



ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЙ ТЕРМОСИЛОВОЙ ИЗГИБ ПОГОННОЙ НАГРУЗКОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ*

Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В.

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Беларусь

АННОТАЦИЯ

Исследован изгиб трехслойной пластины при прямом и повторном знакопеременном нагружении круговой погонной нагрузкой. Физические уравнения состояния для материалов тонких внешних несущих слоев, учитывают возникающие малые упругопластические деформации. Материал более толстого жесткого заполнителя нелинейно упругий. Предполагается, что деформирование несимметричной по толщине пластины подчиняется гипотезам Кирхгофа в несущих слоях и гипотезе Тимошенко в заполнителе. Это приводит к линейному распределению радиальных перемещений по толщине слоев. Пластина подвержена воздействию теплового потока, падающего перпендикулярно ее верхнему слою. Торец пластины и наружная поверхность нижнего несущего слоя теплоизолированы. Для расчета температурного поля используется формула, полученная методом усреднения теплофизических характеристик по толщине пакета. Учтено влияние температуры на модули упругости и функции пластичности и физической нелинейности материалов.

Постановка краевой задачи проведена вариационными методами. Получена соответствующая система уравнений равновесия и силовые граничные условия для рассматриваемой трехслойной пластины. В заполнителе принята во внимание работа тангенциальных напряжений. Сформулированы кинематические граничные условия и использована ограниченность решения в центре пластины. При построении решения задачи об изгибе соответствующей упругой пластины погонной нагрузкой использовано известное решение в случае равномерно распределенной кольцевой нагрузки. Применен предельный переход при толщине кольца нагрузки, стремящегося к нулю.

Решение краевой задачи о нагружении упругопластической пластины из естественного состояния проведено методом упругих решений Ильюшина. Аналитическое итерационное решение выписано в функциях Бесселя. При повторном знакопеременном нагружении использована теория переменного нагружения Москвитина. В несущих слоях учтено циклическое упрочнение материала. Проведен численный анализ полученных аналитических решений, исследована зависимость перемещений от физически нелинейных свойств материалов слоев, температуры, граничных условий.

Ключевые слова: трехслойная круглая пластина; малые упругопластические деформации; циклическая нагрузка; температура; численный анализ

ALTERNATING THERMAL FORCE BENDING BY LINEAR LOAD OF A THREE-LAYER ROUND PLATE

Starovoitov E.I., Leonenko D.V.

* Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект №T22УЗБ-015).

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

ABSTRACT

The bending of a three-layer plate under direct and repeated alternating loading with a circular linear load is investigated. The physical equations of state for materials of thin outer bearing layers take into account the small elastic-plastic deformations that occur. The material of the thicker rigid filler is non-linearly elastic. It is assumed that the deformation of the plate, which is asymmetric in thickness, obeys the Kirchhoff hypotheses in the bearing layers and the Timoshenko hypothesis in the filler. This leads to a linear distribution of radial displacements over the thickness of the layers. The plate is exposed to the heat flow falling perpendicular to its upper layer. The end face of the plate and the outer surface of the lower bearing layer are thermally insulated. To calculate the temperature field, the formula obtained by averaging the thermophysical characteristics over the thickness of the package is used. The influence of temperature on the elastic modulus and the functions of plasticity and physical nonlinearity of materials is taken into account.

The formulation of the boundary value problem was carried out by variational methods. The corresponding system of equilibrium equations and force boundary conditions for the three-layer plate under consideration are obtained. The filler takes into account the operation of tangential stresses. Kinematic boundary conditions are formulated and the boundedness of the solution in the center of the plate is used. When constructing a solution to the problem of bending the corresponding elastic plate with a linear load, a well-known solution was used in the case of a uniformly distributed annular load. The limiting transition is applied with the thickness of the load ring tending to zero.

The solution of the boundary value problem of loading an elastoplastic plate from a natural state was carried out by the Ilyushin's elastic solutions method. The analytical iterative solution is written out in Bessel functions. In case of repeated alternating loading, Moskvitin's theory of alternating loading was used. Cyclic hardening of the material is taken into account in the bearing layers. The numerical analysis of the obtained analytical solutions is carried out, the dependence of the displacements on the physically nonlinear properties of the layer materials, temperature, and boundary conditions is investigated.

Keywords: three-layer round plate; small elastic-plastic deformations; cyclic load; temperature; numerical analysis

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность разработки новых математических моделей для исследования упругого и неупругого деформирования композитных стержней, пластин и оболочек при термосиловых нагрузках, определяется их повсеместным распространением в машиностроении, строительстве и транспортировке энергоносителей. Физические уравнения состояния основываются на теории малых упругопластических деформаций [1]. При знакопеременных нагрузках упругопластических элементов конструкций применяется теория Москвитина [2-4], учитывающая эффект Баушингера [5] и позволяющая сводить краевую задачу при знакопеременном нагружении к первоначальной задаче о прямом нагружении из естественного состояния.

О необходимости учета эффекта Баушингера, заключающегося в изменении механических свойств металлов после пластического деформирования, в микролегированных сталях и других металлах говорится в работах [6-10]. Результаты экспериментального исследования этого эффекта в анизотропных металлах приведены в [11]. Количественные оценки даны в статьях [12,13].

Монографии [14-19] посвящены разработке математических моделей деформирования слоистых упругих и неупругих элементов конструкций при квазистатических и динамических нагрузках. Приведены постановки соответствующих задач, рассмотрены примеры решения и их численная апробация.

Работа [20] посвящена анализу колебаний трехслойных пластин по уточненной теории. Статья [21] содержит результаты исследования сверхзвуковых характеристик флаттера многослойных композитных пластин. Деформирование балки Тимошенко, цилиндрической и сферической оболочек при нестационарном нагружении проведено в [22-24]. Несущая способность трехслойной композитной пластины с отверстием изучена в [25]. Статьи [26-30] посвящены исследованию квазистатического нелинейного деформирования трехслойных и многослойных балок, пластин и оболочек. В публикациях [31-33] рассмотрено деформирование трехслойных стержней и функционально-градиентных пластин под действием термосиловых нагрузок. Изгиб трехслойной круговой пластины, связанной с двухпараметрическим упругим основанием, исследован в [34].

