, является гиперцилиндром с образующей, параллельной орту времени, и направляющей, совпадающей с замкнутой 3D-поверхностью термоупругого тела (замкнутым 2D-контуром в 4D). По определению, орт нормали к гиперцилиндрической поверхности n_j ортогонален орту времени N_j и совпадает с ортом нормали к поверхности термоупругого тела.

На основании введенных понятий и определений, геометрия пространства событий описывается суммой трёх гиперповерхностей: гиперцилиндром и двумя «временными» плоскими донышками. Вариационный принцип в 4D для связной модели термомеханических процессов запишем в виде (2)

$$\int_{V_4}\left(\sigma_{ij,j}-\sigma_i+P_i^{V_4}\right)\delta R_i dV_4+\int_{F_4}\left(P_i^{F_4}-\sigma_{ij}n_j^4\right)\delta R_i dF_4=0. \tag{46}$$

где n_j^4 – орт 4D-нормали к замкнутой гиперповерхности, ограничивающей пространство событий. Напомним, что на донышках $n_j^4=\mp N_j$, а на гиперцилиндрической поверхности $n_j^4=n_j$, $\mathbf{n}=\{n_j\}$, $\mathbf{n}\perp\mathbf{N}$.

В каждой неособенной точке гиперповерхности существует четыре пары альтернативных граничных условий. Уточним физический смысл этих условий. Граничные условия на гиперцилиндрической поверхности при $n_j^4=n_j$ можно переписать, воспользовавшись разложением вектора 4D-перемещений на пространственную и временную части (46)

$$\begin{gathered}\int_{n_j^4 n_j=1}\left(P_i^{F_4}-\sigma_{ij}n_j^4\right)\delta R_i dF_4=\int_{n_j^4 n_j=1}\left[P_a^{F_4}-\left(\sigma_{ij}\delta_{ia}^*\delta_{jb}^*\right)n_b\right]\delta r_a dF_4+\\+\int_{n_j^4 n_j=1}\left[P_i^{F_4}N_i-\left(\sigma_{ij}N_i\delta_{jb}^*\right)n_b\right](ic)\,\delta R dF_4=0.\end{gathered} \tag{47}$$

В равенстве (47), первые три альтернативные пары граничных условий совпадают с классическими граничными условиями классической теории упругости: или задана компонента 3D-перемещений r_a, или в соответствии с (19), задана компонента результирующей внешних и внутренних сил $\int_{n_j^4 n_j=1}\left(P_a^{F_4}-\sigma_{ab}^*n_b\right)\delta r_a dF_4=0$. Четвертая альтернативная пара граничных условий позволяет записать граничные условия для уравнения баланса тепла в связанной постановке. В соответствии с последним слагаемым в (47) граничное условие задает или вариацию термического потенциала R, или тепловой поток q_b.

На временных донышках (при $n_j^4 N_j=\mp 1$) так же, как и на гиперцилиндрической поверхности, в каждой точке заданы четыре пары альтернативных граничных условий

$$\begin{gathered}\int_{n_j^4 N_j=\mp 1}\left(P_i^{F_4}\pm\sigma_{ij}N_j\right)\delta R_i dF_4=\int_{n_j^4 N_j=\mp 1}\left[P_a^{F_4}\pm\left(\sigma_{ij}\delta_{ia}^*N_j\right)\right]\delta r_a dF_4\mp\\\mp\int_{n_j^4 N_j=\mp 1}\left[P_i^{F_4}N_i-\left(\sigma_{ij}N_iN_j\right)\right](ic)\,\delta R dF_4=0.\end{gathered} \tag{48}$$

Первые три альтернативные пары граничных условий в (48) $\int_{n_j^4=N_j}\left(P_a^{F_4}-p_a\right)\delta r_a dF_4=0$ совпадают с классическими условиями теории упругости в начальный момент времени при $n_j^4 = -N_j$ и в конечный момент времени $n_j^4 = N_j$ (задана или компонента 3D-импульса, или вариация компоненты 3D-вектора перемещений r_a).

