



ОБРАЩЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Мовчан А.А.¹, Шарунов А.В.²

¹ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

²ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В большинстве известных феноменологических моделей деформирования сплавов с памятью формы предлагаются определяющие соотношения, выражающие приращения фазово-структурных деформаций через приращения напряжений, температуры, параметра фазового состава и сами величины напряжений, деформаций, температуры и параметра фазового состава. Сами значения напряжений, деформаций и температуры входят в правые части этих соотношений достаточно сложным, существенно нелинейным образом. Зависимость параметра фазового состава от температуры и девиатора напряжений является также существенно нелинейной, причем эта нелинейность не подчиняется частному постулату изотропии А.А.Ильюшина, т.е. наблюдается зависимость не только от интенсивности напряжений, но и от третьего инварианта девиатора напряжений.

Процедуры численного решения краевых задач о деформировании элементов конструкций из сплавов с памятью формы методом конечных элементов требуют построения скоростной матрицы жесткости. Для этого необходимо иметь явные выражения приращений компонент тензора напряжений через приращения компонент деформаций, приращения температуры и сами величины напряжений, деформаций, температуры и параметра фазового состава. Таким образом, требуется построить обращение известных определяющих соотношений, получаемых в рамках феноменологических моделей деформирования сплавов с памятью формы. Построение такого обращения осложняется наличием существенно нелинейной зависимости параметра фазового состава от второго и третьего инвариантов девиатора напряжений.

В работе изложена методика аналитического получения такого обращения. Приведены результаты численного решения задачи о прямом превращении в толстостенной цилиндрической оболочке, находящейся под действием постоянного внутреннего давления в предположениях о линейной и билинейной зависимости материальных параметров от параметра вида напряженного состояния.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; определяющие соотношения; влияние вида напряженного состояния; аналитическое обращение

INVERSION OF THE CONSTITUTIVE RELATIONS OF THE SHAPE MEMORY ALLOYS NONLINEAR STRAINING MODEL, TAKING INTO ACCOUNT THE INFLUENCE OF CHANGES IN THE STRESS STATE TYPE PARAMETER VALUE

Movchan A.A.¹, Sharunov A.V.²¹*Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*²*Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

ABSTRACT

In most well-known phenomenological models of the shape memory alloys straining, constitutive relations are formulated that express increments of phase-structural strains through increments of stresses, temperature, phase composition parameter and the values of stresses, strains, temperature and phase composition parameter themselves. The values of stresses, strains, and temperatures themselves enter the right-hand sides of these ratios in a rather complex, significantly nonlinear way. The dependence of the phase composition parameter on temperature and the stress deviator is also significantly nonlinear, and this nonlinearity does not obey the particular isotropy postulate of A.A. Ilyushin, i.e. there is a dependence not only on the stress intensity, but also on the third invariant of the stress deviator tensor. Procedures for the numerical solution of boundary value problems on the deformation of structural elements made of shape memory alloys by the finite element method require the construction of a stress – strains increments stiffness matrix. To do this, it is necessary to have explicit expressions of the increments of the stress tensor components through the increments of the strain tensor components, temperature increments and the values of stresses, strains, temperature and the phase composition parameter themselves. Thus, it is necessary to construct an inversion of the known constitutive relations obtained within the framework of phenomenological models of shape memory alloys deformation. The construction of such an inversion is complicated by the presence of a significantly nonlinear dependence of the phase composition parameter on the second and third invariants of the stress deviator. The paper describes the methodology of analytical receipt of such an appeal. The results of the numerical solution of the problem of direct phase transformation into a thick-walled cylindrical shell under constant internal pressure are presented under the assumption of linear and bilinear dependence of material parameters on the stress state type parameter value.

Keywords: shape memory alloys; constitutive relations; influence of the type of stress state; analytical inversion

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что процесс деформирования сплавов с памятью формы (СПФ) [1-3] является существенно нелинейным и термодинамически необратимым. Этот процесс зависит от истории нагружения и поэтому он не может, в общем случае, описываться конечными соотношениями между деформациями, напряжениями, параметром фазового состояния и температурой. В соответствии с этим, в рамках большинства феноменологических моделей деформирования СПФ [4-11] предлагаются дифференциальные соотношения, выражающие приращения фазово-структурных деформаций через приращения компонент тензора напряжений, параметра фазового состава и температуры, а также через сами величины напряжений, деформаций, параметра фазового состава и температуры. Проблема описания процесса термомеханического деформирования СПФ осложняется тем обстоятельством, что этот процесс не подчиняется частному постулату изотропии А.А. Ильюшина [12-14], т.е. не может быть описан в рамках предположения о единой зависимости интенсивности деформаций от интенсивности напряжений (гипотеза «единой кривой» [15]). СПФ обладают

свойством «разносопротивляемости» [16], которое связано с влиянием на процесс деформирования СПФ третьего инварианта девиатора напряжений [17,18].

В силу чрезвычайно сложных нелинейных определяющих соотношений, характерных для СПФ, аналитическое решение краевых задач для этих материалов затруднено, а для достаточно сложных элементов конструкций не возможно. Перспективным методом решения таких задач является метод конечных элементов (МКЭ) в форме метода смещений [19,20]. Этим методом краевые задачи для элементов из СПФ решались в работах [21-31]. Однако, классический вариант метода конечных элементов для нелинейно деформируемых термодинамически необратимых твердых тел связан с построением скоростных матриц жесткости отдельных конечных элементов и всего тела, позволяющих явно выразить приращения узловых смещений через приращения узловых сил каждого конечного элемента и всего тела. Для аналитического построения таких матриц необходимо иметь определяющие соотношения для СПФ, в виде, выражающем приращения напряжений через приращения деформаций. В результате возникает задача обращения известных определяющих соотношений для СПФ, которые в большинстве случаев известны в виде явных зависимостей приращений деформаций от приращений напряжений. В некоторых работах [27,28] такое обращение для каждого конечного элемента проводилось численно, что существенно увеличивает время счета. В работах [32,33] описана аналитическая процедура соответствующего обращения, однако в работе [33] разносопротивляемость СПФ вообще не учитывалась, а в [32] рассматривался вариант объединенной модели фазового и структурного деформирования СПФ [7-11] и случай пропорционального монотонного изменения компонент девиатора напряжений, при котором параметр вида девиатора напряжений не меняется и отсутствует необходимость его дифференцирования, что существенно упрощает алгоритм, но сужает область применимости соответствующего подхода.