Знакопеременное нагружение трехслойной пластины с упругопластическими слоями под действием кольцевой нагрузки исследовано в [35]. Аналитическое решение краевой задачи получено в итерациях с помощью метода упругих решений. Основываясь на этом решении, здесь построено новое решение задачи о переменном изгибе погонной нагрузкой в температурном поле, учитывающее влияние предыдущего пластического деформирования на предел текучести материала.

1. НАГРУЖЕНИЕ ИЗ ЕСТЕСТВЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Пусть трехслойная несимметричная по толщине круглая пластина (рис.1), нагружена погонной нагрузкой интенсивностью Q_0 действующей вдоль окружности относительного радиуса $a \leq 1$

$$q = Q_0 \delta(a - r), \quad (1)$$

где $\delta(r)$ – функция Дирака.

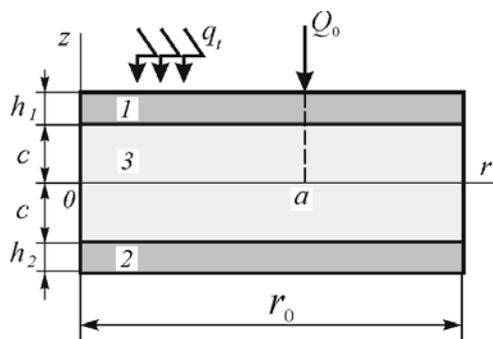


Рис.1. Нагружение трехслойной пластины погонной нагрузкой.

Все линейные перемещения, размеры пластины и радиальная координата отнесены к радиусу r_0 . При постановке задачи используется цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью заполнителя, перпендикулярно которой ось z направлена вверх. Для несущих внешних

достаточно тонких слоев, толщины которых $h_1 \neq h_2$, принимаются кинематические гипотезы Кирхгофа о прямолинейности, перпендикулярности и несжимаемости деформированной нормали. В относительно толстом жестком заполнителе, толщиной $h_3 = 2c$, деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$, т.е. справедлива гипотеза Тимошенко.

Пусть интенсивность теплового потока, падающего на внешнюю поверхность пластины – q_t . При решении задачи теплопроводности предполагалось, что нижняя поверхность $z = -c - h_2$ и контур $r = 1$ теплоизолированы. Тогда температурное поле $T(z)$ определяется с достаточной степенью точности по формуле, приведенной в [14].

Нагрузка принята осесимметричной, поэтому окружные перемещения отсутствуют $u_\phi^{(k)} = 0$, а искомые перемещения – радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя u , относительный сдвиг ψ и прогиб пластины w зависят только от радиальной координаты и не зависят от ϕ . Предполагается, что жесткая диафрагма на контуре препятствует относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = 1$).

Радиальные перемещения, в силу принятых гипотез, изменяются по толщине слоев линейно и выражаются через искомые перемещения известными формулами [36]

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, & c \leq z \leq c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, & -c \leq z \leq c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, & -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \tag{2}$$

где запятая в индексе обозначает производную по следующей за ней координате.

Используя напряжения в слоях $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \phi$), $\sigma_{rz}^{(3)}$, вводятся обобщенные внутренние силы и моменты [36]

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, & M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), & Q &= \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz. \end{aligned} \tag{3}$$

Деформации следуют из соотношений Коши [14] и перемещения (2). Напряжения вычисляются через деформации с помощью соотношений теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [1]

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k \left(1 - \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)}, T \right) \right) \vartheta_\alpha^{(k)}, & \sigma^{(k)} &= 3K_k \left(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T^{(k)} \right), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3 \left(1 - \omega_3 \left(\varepsilon_u^{(3)}, T \right) \right) \vartheta_{rz}^{(3)} & (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \phi), \end{aligned} \tag{4}$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\vartheta_\alpha^{(k)}$, $s_{rz}^{(3)}$, $\vartheta_{rz}^{(3)}$ – компоненты девиаторов и $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T)$, $K_k(T)$ – модули сдвига и объемного деформирования; α_{0k} – коэффициент линейного температурного удлинения.

Входящие в (4) функции пластичности $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)$ в несущих слоях зависят от интенсивности деформаций $\varepsilon_u^{(k)}$ и температуры. В соответствии с условием появления пластических деформаций Мизеса, при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует $\omega_k = 0$, где $\varepsilon_y^{(k)}(T)$ – предел текучести. Подобным образом для функции нелинейности материала заполнителя предполагается, что $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}) = 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$, где $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел нелинейности. Аналитический вид этих функций принимается следующий

$$\omega_k(\varepsilon_u^k, T_0) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_{y0}^{(k)}, \\ A_k \left(1 - \frac{\varepsilon_{y0}^{(k)}}{\varepsilon_u^k}\right)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_{y0}^{(k)}. \end{cases} \quad (5)$$

Например, для фторопласта-4 $A_3 = 0,905$, $\alpha_3 = 1,48$, $\varepsilon_s = 3,3\%$; для сплава Д16-Т $A_1 = 0,96$; $\alpha_1 = 2,34$; $\varepsilon_{y0}(T_0) = 0,735\%$ [14].