Четвертая пара альтернативных граничных условий определяется последним слагаемым в равенстве (48). В этом случае задано или начальное распределение поля температуры в 3D-объёме термоупругого тела T, или задан термический потенциал R. Таким образом, дан анализ спектра краевых задач для связанных задач обратимой термомеханики.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА СВЯЗАННОЙ ТЕРМОМЕХАНИКИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО СЛОЯ

Пусть 3D-вектор перемещений имеет единственную компоненту, определяющую продольные перемещения бесконечного слоя $r_i = r(x,t)X_i$. Полагаем, что термический потенциал также является функцией двух координат: $R = R(x,t)$. Уравнение движения (41) и уравнение баланса тепла (43) приобретают в этом случае вид

$$(2\mu+\lambda)r'' - \rho\ddot{r} - K_T\alpha E_6 R' - \frac{(K-K_T)}{(K_T\alpha)}\dot{R}' = 0, \tag{49}$$

$$-K_T\alpha r' - \frac{(K-K_T)}{K_T\alpha E_6}\dot{r}' - k_V R'' + \tau\ddot{R} = 0. \tag{50}$$

Введем потенциал φ для функций r, R так, чтобы однородное уравнение баланса тепла (50) тождественно удовлетворялось. Тогда разрешающим уравнением на потенциал станет уравнение движения (49)

$$\begin{gathered}\varphi'''' + \left[\frac{\rho}{(2\mu+\lambda)} + \frac{\tau}{k_V} - l^2\left(\frac{K-K_T}{(2\mu+\lambda)k_V}\right)^2\right]\ddot{\varphi}'' - \\ -\frac{\rho}{(2\mu+\lambda)}\frac{\tau}{k_V}\ddot{\ddot{\varphi}} - \frac{1}{l^2}\varphi'' - 2\frac{(K-K_T)}{(2\mu+\lambda)k_V}\dot{\varphi}'' = 0.\end{gathered} \tag{51}$$

где $r = L_{22}\varphi = -\dfrac{k_V}{(K_T\alpha)}\varphi'' + \dfrac{\tau}{(K_T\alpha)}\ddot{\varphi}, \quad R = -L_{21}\varphi = \varphi' + l^2\dfrac{(K-K_T)}{(2\mu+\lambda)k_V}\dot{\varphi}'.$

Будем искать решение (51) в виде суперпозиции «плоских волн»

$$\varphi = e^{kx+i\omega t}. \tag{52}$$

Подставляя (52) в (51), получим закон дисперсии для термомеханических волн

$$\begin{gathered}k^4 + \left\{\left[\frac{\rho}{(2\mu+\lambda)} + \frac{\tau}{k_V} - l^2\left(\frac{(K-K_T)}{(2\mu+\lambda)k_V}\right)^2\right]\omega^2 + 2i\frac{(K-K_T)}{(2\mu+\lambda)k_V}\omega + \frac{1}{l^2}\right\}k^2 - \\ -\frac{\rho}{(2\mu+\lambda)}\frac{\tau}{k_V}\omega^4 = 0.\end{gathered} \tag{53}$$

Из закона дисперсии (53) следует, что для каждого действительного значения круговой частоты при $K = K_T$ будут иметь место две пары комплексно-сопряженных корней для волновых чисел. Наличие у волновых чисел действительной части говорит о том, что «пространственные волны» могут иметь экспоненциальное затухание/возрастание по пространственным координатам. Решение с экспоненциальным затуханием по пространственным координатам можно интерпретировать как пространственно-локализованные термомеханические поля-псевдочастицы. Механическим полям соответствуют фононы, а температурные поля по аналогии можно назвать термонами. Общий случай $K \neq K_T$ соответствует учету диссипативных механических эффектов, может существенно изменять вид решений - ветвей дисперсионного уравнения, и придавать материалам свойства акустических материалов с отрицательным индексом [18].