В данной работе предлагается алгоритм аналитического обращения определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, пригодный для общего случая непропорционального изменения компонент девиатора напряжений, учитывающий влияние изменения вида напряженного состояния не только на процесс деформирования СПФ, но и на процесс фазового превращения материала. Получены конкретные формулы такого обращения для процесса прямого термоупругого фазового превращения, сопровождающегося структурным переходом.

1. СИСТЕМА ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ СПФ, РАЗРЕШЕННАЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРИРАЩЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Упрощенный вариант системы определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [5,6], учитывающий влияние на процесс фазово-структурного деформирования вида напряженного состояния сводится к соотношениям

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{phst}, \quad \varepsilon_{ij}^{phst} = \varepsilon_0 q \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{phst'}, \quad d\varepsilon_{ij}^{phst'} = d\varepsilon_{ij}^{ph'} + d\varepsilon_{ij}^{st'}, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{K}, \quad \varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma_{ij}'}{2G}, \quad \frac{1}{K(q)} = \frac{q}{K_M} + \frac{1-q}{K_A}, \quad \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A}, \quad (1.2)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \omega_{ij} dq, \quad \omega_{ij} = \frac{3}{2} \rho_{D1}(\mu_\sigma) \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} \varphi_1(\sigma_i, \mu_\sigma), \quad (1.3)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{9}{4} \rho_{D2}(\mu_\sigma) q \frac{\partial \varphi_2(\sigma_i, \mu_\sigma)}{\partial \sigma_i} \frac{\sigma_{ij}' \sigma_{mn}'}{(\sigma_i)^2} d\sigma_{mn}', \quad (1.4)$$

$$\mu_\sigma = \frac{27}{2} \frac{I_{3\sigma'}}{(\sigma_i)^3}. \quad (1.5)$$

В (1.1) ε_{ij} , ε_{ij}^e , ε_{ij}^{phst} – полные, упругие и фазово-структурные деформации (температурными деформациями в силу их малости пренебрегается), штрихом у тензора второго ранга обозначается его девиатор, δ_{ij} – дельта Кронекера, $d\varepsilon_{ij}^{st}$, $d\varepsilon_{ij}^{ph'}$ – приращения девиатора фазово-структурной деформации за счет структурного и фазового механизмов, ε_0 – линейная деформация объемного эффекта фазового превращения СПФ; в (1.2) σ_{ij} , σ_i – тензор и интенсивность напряжений; q – объемная доля мартенситной фазы; $K(q)$, $G(q)$ – зависящие от q величины утроенного объемного модуля и модуля сдвига СПФ, ниже для сокращения записи аргумент q у этих функций опускается; те же величины с нижними индексами M и A обозначают значения этих модулей для мартенситного и аустенитного состояний соответственно; соотношения (1.3), (1.4) определяют приращения девиатора фазово-структурной деформации за счет фазовых и структурных переходов. Зависимость (1.4) справедлива в случае, если в рассматриваемой точке процесса значение интенсивности напряжений возрастает и имеет максимальное значение за все время существования мартенситной части рассматриваемого представительного объема материала.

Соотношение (1.5) представляет собой выражение для параметра вида девиатора напряжений, от которого, согласно данным работ [17,18] зависит процесс деформирования СПФ. Величина $I_{3\sigma'}$ обозначает третий инвариант девиатора напряжений, который в декартовой системе координат равен определителю матрицы, составленной из компонент σ_{ij}' .

Изменение параметра фазового состава (объемной доли мартенситной фазы) q в полных циклах фазовых превращений может быть определено по формуле $q = \sin^2(\pi t_\sigma/2)$ [34], где для прямого фазового превращения [6]

$$t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad t = \frac{M_s^0 - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij} \sigma_{ij}' + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S}, \quad (1.6)$$

$$6Z(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{kk}^2 \Delta K}{K_A K_M} + \frac{\sigma_i^2 \Delta G}{G_A G_M}, \quad \Delta K = K_A - K_M, \quad \Delta G = G_A - G_M. \quad (1.7)$$

Здесь M_s^0 , M_f^0 – температуры начала (нижний индекс s) и окончания (нижний индекс f) прямого термоупругого мартенситного превращения в состоянии, свободном от напряжений (верхний индекс нуль). Те же величины с верхним индексом σ это характерные температуры фазовых переходов для нагруженных

материалов. Согласно формулам (1.6) величины q , t_σ , M_s^σ через множитель ω_{ij} (1.3) зависят от параметра вида напряженного состояния μ_σ .