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины получены вариационным методом Лагранжа с учетом работы касательных напряжений в заполнителе. При кольцевой нагрузке они приведены в [36]. В случае нагрузки (1) принимают вид

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= -p + p_\omega, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2c G_3 \psi &= h_\omega, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= -Q_0 \delta(a - r) + q_\omega, \end{aligned} \quad (6)$$

где a_i – коэффициенты, определяемые через модули упругости материалов и толщины слоев при температуре T [36]; L_2, L_3 – дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Нелинейные составляющие напряжений сгруппированы в правых частях системы (6) и входят в слагаемые с индексом « ω »

$$\begin{aligned} p_\omega &= T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}) - Q_\omega, \\ q_\omega &= M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}), \end{aligned} \quad (7)$$

где величины $T_{\alpha\omega}^{(k)}, M_{\alpha\omega}^{(k)}, H_{\alpha\omega}^{(k)}, Q_\omega$ ($\alpha = r, \varphi$) вычисляются по формулам (3), в которых следует напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ заменить их нелинейными составляющими $\sigma_{\alpha\omega}^{(k)}$

$$\sigma_{\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T) \varepsilon_\alpha^{(k)} + 3K_k \alpha_k T^{(k)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T) \varepsilon_{rz}^{(3)},$$

например,

$$M_{\alpha\omega} = 2 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega_k \varepsilon_\alpha^{(k)} z dz + \sum_{k=1}^3 3K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} z dz.$$

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (6) необходимо применять приближенные или численные методы решений. Здесь воспользуемся методом упругих решений Ильюшина, в соответствии с которым система (6) переписывается в следующем итерационном виде

$$\begin{aligned} L_2 \left(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w_{,r}^{(n)} \right) &= p_{\omega}^{(n-1)}, \\ L_2 \left(a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)} \right) - 2cG_3 \psi^{(n)} &= h_{\omega}^{(n-1)}, \\ L_3 \left(a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)} \right) &= -Q_0 \delta(a-r) + q_{\omega}^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Величины $p_{\omega}^{(n-1)}$, $h_{\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$ в правых частях уравнений (8) служат поправками на нелинейность материалов слоев. Их называют дополнительными «внешними» нагрузками. На первом шаге приближения ($n=1$) их принимают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения, используя формулы, подобные (7), добавляя вверху индекс « $n-1$ ». Например, для дополнительных моментов имеем

$$M_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k^{n-1} \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)} z dz + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} z dz. \quad (9)$$

Для замыкания краевой задачи к уравнениям (8) необходимо добавить условия ограниченности решения в центре пластины и граничные условия, например, при шарнирном опирании

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = 0, \quad M_r^{(n)} = M_{r\omega}^{(n-1)} \quad \text{при } r=1 \quad (10)$$

Полученная краевая задача на каждом шаге итерации является линейной. Решение подобной системы уравнений при упругом деформировании пластины ($n=1$) погонной нагрузкой известно [14]. По аналогии выписываем решение, включающее дополнительные «внешние» нагрузки, которое является рекуррентным в задаче о деформировании трехслойной упругопластической пластины

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \\ &+ \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta} H_0(a-r) \left(\frac{1}{\beta r} - K_1(\beta r) I_0(\beta a) - I_1(\beta r) K_0(\beta a) \right) + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2 r} - \\ &- K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_{\omega}^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_{\omega}^{(n-1)} r dr \right] - \right. \\ &- \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_{\omega}^{(n-1)} r dr \right) dr \left. \right] + \\ &+ I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_{\omega}^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_{\omega}^{(n-1)} r dr \right] - \right. \\ &- \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_{\omega}^{(n-1)} r dr \right) dr \left. \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(n)} &= \frac{a_3}{a_1 a_6 - a_3^2} \left[\frac{Q_0 a}{4} \left(r^2 - a^2 - a^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) - r^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right) H_0(a-r) - \right. \\
&\quad \left. - L_3^{-1} \left(q_\omega^{(n-1)} \right) + \frac{a_6}{a_3} L_2^{-1} \left(p_\omega^{(n-1)} \right) + \left(a_5 - \frac{a_2 a_6}{a_3} \right) \Psi^{(n)} + C_7^{(n)} r + \frac{C_8}{r} \right], \\
w^{(n)} &= \frac{1}{b_3} \left[\int \left(\frac{a_3}{a_1} L_2^{-1} \left(p_\omega^{(n-1)} \right) + \frac{Q_0 a}{4} \left(r^2 - a^2 - a^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - r^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right) H_0(a-r) \right) dr - \int L_3^{-1} \left(q_\omega^{(n-1)} \right) dr + b_2 \left(\frac{C_2^{(n)}}{\beta} I_0(\beta r) + \int \Psi_r^{(n)} dr \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)} r^2}{4} \right] + C_6 \ln r + C_4^{(n)}
\end{aligned} \tag{11}$$

где $I_1(\beta r)$, $K_1(\beta r)$ – функции Бесселя (модифицированная) и Макдональда; C_1, C_2, \dots, C_8 – константы интегрирования; L_2^{-1} , L_3^{-1} – интегральные операторы

$$\begin{aligned}
L_2^{-1}(f) &\equiv \frac{1}{r} \int r \int f(r) dr dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f(r) dr dr dr; \\
\beta^2 &= \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}, \quad b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1};
\end{aligned}$$

интеграл от частного решения $\Psi_r^{(n)}$

$$\begin{aligned}
\int \Psi_r^{(n)} dr &= \frac{C_2^{(n)} I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3^{(n)} K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta^2} H_0(a-r) \times \\
&\quad \times \left(\ln \left(\frac{r}{a} \right) + I_0(\beta a) K_0(\beta r) - K_0(\beta a) I_0(\beta r) \right) - \\
&\quad - \int \left(K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right) + \\
&\quad + I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \\
&\quad \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right] dr.
\end{aligned}$$