4. ПОСТАНОВКА ДЛЯ ЯЧЕЙКИ ПЕРИОДИЧНОСТИ СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ

Будем рассматривать модель слоистой структуры в рамках биплоской 1D-постановки. Биплоская постановка соответствует тому, что из трех компонент перемещений ненулевой является только одна. Полагаем при этом, что направление перемещения совпадает с нормалью к пакету слоёв (с направлением оси OX). Такая постановка задачи предполагает, что искомая компонента перемещений является функцией этой пространственной координаты x и времени t. Соответственно, и четвертая компонента 4D-перемещения (термический потенциал) рассматривается как функция двух координат

$$\begin{aligned} r &= r(x,t) \\ R &= R(x,t) \end{aligned} \tag{54}$$

Ячейка периодичности слоистой структуры определяется как трехслойная, где центральный слой является первой фазой, а обкладки – половинками слоя второй фазы.

Соотношениями (54) дается кинематическая модель.

Уравнения закона Гука для каждой из фаз являются следствием определяющих уравнений связной модели (4) и с учетом (54) записываются в виде

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{*} = (2\mu+\lambda)r' - \dfrac{(K-K_T)}{(K_T\alpha)}\dot{R} - \dfrac{k_V}{l^2}\dfrac{(2\mu+\lambda)}{(K_T\alpha)}R \\ p = (2\mu/3+\lambda)r' - \dfrac{(K-K_T)}{(K_T\alpha)}\dot{R} - \dfrac{k_V}{l^2}\dfrac{(2\mu+\lambda)}{(K_T\alpha)}R \\ p_x = \rho\dot{r} \\ q_x = -k_V\dfrac{k_V}{l^2}\dfrac{(2\mu+\lambda)}{(K_T\alpha)^2}R' \\ T = -\dfrac{(K-K_T)}{(K_T\alpha)}r' + \dfrac{k_V}{l^2}\dfrac{(2\mu+\lambda)}{(K_T\alpha)^2}\left(R+\tau\dot{R}\right) \end{cases} \tag{55}$$

Уравнение движения с учетом теплообмена и уравнение нестационарного баланса тепла для каждой из фаз можно получить с учетом равенств (54), (55) из уравнений (37) (см. также (41), (42))

$$\left(2\mu+\lambda\right)r''-\rho\ddot{r}-K_T\alpha E_6 R'-\frac{\left(K-K_T\right)}{\left(K_T\alpha\right)}\dot{R}'=0,$$

$$k_V R''-\tau\ddot{R}+\left(K_T\alpha\right)r'+\frac{\left(K-K_T\right)}{\left(K_T\alpha\right)E_6}\dot{r}'=0.$$

Механическая контактная задача между фазами сводится к условиям непрерывности перемещений и напряжений

$$\begin{cases}\left[r\right]=0\\ \left[\sigma_x\right]=0\end{cases} \tag{56}$$

Соответственно термодинамическая контактная задача между фазами сводится к условиям непрерывности на границе контакта для термического потенциала и теплового потока

$$\begin{cases}\left[R\right]=0\\ \left[q_x\right]=0\end{cases} \tag{57}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В заключение сформулируем некоторые, далеко не тривиальные, особенности постановки сформулированных краевых контактных задач, характерных для слоистых и в общем случае неоднородных составных структур, следующих из вариационной модели (47), (48):

– в соответствии с (56) и (57) контактная термомеханическая задача определяет поля перемещения, термического потенциала, напряжения и теплового потока непрерывными во всем объёме слоистой структуры;

– поле импульса и поле температуры могут терять непрерывность;

– на гиперцилиндрической поверхности производные по времени от перемещения и термического потенциала определены и, значит, в силу уравнений закона Гука для импульса и температуры (55) эти поля также непрерывны.