В [35] предложены дифференциальные соотношения для параметра фазового состава, пригодные для произвольных (не обязательно полных) циклов фазовых переходов, интегралы которых для случая полных циклов фазовых переходов, происходящих под действием постоянных напряжений, совпадают с приведенными выше конечными соотношениями для q . Для прямого превращения эти дифференциальные соотношения имеют вид

$$dq = \frac{F}{\Delta S} (Ad\sigma_i + Bd\sigma_{kk} - \Delta SdT), \quad F = \frac{\pi(1-q)}{M_s^0 - M_f^0} tg\left(\frac{\pi t_\sigma}{2}\right),$$

$$A = \rho_{D1} \left[\left(\varphi_1(\sigma_i) + \sigma_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial \sigma_i} \right) \right] + \frac{\Delta G \sigma_i}{3G_A G_M}, \quad B = \frac{\Delta K \sigma_{kk}}{3K_A K_M} + \varepsilon_0. \quad (1.8)$$

Здесь и далее для сокращения записи аргументы у функций ρ_{D1} и φ_1 опускаются. Соотношения (1.8) получены в [35] для модели деформирования СПФ не учитывающей влияние на процесс фазового перехода возможных изменений при прямом превращении параметра вида напряженного состояния μ_σ . Ниже будут получены соотношения для dq , лишенные этого недостатка.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПАРАМЕТРА ФАЗОВОГО СОСТАВА, УЧИТЫВАЮЩИЕ ИЗМЕНЕНИЕ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

В [35] предложено для описания изменения q в общем случае неполных циклов прямого превращения использовать априорные дифференциальные соотношения

$$\frac{d(1-q)}{d(1-Q)} = \frac{1-q}{1-Q}. \quad (2.1)$$

В (2.1)

$$Q = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} t_\sigma\right), \quad (2.2)$$

q – значение параметра фазового состава в рассматриваемом процессе, вообще говоря, неполного прямого превращения, а Q – величина, соответствующая тому же значению t_σ в цикле полного превращения, соотношение (2.1) выражает собой условие подобия графиков полного и неполного циклов относительно линии $Q=1$.

Дифференцируя (2.2) получаем

$$dQ = \frac{\pi(dM_s^\sigma - dT)}{2(M_s^0 - M_f^0)} \sin\left(\pi \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}\right). \quad (2.3)$$

Подстановка (2.3) и (2.2) в (2.1) дает после перехода в тригонометрических функциях к половинному аргументу

$$dq = F(dM_s^\sigma - dT). \quad (2.4)$$

Согласно (1.3)

$$\omega_{ij}\sigma'_{ij} = \rho_{D1}(\mu_\sigma)\sigma_i\varphi_1(\sigma_i, \mu_\sigma). \quad (2.5)$$

Дифференцируя (2.5) получаем

$$d(\omega_{ij}\sigma'_{ij}) = \rho_{D1}\left(\varphi_1 + \sigma_i \frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma_i}\right)d\sigma_i + \sigma_i\left(\frac{d\rho_{D1}}{d\mu_\sigma}\varphi_1 + \rho_{D1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mu_\sigma}\right)d\mu_\sigma. \quad (2.6)$$

Согласно (1.7)

$$dZ = \frac{\Delta K\sigma_{kk}}{3K_A K_M}d\sigma_{kk} + \frac{\Delta G\sigma_i}{3G_A G_M}\sigma_i d\sigma_i. \quad (2.7)$$

С использованием формул (1.6), (2.6), (2.7) находим

$$dM_s^\sigma = \frac{Ad\sigma_i + Bd\sigma_{kk} + cd\mu_\sigma}{\Delta S}, \quad (2.8)$$

$$c = \left(\frac{d\rho_{D1}}{d\mu_\sigma}\varphi_1 + \rho_{D1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mu_\sigma}\right). \quad (2.9)$$

Параметр c , зависящий от σ_i и μ_σ , полностью определяет влияние изменения параметра вида напряженного состояния μ_σ на рассматриваемый процесс деформирования СПФ. Если в получаемых далее формулах положить $c = 0$, модель такого влияния учитывать не будет.

Подставляя (2.8) в (2.4) получаем

$$dq = \frac{F}{\Delta S}(Ad\sigma_i + Bd\sigma_{kk} + c\sigma_i d\mu_\sigma - \Delta SdT). \quad (2.10)$$

Выражение (1.5) для μ_σ в декартовой системе координат можно записать в виде [36]

$$\mu_\sigma = \sqrt{6} \frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{jk}\sigma'_{ki}}{(\sigma'_{rt}\sigma'_{rt})^{3/2}}. \quad (2.11)$$

Дифференцируя (2.11) можно получить

$$d\mu_\sigma = \frac{\partial\mu_\sigma}{\partial\sigma'_{im}}d\sigma'_{im} = \frac{27}{2} \frac{\sigma'_{ik}\sigma'_{kj}d\sigma'_{ij}}{(\sigma_i)^3} + 3\mu_\sigma \frac{d\sigma_i}{\sigma_i}. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.10) получаем

$$dq = \frac{F}{\Delta S}(A_1d\sigma_i + Bd\sigma_{kk} + D_{ij}d\sigma'_{ij} - \Delta SdT), \quad (2.13)$$

$$A_1 = A + 3\mu_\sigma c, \quad D_{ij} = \frac{27}{2}c \frac{\sigma'_{ik}\sigma'_{kj}}{(\sigma_i)^2}.$$

Исключим величину $d\sigma_{kk}$ из правой части (2.13). Уравнение для приращения первого инварианта тензора деформаций имеет вид $d\varepsilon_{kk} = d\sigma_{kk}/K + 3Bdq$, откуда получается

$$d\sigma_{kk} = K(q)[d\varepsilon_{kk} - 3Bdq]. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.14) в (2.13) и решая полученное соотношение относительно dq , получаем

$$dq = A_2d\sigma_i + D_{ij}^1d\sigma'_{ij} + R_1d\varepsilon_{kk} - \delta SdT, \quad (2.15)$$

$$A_2 = \frac{A_1 F}{R}, \quad D_{ij}^1 = \frac{D_{ij} F}{R}, \quad \delta S = \frac{F \Delta S}{R}, \quad R_1 = \frac{FBK}{R}, \quad R = \Delta S + 3KB^2 F.$$