Константы интегрирования следуют из требования ограниченности решения в начале координат и граничных условий на контуре (10)

$$\begin{aligned}
C_1^{(n)} &= -Q_0 a, \\
C_2^{(n)} &= -\frac{1}{I_1(\beta)} \left(C_3^{(n)} K_1(\beta) + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2} \right) - \frac{1}{I_1(\beta)} \times \\
&\quad \times \left(-K_1(\beta) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) dr \Big|_{r=1} + \\
 & + I_1(\beta) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r \, dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r \, dr \right] - \right. \\
 & \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) dr \Big|_{r=1} \right), \\
 C_3^{(n)} &= \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta} I_0(\beta a) - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \int q_\omega^{(n-1)} r \, dr \, dr \Big|_{r=0} + \\
 & + \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left(\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r \, dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) \right], \\
 C_4^{(n)} &= -\frac{C_1^{(n)}}{4b_3} - \frac{C_5^{(n)}}{4b_3} - \\
 & - \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)} \, dr \Big|_{r=1} - \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \, dr \Big|_{r=1} + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \, dr \Big|_{r=1}, \\
 C_5^{(n)} &= 2 \frac{a_7 a_1 + a_3^2}{a_1 (a_6 + a_7)} L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} - \frac{2a_3}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} + \\
 & + \frac{b_3}{a_6 + a_7} 2 \left(L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \right)_{,r} \Big|_{r=1} - \frac{2b_3}{a_6 + a_7} \left(3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z \, dz + M_r^{(n-1)} \right) + \\
 & + \left(b_3 - a_7 - \frac{a_3^2}{a_1} \right) \frac{b_3}{a_6 + a_7} \left(\frac{C_1^{(n)}}{2b_3} + 2C_6^{(n)} \right), \\
 C_6^{(n)} &= -\frac{Q_0 a^3}{4b_3}, \\
 C_7^{(n)} &= -2 \frac{a_6}{b_3 a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} + 2 \frac{a_3}{b_3 a_1} L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} - \\
 & - \frac{a_3}{2b_3 a_1} C_1^{(n)} - 2 \frac{a_3}{a_1} C_6^{(n)} - \frac{a_3}{a_1 b_3} C_5^{(n)}, \\
 C_8^{(n)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, на первом полуцикле нагружения упругопластической трехслойной пластины погонной силовой нагрузкой прогиб $w^{(n)}(r)$, радиальное перемещение $u^{(n)}(r)$ и сдвиг в заполнителе $\psi^{(n)}(r)$ вычисляются по формулам (11)-(12). Температура входит в решение через константы интегрирования C_5, C_7 .

Следует отметить, что сходимость метода упругих решений доказана в достаточно широких пределах [3], а для материалов Д16-Т, фторопласт-4, используемых в дальнейшем, подтверждена в работе [14].

Численные результаты получены для пластины, слои которой выполнены из материалов Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т. Интенсивность силовой погонной нагрузки принята $Q_0 = 4$ МН/м, толщины слоев – $h_1 = 0,02$; $h_2 = 0,06$; $h_3 = 0,4$. Параметры упругости и нелинейности, входящие в функцию пластичности (5),

заимствованы из [14]. Температуры при расчетах усреднялись по толщине пластины. Для описания зависимости параметров упругости от температуры использовалась формула Белла [36]. Результаты продемонстрировали достаточно быструю сходимость итерационного метода, уже 5-е приближение отличалось от 4-го менее чем 0,5%.

На рис.2а,б приведены графики изменение сдвига и прогиба вдоль радиуса пластины при силовой окружности радиуса $a=0,75$: 1, 2 – упругие и упругопластические при комнатной температуре ($T_1 = 293$ К); 3, 4 – упругие и упругопластические при $T_2 = 323$ К. Учет пластичности и физической нелинейности материалов слоев приводит к увеличению расчетных упругих перемещений примерно на 17%. Повышение температуры на 30° вызывает их дополнительный рост на 24%. При продвижении силовой окружности вдоль радиуса экстремумы относительного сдвига смещаются к контуру пластины.

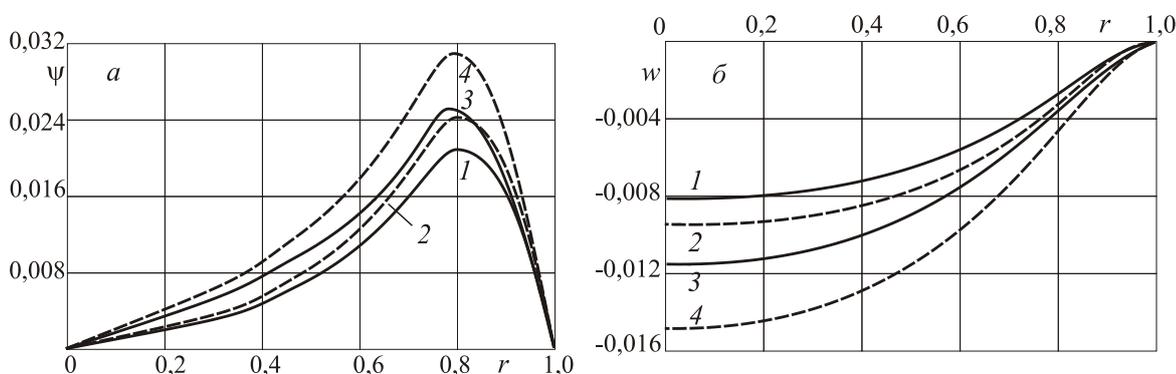


Рис.2. Изменение упругих и физически нелинейных перемещений при температурах $T_1 = 293$ К, $T_2 = 323$ К.

Рис.3 иллюстрирует изменение максимального прогиба с ростом радиуса силовой окружности a , обозначения прежние: 1, 2 – упругие и упругопластические при комнатной температуре; 3, 4 – упругие и упругопластические при $T_2 = 323$ К.