В отношении переходных временных процессов, предлагаемая вариационная постановка требует формулировки условий в виде двух пар альтернативных условий в начальный и конечный моменты изучаемого процесса. Первая пара: требует задания в слоистом (составном) теле начального (и соответственно конечного по времени) поля перемещений, или начального непрерывного поля импульса. Вторая пара временных условий требует формулировки в слоистом теле начального (и конечного в конце временного интервала) поля термического потенциала, или как альтернатива непрерывного поля температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Joseph D.D., Preziosi L. *Heat waves* // Rev. Mod. Phys. – 1989. – Vol.61. – Pp.41-73.
2. Lepri S., Livi R., Politi A. *Thermal conduction in classical low dimensional lattices* // Phys.Rep. – 2003. – Vol.377. – 80.
3. Dhar A. *Heat transport in low-dimensional systems* // Adv. Phys. – 2008. – Vol.57. – 457.

4. Zhang G., Li B.W. *Impacts of doping on thermal and thermoelectric properties of nanomaterials* // NanoScale – 2010. – Vol.2. – Pp.1058-1068.
5. Cattaneo C. *Sur Une Forme De Lequation De La Chaleur Eliminant Le Paradoxe Dune Propagation Instantanee* // Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences. – 1958. – Vol.2. – No.4. – Pp.431-433.
6. Moran W., Bin-Yang C., Zeng-Yuan G. *General heat conduction equations based on the thermomass theory* // Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT). – 2010. – Vol.1. – 013004.
7. Соболев С.Л. *Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах* // Усп. физ. наук. – 1991. – Т.4. – №3. – С.5-29.
8. Sobolev S.L. *Rapid phase transformation under local non-equilibrium diffusion conditions* // Materials Science and Technology. – 2015. – Vol.31. – No.13. – Pp.1607-1617.
9. Лурье С.А., Белов П.А., Яновский Ю.Г. *О моделировании теплопереноса в динамически деформируемых средах* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т.6. – №3. – С.436-444.
10. Белов П.А., Горшков А.Г., Лурье С.А. *Вариационная модель неголономных 4D сред* // Изв. РАН. МТТ. – 2006. – Т.41. – №6. – С.29-46.
11. Lurie S.A., Belov P.A. *On the nature of the relaxation time, the Maxwell-Cattaneo and Fourier law in the thermodynamics of a continuous medium, and the scale effects in thermal conductivity* // Continuum Mech. Thermodyn. – 2020. – Vol.32. – Pp.709-728. DOI: 10.1007/s00161-018-0718-7.
12. Lomakin E.V., Lurie S.A., Belov P.A., Rabinskiy L.N. *On the generalized heat conduction laws in the reversible thermodynamics of a continuous medium* // Doklady Physics. – 2018. – Vol.6. – No.12. – Pp.503-507.
13. Belov P.A., Lurie S.A. *On Variation Models of the Irreversible Processes in Mechanics of Solids and Generalized Hydrodynamics* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol.40. – No.7. – Pp.896-910.
14. Belov P.A., Lurie S.A., Dobryanskiy V.N. *Variational Formulation of Linear Equations of Coupled Thermohydrodynamics and Heat Conductivity* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol.41. – No.10. – Pp.1949-1963. DOI: 10.1134/S1995080220100042.
15. Gusev A., Lurie S. *Wave-relaxation duality of heat propagation in Fermi-Pasta-Ulam chains* // Modern Physics Letters B. – 2012. – Vol.26. – No.16. – 1250145.
16. Sedov L.I., Èglit M.È. *Construction of nonholonomic models of continuous media with allowance for the finite nature of deformations and certain physico-chemical effects* // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1962. – Vol.142. – No.1. – Pp.54-57.
17. Sedov L.I. *Mathematical methods for constructing new models of continuous media* // Russian Mathematical Surveys – 1965. – Vol.20. – No.5. – Pp.123-182.
18. Qiangbing Lu, Xin Li, Xiujuan Zhang, Minghui Lu, Yanfeng Chen. *Perspective: Acoustic Metamaterials in Future Engineering* // Engineering. – 2022. – Vol.17. – Pp.22-30. DOI: 10.1016/j.eng.2022.04.020.