Учитывая, что

$$d\sigma_i = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{mn}' d\sigma_{mn}'}{\sigma_i} \quad (2.16)$$

из (2.15) можно получить

$$dq = R_{mn} d\sigma_{mn}' + R_1 d\varepsilon_{kk} - \delta S dT, \quad R_{mn} = \frac{3}{2} A_2 \frac{\sigma_{mn}'}{\sigma_i} + D_{mn}^1. \quad (2.17)$$

3. ПРОЦЕДУРА ОБРАЩЕНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СОТНОШЕНИЙ

С учетом (1.1), (1.3) и (1.4) выражение для приращения девиатора фазово-структурных и упругих деформаций представляется в виде

$$d\varepsilon_{ij}' = \frac{d\sigma_{ij}'}{2G} + \sigma_{ij}' \left(\frac{\Delta G}{2G_A G_M} \right) dq + \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} \left(\rho_{D1} \varphi_1 dq + \rho_{D2} q \frac{\partial \varphi_2}{\partial \sigma_i} d\sigma_i \right). \quad (3.1)$$

Проблема состоит в том, чтобы получить из (3.1) явные аналитические выражения для $d\sigma_{ij}'$ через $d\varepsilon_{ij}'$, учитывая, что приращения компонент девиатора напряжений входят в правую часть (3.1) не только явно (первое слагаемое), но и через величины dq и $d\sigma_i$.

Формально разрешая соотношение (3.1) относительно числителя первой дроби правой части получаем

$$d\sigma_{ij}' = 2G \left\{ d\varepsilon_{ij}' - \left[\sigma_{ij}' \left(\frac{\Delta G}{2G_A G_M} \right) dq + \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} \left(\rho_{D1} \varphi_1 dq + \rho_{D2} q \frac{\partial \varphi_2}{\partial \sigma_i} d\sigma_i \right) \right] \right\}. \quad (3.2)$$

Подставляя в (3.2) выражение (2.17) и учитывая (2.16) можно получить

$$d\sigma_{ij}' = 2G \left\{ d\varepsilon_{ij}' - \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} \left[Q_{mn} d\sigma_{mn}' + e R_1 d\varepsilon_{kk} - e \delta S dT \right] \right\}, \quad (3.3)$$

$$e = \frac{\Delta G \sigma_i}{3G_A G_M} + \rho_{D1} \varphi_1, \quad Q_{mn} = e R_{mn} + \frac{3}{2} \rho_{D2} q \frac{\partial \varphi_2}{\partial \sigma_i} \frac{\sigma_{mn}'}{\sigma_i}.$$

Чтобы исключить из правой части (3.3) величину $Q_{mn} d\sigma_{mn}'$ умножим правую и левую части (3.3) на Q_{ij} и свернем результат по двум индексам

$$Q_{ij} d\sigma_{ij}' = 2G \left\{ Q_{ij} d\varepsilon_{ij}' - \frac{3}{2} \frac{Q_{ij} \sigma_{ij}'}{\sigma_i} \left[Q_{mn} d\sigma_{mn}' + e R_1 d\varepsilon_{kk} - e \delta S dT \right] \right\}. \quad (3.4)$$

Из (3.4) находим

$$Q_{mn} d\sigma_{mn}' = G \frac{2\sigma_i Q_{mn} d\varepsilon_{mn}' + 3Q_{mn} \sigma_{mn}' e (\delta S dT - R_1 d\varepsilon_{kk})}{\sigma_i + 3G Q_{mn} \sigma_{mn}'}. \quad (3.5)$$

Подстановка (3.5) в (3.3) дает явные выражения для приращений компонент девиатора напряжений через приращения компонент девиатора полных деформаций

$$d\sigma'_{ij} = 2G \left[d\varepsilon'_{ij} - \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij} (2GQ_{mn} d\varepsilon'_{mn} - e(\delta SdT - R_1 d\varepsilon_{kk}))}{\sigma_i + 3GQ_{mn} \sigma'_{mn}} \right]. \quad (3.6)$$

Подставляя выражение (3.6) в (2.17) можно найти явное выражение для приращения параметра фазового состава, не содержащее приращений тензора напряжений

$$dq = 2GR_{pq} \left[d\varepsilon'_{pq} - \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{pq} (2GQ_{mn} d\varepsilon'_{mn} - e(\delta SdT - R_1 d\varepsilon_{kk}))}{\sigma_i + 3GQ_{mn} \sigma'_{mn}} \right] + R_1 d\varepsilon_{kk} - \delta SdT. \quad (3.7)$$

Подстановка (3.7) в (2.14) дает явное выражение для приращения первого инварианта тензора напряжений. Формула для приращения компонент тензора напряжений получаются путем комбинации этого выражения и зависимостей (3.6)

по формуле $d\sigma_{ij} = \frac{1}{3} d\sigma_{kk} \delta_{ij} + d\sigma'_{ij}$.

4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ПРЯМОМ ПРЕВРАЩЕНИИ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРА ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Для решения краевой задачи о прямом превращении в элементе из СПФ с учетом изменения параметра вида напряженного состояния, необходимо иметь зависимости параметров ρ_{D1} и ρ_{D2} , а также функций φ_1 и φ_2 от μ_σ для соответствующего интервала значений этой величины в рассматриваемом процессе, принадлежащего интервалу $[-1, 1]$. Экспериментальные данные по этим зависимостям для конкретных СПФ весьма не полны и ограничиваются даже для наиболее исследованного никелида титана значениями [37], найденными в опытах на одноосное растяжение ($\mu_\sigma = 1$) и одноосное сжатие ($\mu_\sigma = -1$). Для функций φ_1 , соответствующих прямому превращению экспериментальным данным соответствует экспоненциальная зависимость $\varphi_1(\sigma_i, \mu_\sigma) = 1 - \exp(-\sigma_i / \sigma_{10}(\mu_\sigma))$. Для описания структурных деформаций экспериментальным данным лучше всего соответствует интегральная функция γ -распределения

$$\varphi_2(\sigma_i, \mu_\sigma) = \Phi\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{20}(\mu_\sigma)}, \alpha(\mu_\sigma)\right), \quad \Phi(x, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \xi^{\alpha-1} \exp(-\xi) d\xi.$$

Значения параметров этих зависимостей, найденные путем аппроксимации экспериментальных данных методом наименьших квадратов, приведены в Таблице 1 [37].