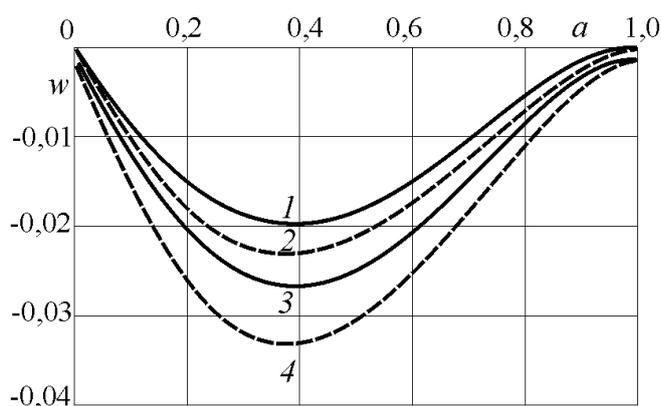


Рис.3. Упругий и упругопластический прогибы в центре пластины в зависимости от радиуса силовой окружности.

Здесь следует отметить, что при вырождающейся погонной силе в центре пластины и при ее действии на контуре повышение температуры приводит к ненулевому прогибу (кривые 3, 4).

3. ПОВТОРНЫЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ

Пусть в момент времени $t = t_1$, происходит мгновенная разгрузка и нагружение пластины усилиями обратного знака

$$q''(r) = -Q_0 \delta(a - r). \quad (13)$$

Принимается, что температура фиксируется $T_1(z) = T(z, t_1)$ и в дальнейшем не изменяется во всех точках пластины. За счет нагрузки (13) в слоях возникнут деформации $\varepsilon_\alpha^{n(k)}$, напряжения $\sigma_\alpha^{n(k)}$, $\sigma_{rz}^{n(3)}$ и перемещения u'' , ψ'' , w'' . В соответствии с методикой Москвитина [2], примененной для слоистых пластин в [4,36], вводятся для указанных величин и нагрузок разности

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)*} &= \sigma_\alpha^{r(k)} - \sigma_\alpha^{n(k)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)*} = \sigma_{rz}^{r(3)} - \sigma_{rz}^{n(3)}, \quad s_\alpha^{(k)*} = s_\alpha^{r(k)} - s_\alpha^{n(k)}, \\ \sigma^{(k)*} &= \sigma^{r(k)} - \sigma^{n(k)}, \quad \varepsilon_\alpha^{(k)*} = \varepsilon_\alpha^{r(k)} - \varepsilon_\alpha^{n(k)}, \quad \varepsilon_{rz}^{(3)*} = \varepsilon_{rz}^{r(3)} - \varepsilon_{rz}^{n(3)}, \\ \vartheta_\alpha^{(k)*} &= \vartheta_\alpha^{r(k)} - \vartheta_\alpha^{n(k)}, \quad \varepsilon^{(k)*} = \varepsilon^{r(k)} - \varepsilon^{n(k)}, \quad \psi^* = \psi^r - \psi^n, \\ u^* &= u^r - u^n, \quad w^* = w^r - w^n, \quad q^*(r) = q(r) - q''(r) = 2Q_0 \delta(a - r), \end{aligned} \quad (14)$$

где один штрих отмечает величины перед разгрузкой, т.е. полученные при нагружении из естественного состояния.

Для перемещений и деформаций со звездочками выполняются соотношения Коши. Напряжения определяются через деформации соотношениями типа (4). Причем параметры упругости $G_k(z) = G_k(T_1(z))$, $K_k(z) = K_k(T_1(z))$ зафиксированы в момент разгрузки, а соответствующие функции нелинейности со звездочками подобны функциям пластичности при нагружении из естественного состояния (5), но с другими константами. В несущих слоях из материала Д16-Т они будут

$$\omega_1^*(\varepsilon_u^{k*}, T_1) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)*} \leq \varepsilon_{y1}^{(k)*}, \\ A_1^* \left(1 - \frac{\varepsilon_{y1}^{(k)*}}{\varepsilon_u^{k*}} \right)^{\alpha_1^*}, & \varepsilon_u^{(k)*} > \varepsilon_{y1}^{(k)*}. \end{cases} \quad (15)$$

где для дюралюминия $A_1^* = 0,924$, $\alpha_1^* = 2,27$, $\varepsilon_{y1}^*(T_1) = \beta_1 \varepsilon_{y1}(T_1)$, $\beta_1 = 2,02$ [2]. Материал заполнителя принимается нелинейно упругим, поэтому его параметры при знакопеременном квазистатическом нагружении не изменяются.

Проведя процедуру постановки краевой задачи для величин со звездочками, подобную нагружению из естественного состояния, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений подобную по виду (6). Краевая задача для перемещений со звездочками $u^{(n)*}(r)$, $\psi^{(n)*}(r)$, $w^{(n)*}(r)$ замыкается присоединением к системе уравнений равновесия граничных условий типа (10). Ее решение строится методом упругих решений.

Итерационное решение задачи формально следует из решения (11), в котором нужно нагрузку и функции физической нелинейности заменить соответствующими величинами со звездочками. В результате при погонной нагрузке (1) имеем

$$\begin{aligned}
\psi^{(n)*} &= C_2^{(n)*} I_1(\beta r) + C_3^{(n)*} K_1(\beta r) + \\
&+ \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta} H_0(a-r) \left(\frac{1}{\beta r} - K_1(\beta r) I_0(\beta a) - I_1(\beta r) K_0(\beta a) \right) + \frac{C_1^{(n)*} \gamma_1}{\beta^2 r} - \\
&- K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \\
&- \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \left. \right] + \\
&+ I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \\
&- \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \left. \right], \\
w^{(n)*} &= \frac{Q_0 a}{2b_3} \left(r^2 - a^2 - a^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) - r^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right) H_0(a-r) - \frac{2}{b_3} \int \left(L_3^{-1} \left(q_\omega^{(n-1)*} \right) \right) dr + \\
&+ \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)*} dr + \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1} \left(p_\omega^{(n-1)*} \right) dr - \frac{C_1^{(n)*}}{4b_3} r^2 (\ln r - 1) + \\
&+ \frac{C_5^{(n)*} r^2}{4b_3} + C_6^{(n)*} \ln r + C_4^{(n)*}, \\
u^{(n)*} &= \frac{a_3}{a_1} w^{(n)*}, \quad r - \frac{a_2}{a_1} \psi^{(n)*} + \frac{1}{a_1} L_2^{-1} \left(p_\omega^{(n-1)*} \right) + \frac{C_7^{(n)*} r}{2} + \frac{C_8^{(n)*}}{r},
\end{aligned} \tag{16}$$