REFERENCES

1. Joseph D.D., Preziosi L. *Heat waves*. Rev. Mod. Phys., 1989, Vol.61, Pp.41-73.
2. Lepri S., Livi R., Politi A. *Thermal conduction in classical low dimensional lattices.* Phys.Rep., 2003, Vol.377, 80.
3. Dhar A. *Heat transport in low-dimensional systems*. Adv. Phys., 2008, Vol.57, 457.

4. Zhang G., Li B.W. *Impacts of doping on thermal and thermoelectric properties of nanomaterials*. NanoScale, 2010, Vol.2, Pp.1058-1068.
5. Cattaneo C. *Sur Une Forme De Lequation De La Chaleur Eliminant Le Paradoxe Dune Propagation Instantanee*. Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences, 1958, Vol.2, No.4, Pp.431-433.
6. Moran W., Bin-Yang C., Zeng-Yuan G. *General heat conduction equations based on the thermomass theory*. Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT), 2010, Vol.1, 013004.
7. Sobolev S.L. *Transport Processes and Traveling Waves in Systems with Local Nonequilibrium*. Usp. Phyz. Nauk, 1991, Vol.161, No.3, Pp.5-29.
8. Sobolev S.L. *Rapid phase transformation under local non-equilibrium diffusion conditions*. Materials Science and Technology, 2015, Vol.31, No.13, Pp.1607-1617.
9. Lurie S.A., Belov P.A., Yanovskii Yu.G. *O modelirovanii teploperenosa v dinamicheski deformiruemykh sredakh [On modeling of heat transfer in dynamical deformed media]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2000, Vol.6, No.3, Pp.436-444.
10. Belov P.A., Gorshkov A.G., Lurie S.A. *Variatsionnaya model’ negolonomnykh 4D sred [Variational Model of Nonholonomic 4D-Media]*. Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela, 2006, No.6, Pp.29-46.
11. Lurie S.A., Belov P.A. *On the nature of the relaxation time, the Maxwell–Cattaneo and Fourier law in the thermodynamics of a continuous medium, and the scale effects in thermal conductivity*. Continuum Mech. Thermodyn., 2020, Vol.32, Pp.709-728. DOI: 10.1007/s00161-018-0718-7.
12. Lomakin E.V., Lurie S.A., Belov P.A., Rabinskiy L.N. *On the generalized heat conduction laws in the reversible thermodynamics of a continuous medium*. Doklady Physics, 2018, Vol.6, No.12, Pp.503-507.
13. Belov P.A., Lurie S.A. *On Variation Models of the Irreversible Processes in Mechanics of Solids and Generalized Hydrodynamics*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, Vol.40, No.7, Pp.896-910.
14. Belov P.A., Lurie S.A., Dobryanskiy V.N. *Variational Formulation of Linear Equations of Coupled Thermohydrodynamics and Heat Conductivity*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol.41, No.10, Pp.1949-1963. DOI: 10.1134/S1995080220100042.
15. Gusev A., Lurie S. *Wave-relaxation duality of heat propagation in Fermi-Pasta-Ulam chains*. Modern Physics Letters B, 2012, Vol.26, No.16, 1250145.
16. Sedov L.I., Ѐglit M.Ѐ. *Construction of nonholonomic models of continuous media with allowance for the finite nature of deformations and certain physico-chemical effects*. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1962, Vol.142, No.1, Pp.54-57.
17. Sedov L.I. *Mathematical methods for constructing new models of continuous media*. Russian Mathematical Surveys, 1965, Vol.20, No.5, Pp.123-182.
18. Qiangbing Lu, Xin Li, Xiujuan Zhang, Minghui Lu, Yanfeng Chen. *Perspective: Acoustic Metamaterials in Future Engineering*. Engineering, 2022, Vol.17, Pp.22-30. DOI: 10.1016/j.eng.2022.04.020.

Поступила в редакцию 29 января 2024 года.

Сведения об авторах:

Белов Петр Анатольевич – д.ф.-м.н, в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: belovpa@yandex.ru

Лурье Сергей Альбертович – д.т.н., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: salurie@mail.ru