Таблица 1.

Значения параметров материала, полученные путем обработки экспериментальных данных для никелида титана.

μ_σ	ρ_{D1}	ρ_{D2}	σ_{10} , МПа	σ_{20} , МПа	α
1	0.1047	0.0608	322.6	27.4	6.45
-1	0.0742	0.02	185.7	18	16.08

Согласно полученным данным, значения параметров ρ_{D1} и ρ_{D2} при переходе от случая $\mu_\sigma = 1$ к значению $\rho_\sigma = -1$ убывают, особенно резко для величин ρ_{D2} . Из-за отсутствия достоверных количественных данных о значении соответствующих параметров для других величин μ_σ , может быть принята упрощающая гипотеза о линейной зависимости приведенных в Таблице 1 параметров от величины μ_σ . В этом случае принимается соотношение

$$X(\mu_\sigma) = \frac{X(1) + X(-1)}{2} + \frac{X(1) - X(-1)}{2} \mu_\sigma, \quad (4.1)$$

где X – любой из параметров, стоящих в верхней строке таблицы. В частности, функция $c(\sigma_i, \mu_\sigma)$ (2.9), определяющая влияние на процесс изменения параметра μ_σ , вычисляется по формуле

$$c = \frac{1}{2} \left\{ \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma_i}{\sigma_{10}}\right) \right] (\rho_{D1}(1) - \rho_{D1}(-1)) + \rho_{D1} \frac{\exp(-\sigma_i/\sigma_{10})}{\sigma_{10}} (\sigma_{10}(1) - \sigma_{10}(-1)) \right\}. \quad (4.2)$$

В (4.2) величины ρ_{D1} и σ_{10} для сокращения записи приведены без аргументов, которые равны μ_σ и определяются формулой (4.1).

В работе [38] приведены качественные данные по сравнению диаграмм мартенситной неупругости для никелида титана при одноосном растяжении и кручении. Утверждается, что диаграмма кручения лежит между диаграммами растяжения и сжатия, причем разница между диаграммами растяжения и кручения существенно меньше, чем различие между диаграммами кручения и сжатия. В работе [39] на основании микромеханических представлений проведена теоретическая оценка зависимости предельной деформации, накапливаемой при полном прямом превращении под действием постоянного напряжения от значения параметра вида напряженного состояния. Установлено, что при изменении значения параметра μ_σ от 1 до нуля эта деформация незначительно падает, однако при дальнейшем падении μ_σ от нуля до минус единицы наблюдается резкое уменьшение этой деформации. Согласно этим данным можно принять предположение о билинейной зависимости величины ρ_{D1} от μ_σ с весьма медленным линейным уменьшением с падением μ_σ от 1 до 0 и существенно более интенсивным линейным уменьшением при падении μ_σ от 0 до минус единицы. Предельным случаем этой гипотезы, которую можно принять как первое приближение из-за отсутствия количественных данных по значению параметров диаграммы прямого превращения для кручения, является предположение о независимости параметров диаграммы прямого превращения от μ_σ для $\mu_\sigma \in [0, 1]$ и линейной зависимости для $\mu_\sigma \in [-1, 0]$. В этом случае для анализа достаточно знать значения всех параметров только для одноосного растяжения и одноосного сжатия. При таком расчете в случае $\mu_\sigma \in [0, 1]$ принимается $c(\sigma_i, \mu_\sigma) = 0$, т.е. изменение параметра вида напряженного состояния не учитывается, а для случая $\mu_\sigma \in [-1, 0]$ значение всех материальных параметров, входящих в таблицу определяются по формуле $X(\mu_\sigma) = X(0) + \mu_\sigma (x(0) - x(-1))$, где $X(0) = X(1)$.

В качестве иллюстрации ниже приведены некоторые результаты решения осесимметричной задачи о деформировании толстостенной цилиндрической оболочки из никелида титана с внутренним радиусом $a = 5$ мм, внешним радиусом $b = 10$ мм, длиной 30 мм, материал которой претерпевает прямое термоупругое фазовое превращение под действием постоянного внутреннего давления $P = 50$ МПа. Касательные напряжения на всех поверхностях оболочки равны нулю, нормальные равны нулю на внешней цилиндрической поверхности. Предполагается, что на торцах равны нулю осевые деформации. Задача решается с использованием разработанного программного модуля в ПК КЭМ Simulia Abaqus в осесимметричной конечноэлементной постановке с использованием 2-х мерных КЭ типа С3Х4Н [40]. Решение получено для значений материальных параметров, приведенных в таблице, характерные температуры фазового перехода считались равными $M_s^0 = 313$ К, $M_f^0 = 293$ К, величина энтропии перехода $\Delta S = 0.32$ МПа/К. На всех приведенных ниже рисунках сплошные линии соответствуют решению при линейной зависимости материальных параметров от μ_σ , штриховые – при билинейной зависимости.