где $C_1^{(n)*} - C_8^{(n)*}$ – константы интегрирования, для которых используются формулы (12), в которых необходимо ввести в дополнительных нагрузках звездочки, исключить в $C_5^{(n)*}$ температуры и заменить Q_0 на $2Q_0$; $q_\omega^{(n-1)*}$, $p_\omega^{(n-1)*}$ – «дополнительные» нагрузки, вычисляемые по формулам типа (7), (9)

$$\begin{aligned}
\int \psi^{(n)*} dr &= \frac{1}{\beta} \left(C_2^{(n)*} I_0(\beta r) - C_3^{(n)*} K_0(\beta r) \right) + \frac{C_1^{(n)*} \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 Q_0 a}{2\beta^2} H_0(b-r) \times \\
&\times \left(\ln \left(\frac{r}{a} \right) + I_0(\beta a) K_0(\beta r) - K_0(\beta a) I_0(\beta r) \right) - \\
&- \int \left(K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \right. \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \right) + \\
&+ I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \\
&- \left. \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \right] dr.
\end{aligned}$$

После этого искомые перемещения, деформации и напряжения в рассматриваемой пластине при повторном знакопеременном нагружении определяются из соотношений (14), (11), (16), например

$$u'' = u' - u^*, \quad \psi'' = \psi' - \psi^*, \quad w'' = w' - w^*.$$

Изменение прогиба $w - a$ и относительного сдвига $\psi - b$ в зависимости от радиальной координаты при знакопеременном нагружении погонной поперечной нагрузкой, приложенной вдоль окружности $a = 0,75$, показано на рис.4: 1 – упругая пластина; 2 – холодная пластичность ($T_1 = 293$ К); 3 – термоупругопластичность ($T_2 = 323$ К). Один штрих – нагружение из естественного состояния, два штриха – знакопеременный изгиб. При повторном нагружении максимальные значения перемещений (кр. 3'') уменьшилась на 3%, как при изотермической пластичности, так и при нагреве пластины. Это явление объясняется эффектом Баушингера, т.к. материалы несущих слоев циклически упрочняются. При вычислении нелинейных добавок функции пластичности вычислялись по формулам (5) и (15).

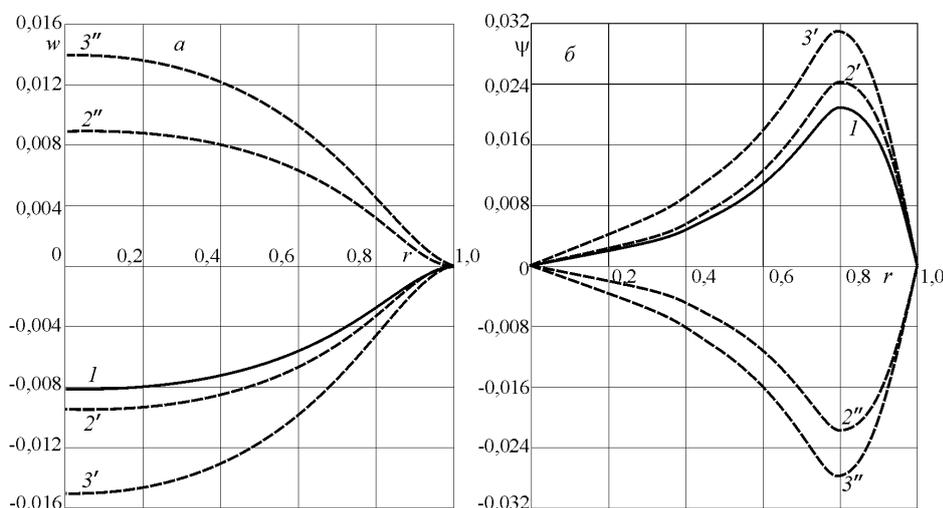


Рис.4. Перемещения при переменном изотермическом и термосиловом нагружениях погонной поперечной силовой нагрузкой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная методика решения краевых задач для трехслойных упругопластических пластин позволяет строить аналитическое решение при перемене знака погонной нагрузки после пластического деформирования в температурном поле. Полученные аналитические результаты позволили провести численный анализ, который подтвердил быструю сходимость итерационного метода, основанного на методе упругих решений, отметил существенное влияние пластичности материалов слоев на НДС в пластине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. *Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации.* – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