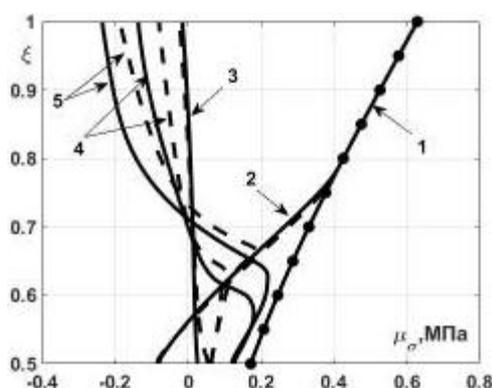


Рис.1.

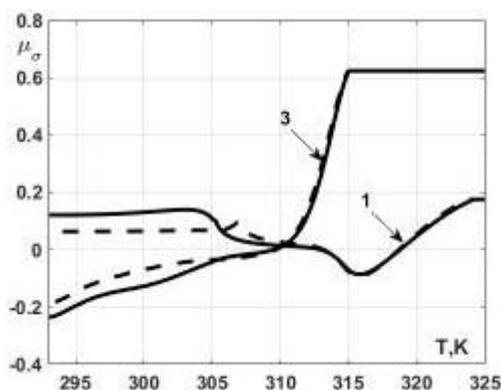


Рис.2.

На рис.1 приведены графики распределения параметра вида напряженного состояния по сечению муфты для различных этапов охлаждения: кривая 1 – $T = 325$ К, 2 – $T = 317$ К, 3 – $T = 309$ К, 4 – $T = 301$ К, 5 – $T = 293$ К, $\xi = r/b$. На рис.2 приведены графики зависимости параметра μ_σ от температуры на внутренней поверхности оболочки (линия 1) и на внешней поверхности (линия 3). Как видно, параметр μ_σ весьма существенно изменяется, как при изменении

радиальной координаты, так и в процессе изменения фазового состава. Следовательно, изменение этого параметра обязательно должны учитываться при решении краевой задачи.

На рис.3 приведены графики зависимости интенсивности напряжений от температуры для внешней поверхности муфты (кривая 1), средней точки сечения (кривая 2) и внутренней цилиндрической поверхности (кривая 3).

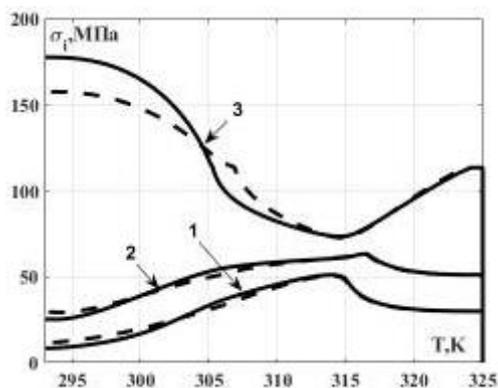


Рис.3.

На рис.4 приведены эпюры кольцевых напряжений. Кривые 1 соответствуют упругому решению задачи, кривые 2 – этапу охлаждения в тот момент, когда фронт начала фазового перехода достиг внешней поверхности муфты, кривые 3 – этапу охлаждения, когда все сечение оболочки полностью перешло в мартенситную фазу и прямое превращение завершено, точки – аналитическому решению для упругого поведения. Как видно максимальные значения кольцевого напряжения и интенсивности напряжений, достигаемые в точке внутренней поверхности в момент завершения фазового перехода существенно (примерно на 20%) уменьшаются при переходе от линейной модели зависимости материальных параметров от μ_σ к билинейной.

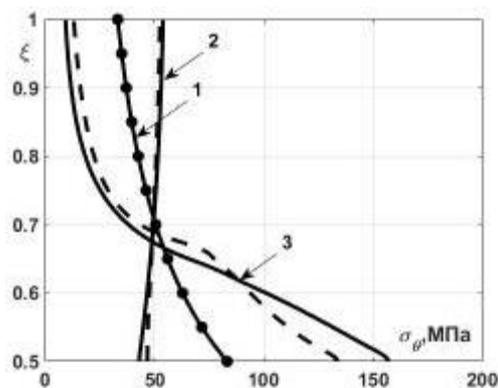


Рис.4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описана процедура аналитического обращения определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, учитывающая, в отличие от известных аналогов, изменение параметра вида напряженного состояния в процессе термоупругого

мартенситного превращения в СПФ. Получены явные выражения приращения компонент тензора напряжений через приращения компонент тензора деформации, температуры, а также сами напряжения, деформацию, параметр фазового состояния и температуру. На примере численного решения краевой задачи о прямом превращении в толстостенной цилиндрической оболочке из СПФ, находящейся под действием постоянного внутреннего давления, установлено, что параметр вида напряженного состояния весьма неравномерно распределен по радиальной координате и существенно, причем немонотонно, изменяется в точках оболочки при изменении температуры. Результат решения существенно зависит от модели зависимости материальных параметров от μ_σ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З. П. *Эффект памяти формы*. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. – 216 с.
2. Lexcellent C. *Shape-memory Alloys Handbook*. – Published in Great Britain and the United States by ISTE Ltd and John Wiley & Sons. Inc., 2013. – 379 p.
3. Lagoudas D.S. *Shape memory alloys modeling and engineering applications*. – Springer, 2008. – 435 p.
4. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys* // International Journal of Plasticity. – 2016. – Vol.76. – Pp.244-284.
5. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
6. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
7. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.
8. Гаганова Н.В. *Распространение модели деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях на случай учета развития мартенситных элементов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.543-562.
9. Мовчан А.А. *Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – №4. – С.140-151.
10. Мовчан А.А. *Объединенная модель фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2020. – №11. – С.2-10.
11. Мовчан А.А. *Модель неупругого деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – №3. – С.8-17.
12. Ильюшин А.А. *О связи между напряжениями и деформациями в механике сплошной среды* // Прикладная математика и механика. – 1954. – Т.18. – Вып.6. – С.641-666.
13. Ильюшин А.А. *Пластичность. Основы общей математической теории*. – М.: Издательство АН СССР, 1963. – 272 с.

14. Зубчанинов В.Г. *Механика процессов пластических сред*. – М.: Физматлит, 2010. – 352 с.
15. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
16. Volkov A.E., Emelyanova E.V., Evard M.E., Volkova N.A. *An explanation of phase deformation tension–compression asymmetry of TiNi by means of microstructural modeling* // Journal of Alloys and Compounds. – 2013. – Vol.577. – Pp.127-130.
17. Raniecki B., Tanaka K., Ziolkowski A. *Testing and modeling of NiTi SMA at complex stress state* // Material Science Research International. Special technical publications. – 2001. – Vol.2. – Pp.327-334.
18. Lexcellent C., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P. *Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2002. – Vol.50. – Pp.2717-2735.
19. Зенкевич О.С. *Метод конечных элементов в технике*. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
20. Секулович М. *Метод конечных элементов*. – М.: Стройиздат, 1993. – 644 с.
21. Fernandes R., Boyd J., Lagoudas D., El-Borgi S. *Two-dimensional finite element analysis of frictional sliding between a rigid cylinder and a shape memory alloy half-space* // Mechanics of Materials. – 2020. – Vol.143. – Pp.1-18.
22. Young S-Y., Nam T-H. *Finite element calculation of B2-B19 transformation of TiNiCu shape memory alloy* // Journal of Alloys and Compounds. – 2013. – Vol.577. – Pp.115-118.
23. Christ D., Reese S. *Finite-element modeling of shape memory alloy. A comparison between small-strain and large-strain formulations* // Materials Science and Engineering. – 2008. – Vol.481. – Pp.343-346.
24. Stebner A., Brinson L. *Explicit finite element implementation of an improved three dimensional constitutive model for shape memory alloys* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2013. – Vol.257. – Pp.17-35.
25. Armattoo K., Haboussi M., Zineb T. *A 2D finite element based on a nonlocal constitutive model describing localization and propagation of phase transformation in shape memory alloy thin structures* // International Journal of Solids and Structures. – 2014. – Vol.51. – Pp.1208-1220.
26. Terriault P., Viens F., Brailovski V. *Non-isothermal finite element modeling of a shape memory alloy actuator using ANSYS* // Computational Materials Science. – 2006. – Vol.36. – Pp.397-410.
27. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions* // IFAC Papers OnLine. – 2018. – Vol.51. – No.2. – Pp.873-878.
28. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Abnormal buckling of thin-walled bodies with shape memory effects under thermally induced phase transitions* // Advanced Structured Materials. – 2019. – Vol.110. – Pp.493-524.
29. Zhavoronok S.I. *On the coupled model of the thermoelastic behavior of a shape memory alloy in intrinsic variables and some statement of buckling problems of shape memory elements* // AIP Conference Proceedings (“International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering” (“ICCMSE 2020”)). – 2021. – Vol.2343. – Iss.1. – 120004.
30. Саганов Е.Б. *Решение задачи о толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы, находящемся под давлением, с учетом разнсопротивляемости* //

- Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.563-573.
31. Саганов Е.Б., Шарунов А.В. Численный анализ процесса раздачи цилиндрической оболочки из сплава с памятью формы, использующего эффект накопления деформаций прямого превращения с учетом влияния вида напряженного состояния // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №4. – С.437-448.
 32. Movchan A.A. *Method of analytical inverting of nonlinear constitutive relations of the combined model of phase and structural deformation of shape memory alloys* // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol.2611. – Iss.1. – 100005.
 33. Мовчан А.А. Определяющие соотношения модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы, разрешенные относительно приращений напряжений // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №3. – С.343-359.
 34. Liang C., Rogers C.A. *One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials* // J. of Intell. Mater. Syst. and Struct. – 1990. – Vol.1. – No.2. – Pp.207-234.
 35. Мовчан А.А., Давыдов В.В. Инкрементальные определяющие соотношения для объемной доли мартенситной фазы в сплавах с памятью формы // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №5. – С.653-661.
 36. Мовчан А.А. Учет влияния вида напряженного состояния в рамках объединенной модели фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы с изотропным упрочнением // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т.29. – №3. – С.354-381.
 37. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – №12. – С.2-11.
 38. Adler P.H., Yu W., Pelion A.R., Zadno R., Duerig T.W., R. Barresi R. *On the tensile and torsional properties of pseudoelastic NiTi* // Scripta Metallurgica et Materialia. – 1990. – Vol.24. – Pp.943-947.
 39. Мишустин И.В. Оценка тензора предельной деформации поликристаллического сплава с памятью формы // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №3. – С.374-386.
 40. Золочевский А.А., Беккер А.А. *Введение в ABAQUS*. – Харьков, 2011. – 49 с.

REFERENCES

1. Lihachev V.A., Kuz'min S.L., Kamenceva Z.P. *Ehffekt pamyati formy [Shape memory effect]*. Leningrad, Izdatel'stvo Leningradskogo gosudarstvennogo universiteta, 1987, 216 p.
2. Lexcellent C. *Shape-memory Alloys Handbook*. Published in Great Britain and the United States by ISTE Ltd and John Wiley & Sons. Inc., 2013, 379 p.
3. Lagoudas D.S. *Shape memory alloys modeling and engineering applications*. Springer, 2008, 435 p.
4. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys*. International Journal of Plasticity, 2016, Vol.76, Pp.244-284.