2. Москвитин В.В. *Циклическое нагружение элементов конструкций*. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
3. Москвитин В.В. *Сопrotивление вязкоупругих материалов*. – М.: Наука, 1972. – 327 с.
4. Moskvitin V.V., Starovoitov E.I. *On the stress-strain state of two-layer metal-polymer plates under cyclical loading // Mechanics of solids*. – 1986. – Vol.21. – No.1. – Pp.121-126.
5. Bauschinger I. *Über die Quercontraktion and Dilatation bei der Langenausdehnung und Zusammndruckung pristiaticner Körper // Civilingenieur*. – 1879. – Vol.25. – Pp.81-124.
6. Kostryzhev A.G., Strangwood M., Davis C.L. *Bauschinger Effect in microalloyed Steels: Part II. Influence of Work Softening on Strength Development During UOE Line-Pipe Forming // Metallurgical and materials transactions A*. – 2011. – Vol.42A. – No.10. – Pp.3170-3177.
7. Колбасников Н.Г., Зотов О.Г., Мартяшов И.С., Сулягин Р.В. *Исследование эффекта Баушингера, физическое моделирование формирования свойств микролегированной стали в процессе изготовления // Сталь*. – 2012. – №8. – С.56-60.
8. Han S.S., Sohn S.S., Shin S.Y., Bae J., Kim H.S., Lee S. *Effects of microstructure and yield ratio on strain hardening and Bauschinger effect in two API X80 linepipe steels // Materials Science and Engineering*. – 2012. – Vol.A551. – Pp.192-199.
9. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультяев В.И. *Исследование эффекта Баушингера и границы текучести при упругопластическом деформировании металлов // Вестник ПНИПУ Механика*. – 2013. – №1. – С.94-105.
10. Kafka V., Vokoun D. *Causality in the Bauschinger effect generation and in other deformation processes in metals // European Journal of Mechanics – A/Solids*. – 2013. – Vol.42. – Pp.395-401.
11. Dell H.D., Eliseev V.V., Shapievskaaya V.A. *Experimental study of the Bauschinger effect for anisotropic metals // Mechanics of Solids*. – 2014. – Vol.49. – No.5. – Pp.561-567.
12. Мерсон Д.Л., Васильев Е.В., Виноградов А.Ю. *Количественная оценка эффекта Баушингера в магниевых сплавах с эффектом асимметрии // Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. – 2017. – Т.83. – №3. – С.55-58.
13. Zhu D., Zhang H., Li D.Y. *Influence of nanotwin boundary on the Bauschinger's effect in cu: a molecular dynamics simulation study // Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science*. – 2013. – Vol.44. – No.9. – Pp.4207-4217.
14. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
15. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. – Singapore–London: World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
16. Старовойтов Э.И. Леоненко Д.В., Рабинский Л.Н. *Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней*. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
17. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. *Математические модели механики твердого тела*. – Минск: БГУ, 2021 – 535 с.

18. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. – Academic Press, 2016. – 410 p.
19. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, Starovoitov E.I. *Mechanics of Solid Deformable Body*. – Singapore: Springer, 2023. – 317 p.
20. Паймушин В.Н., Иванов В.И., Хусаинов В.Р. *Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2002. – Т.8. – №4. – С.543-554.
21. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates // Aerospace Science and Technology*. – 2016. – No.52. – Pp.41-51.
22. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky, D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // Lobachevskii journal of mathematics*. – 2019. – Vol.40. – No.4. – Pp.439-447.
23. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol.43. – No.2. – Pp.145-152.
24. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т.21. – №2. – С.162-169.
25. Dzhagangirov A.A. *Load-Carrying Capacity of a Fiber-Reinforced Annular Tree-Layer Composite Plate Clamped on its External and Internal Contours // Mechanics of composite materials*. – 2016. – Vol.52. – No.2. – Pp.271-280.
26. Паймушин В.Н. *Нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем, имеющих участки расслоений и контурную подкрепляющую диафрагму // Прикладная математика и механика*. – 2018. – Т.82. – №1. – С.44-57.
27. Belinha J., Dints L.M. *Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method // Composite Structures*. – 2007. – Vol.78. – No.3. – Pp.337-350.
28. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels // Materials Sciences and Applications*. – 2013. – Vol.4. – No.8. – Pp.471-477.
29. Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. *System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates // AIAA Journal*. – 2007. – Vol.45. – No.9. – Pp.2312-2322.
30. Julien D., Karam S. *Limit analysis of multi-layered plates. Part II: The Homogenized Love–Kirchhoff Model // Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2008. – Vol.56. – No.2. – Pp.561-580.
31. Starovoitov É.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. *Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field // Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2015. – Vol.88. – No.4. – Pp.1023-1029.
32. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates // Journal of Sandwich Structures and Materials*. – 2009. – Vol.12. – No.1. – Pp.7-46.

33. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads* // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2010. – Vol.17. – No.6. – Pp.419-432.
34. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. *Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2018. – Т.2. – №3. – С.392-406.
35. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Абдусаттаров А. *Изгиб трехслойной пластины в температурном поле знакопеременной кольцевой нагрузкой* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2022. – Т.28. – №3. – С.339-358.
36. Белл Дж.Ф. *Экспериментальные основы механики деформируемых тел. Ч.1.* – М.: Наука, 1984. – 600 с.

REFERENCES

1. П'юшин А.А. *Пластичность. Част'1. Упругопластические деформации [Plastic. Ch.1. Elastic-Plastic Deformation]*. Москва, Gostekhizdat, 1948, 376 p.
2. Moskvitin V.V. *Tsiklichesкое nagruzhenie ehlementov konstruksij [Cyclic Loading of Elements of Designs]*. Москва, Nauka, 1981, 344 p.
3. Moskvitin V.V. *Soprotivlenie vyazkouprugikh materialov [Resistance of viscoelastic materials]*. Москва, Nauka, 1972, 327 p.
4. Moskvitin V.V., Starovoitov E.I. *On the stress-strain state of two-layer metal-polymer plates under cyclical loading*. *Mechanics of solids*, 1986, Vol.21, No.1, Pp.121-126.
5. Bauschinger I. *Über die Quercontraktion and Dilatation bei der Langenausdehnung und Zusammndruckung pristiatischen Körper*. *Civilingenieur*, 1879, Vol.25, Pp.81-124.
6. Kostyryzhev A.G., Strangwood M., Davis C.L. *Bauschinger Effect in microalloyed Steels: Part II. Influence of Work Softening on Strength Development During UOE Line-Pipe Forming*. *Metallurgical and materials transactions A.*, 2011, Vol.42A, No.10, Pp.3170-3177.
7. Kolbasnikov N.G., Zotov O.G, Martiashov I.S., Suliagin R.V. *Issledovanie ehffekta Baushingera, fizicheskoe modelirovanie formirovaniya svojstv mikrolegirovannoj stali v protsesse izgotovleniya [Study of the Bauschinger effect, physical modeling of the formation of properties of microalloyed steel during the manufacturing process]*. *Stal'*, 2012, No.8, Pp.56-60.
8. Han S.S., Sohn S.S., Shin S.Y., Bae J., Kim H.S., Lee S. *Effects of microstructure and yield ratio on strain hardening and Bauschinger effect in two API X80 linepipe steels*. *Materials Science and Engineering*, 2012, Vol.A551, Pp.192-199.
9. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gul'tiaev V.I. *Issledovanie ehffekta Baushingera i granitsy tekuchesti pri uprugoplasticheskom deformirovanii metallov [Experimental study of Baushinger effect and yield surface at elastoplastic deformation of metals]*. *Vestnik PNIPU. Mekhanika*, 2013, No.1, Pp.94-105.
10. Kafka V., Vokoun D. *Causality in the Bauschinger effect generation and in other deformation processes in metals*. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2013, Vol.42, Pp.395-401.
11. Dell H.D., Eliseev V.V., Shapievskaia V.A. *Experimental study of the Bauschinger effect for anisotropic metals*. *Mechanics of Solids*, 2014, Vol.49, No.5, Pp.561-567.

12. Merson D.L., Vasil'ev E.V., Vinogradov A.Iu. *Kolichestvennaya otsenka ehffekta Bauschingera v magniemykh splavakh s ehffektom asimmetrii [Quantification of the Bauschinger effect in magnesium alloys with asymmetry effect]*. Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov, 2017, Vol.83, No.3, Pp.55-58.
13. Zhu D., Zhang H., Li D.Y. *Influence of nanotwin boundary on the Bauschinger's effect in cu: a molecular dynamics simulation study*. Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science, 2013, Vol.44, No.9, Pp.4207-4217.
14. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistykh vyazkouprugoplasticheskikh ehlementov konstruksij [Mechanics of layered viscoelastic-plastic structural elements]*. Moskva, FIZMATLIT, 2005, 576 p.
15. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Singapore–London, World Scientific Publ., 2015, 376 p.
16. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Rabinsky L.N. *Deformirovanie trekhslonnykh fizicheski nelinejnykh sterzhnej [Deformation of three-layer physically nonlinear bars]*. Moskva, Izdatel'stvo MAI, 2016, 184 p.
17. Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. *Matematicheskie modeli mekhaniki tverdogo tela [Mathematical models of solid mechanics]*. Minsk, BGU, 2021, 535 p.
18. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. Academic Press, 2016, 410 p.
19. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, Starovoitov E.I. *Mechanics of Solid Deformable Body*. Singapore, Springer, 2023, 317 p.
20. Paimushin V.N., Ivanov V.I., Khusainov V.R. *Analiz svobodnykh i sobstvennykh kolebanij trekhslonnoj plastiny na osnove uravnenij utochnennoj teorii [Study of free and eigen vibrations of a three-layer plate on the bases of equations of a refined theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2002, Vol.8, No.4, Pp.543-554.
21. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates*. Aerospace Science and Technology, 2016, No.52, Pp.41-51.
22. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky, D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam*. Lobachevskii journal of mathematics, 2019, Vol.40, No.4, Pp.439-447.
23. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells*. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, Vol.43, No.2, Pp.145–152.
24. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Issledovanie spektra chastot trekhslonnoj tsilindricheskoj obolochki s uprugim napolnitelem [Investigation of the frequency spectrum of a three-layer cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.2, Pp.162-169.
25. Dzhagangirov A.A. *Load-Carrying Capacity of a Fiber-Reinforced Annular Tree-Layer Composite Plate Clamped on its External and Internal Contours*. Mechanics of composite materials, 2016, Vol.52, No.2, Pp.271-280.
26. Paimushin V.N. *Nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core containing delamination zones and edge support diaphragm*. Mechanics of Solids, 2018, Vol.53, No.1, Pp.76-87.

27. Belinha J., Dints L.M. *Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method*. Composite Structures, 2007, Vol.78, No.3, Pp.337-350.
28. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels*. Materials Sciences and Applications, 2013, Vol.4, No.8, Pp.471-477.
29. Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. *System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates*. AIAA Journal, 2007, Vol.45, No.9, Pp.2312-2322.
30. Julien D., Karam S. *Limit analysis of multi-layered plates. Part II: The Homogenized Love–Kirchhoff Model*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008, Vol.56, No.2, Pp.561-580.
31. Starovoitov É.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. *Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field*. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2015, Vol.88, No.4, Pp.1023-1029.
32. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates*. Journal of Sandwich Structures and Materials, 2009, Vol.12, No.1, Pp.7-46.
33. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2010, Vol.17, No.6, Pp.419-432.
34. Starovoitov E.I., Kozel A.G. *Izgib uprugoj krugovoj trekhslojnoj plastiny na osnovanii Pasternaka [Bending of an elastic circular three-layer plate on the Pasternaks based of]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.2, No.3, Pp.392-406.
35. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Abdusattarov A. *Izgib trekhslojnoj plastiny v temperaturnom pole znakoperemennoj kol'tsevoj nagruzkoj [Bending of a three-layer plate in a temperature field alternating ring load]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2022, Vol.28, No.3, Pp.339-358.
36. Bell J.F. *Ehksperimental'nye osnovy mekhaniki deformiruemykh tel. Tom 1. [The Experimental Foundations of Solid Mechanics. Vol.1]*. Moskva, Nauka, 1984, 600 p.

Поступила в редакцию 26 января 2024 года.

Сведения об авторах:

Старовойтов Эдуард Иванович – д.ф.-м.н., проф., профессор Кафедры «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: edstar0@yandex.by
 Леоненко Денис Владимирович – д.ф.-м.н., проф., зав. Кафедрой «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: leoden@tut.by