5. Movchan A.A., Silchenko L.G., Silchenko T.L. *Taking account of the martensite inelasticity in the reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
6. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. Physical Mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.
7. Movchan A. A. *Model for the Effect of the Phase Mechanism of Deformation on the Structural Mechanism in Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2020, Vol.2020, No.4, Pp.282-290.
8. Gaganova N.V. *Rasprostranenie modeli deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh na sluchaj ucheta razvitiya martensitnykh ehlementov [Propagation of the deformation model of shape memory alloys during phase and structural transformations in the case of taking into account the development of martensitic elements]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.25, No.4, Pp.543-562.
9. Movchan A.A. *Phenomenological Model of Changes in Phase-Structural Deformations in Shape Memory Alloys*. Mechanics of Solids, 2020, Vol.55, No.4, Pp.573-583.
10. Movchan A.A. *Joint Model for the Phase-Structural Deformation of Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2021, Vol.2021, No.4, Pp.333-340.
11. Movchan A.A. *Shape memory alloys inelastic straining model*. Russian Metallurgy (Metally), 2021, Vol.2021, No.10, Pp.1203-1212.
12. Il'yushin A.A. *O svyazi mezhdu napryazheniyami i deformatsiyami v mekhanike sploshnoj sredy [On the relationship between stresses and deformations in continuum mechanics]*. Prikladnaya matematika i mekhaniki, 1954, Vol.18, Iss.6, Pp.641-666.
13. Il'yushin A.A. *Plastichnost'. Osnovy obshhej matematicheskoy teorii [Plasticity. Fundamentals of general mathematical theory]*. Moskva, Izdatel'stvo AN SSSR, 1963, 272 p.
14. Zubchaninov V.G. *Mekhanika protsessov plasticheskikh sred [Mechanics of plastic media processes]*. Moskva, Fizmatlit, 2010, 352 p.
15. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti [Fundamentals of the theory of plasticity]*. Moskva, Nauka, 1969, 420 p.
16. Volkov A.E., Emelyanova E.V., Evard M.E., Volkova N.A. *An explanation of phase deformation tension-compression asymmetry of TiNi by means of microstructural modeling*. Journal of Alloys and Compounds, 2013, Vol.577, Pp.127-130.
17. Raniecki B., Tanaka K., Ziolkowski A. *Testing and modeling of NiTi SMA at complex stress state*. Material Science Research International. Special technical publications, 2001, Vol.2, Pp.327-334.
18. Lexcellent C., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P. *Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2002, Vol.50, Pp.2717-2735.
19. Zenkevich O.S. *Metod konechnykh ehlementov v tekhnike [The finite element method in engineering]*. Moskva, Mir, 1975, 544 p.
20. Sekulovic M. *Metod konachnih elementata*. Gradivinska knjiga, Beograd, 1988, 644 p.

21. Fernandes R., Boyd J., Lagoudas D., El-Borgi S. *Two-dimensional finite element analysis of frictional sliding between a rigid cylinder and a shape memory alloy half-space*. Mechanics of Materials, 2020, Vol.143, Pp.1-18.
22. Young S-Y., Nam T-H. *Finite element calculation of B2-B19 transformation of TiNiCu shape memory alloy*. Journal of Alloys and Compounds, 2013, Vol.577, Pp.115-118.
23. Christ D., Reese S. *Finite-element modeling of shape memory alloy. A comparison between small-strain and large-strain formulations*. Materials Science and Engineering, 2008, Vol.481, Pp.343-346.
24. Stebner A., Brinson L. *Explicit finite element implementation of an improved three dimensional constitutive model for shape memory alloys*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013, Vol.257, Pp.17-35.
25. Armattoe K., Haboussi M., Zineb T. *A 2D finite element based on a nonlocal constitutive model describing localization and propagation of phase transformation in shape memory alloy thin structures*. International Journal of Solids and Structures, 2014, Vol.51, Pp.1208-1220.
26. Terriault P., Viens F., Brailovski V. *Non-isothermal finite element modeling of a shape memory alloy actuator using ANSYS*. Computational Materials Science, 2006, Vol.36, Pp.397-410.
27. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions*. IFAC Papers OnLine, 2018, Vol.51, No.2, Pp.873-878.
28. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Abnormal buckling of thin-walled bodies with shape memory effects under thermally induced phase transitions*. Advanced Structured Materials, 2019, Vol.110, Pp.493-524.
29. Zhavoronok S.I. *On the coupled model of the thermoelastic behavior of a shape memory alloy in intrinsic variables and some statement of buckling problems of shape memory elements*. AIP Conference Proceedings (“International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering” (“ICCMSE 2020”)), 2021, Vol.2343, Iss.1, 120004.
30. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o tolstostennom tsilindre iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod davleniem, s uchetom raznosoprotivlyaemosti [Solution of the problem of a thick – walled cylinder under pressure from shape memory taking into account of tension – compression asymmetry]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.25, No.4, Pp.563-573.
31. Saganov E.B., Sharunov A.V. *Chislennyj analiz protsessa razdachi tsilindricheskoj obolochki iz splava s pamyat'yu formy, ispol'zuyushhego ehffekt nakopleniya deformatsij pryamogo prevrashheniya s uchetom vliyaniya vida napryazhennogo sostoyaniya [Numerical analysis of the process of expansion of a cylindrical coupling from shape memory alloy using the effect of accumulation of direct transformation deformations taking into account the influence of type of stress state]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2022, Vol.28, No.4, Pp.437-448.
32. Movchan A.A. *Method of analytical inverting of nonlinear constitutive relations of the combined model of phase and structural deformation of shape memory alloys*. AIP Conference Proceedings, 2022, Vol.2611, Iss.1, 100005.
33. Movchan A.A. *Opredelyayushhie sootnosheniya modeli nelinejnogo deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy, razreshennye otnositel'no prirashhenij napryazhenij [Constitutive relationships of the nonlinear deformation model of shape memory*

- alloys resolved with respect to stress increments*]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2021, Vol.27, No.3. Pp.343-359.
34. Liang C., Rogers C.A. *One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials*. *J. of Intell. Mater. Syst. and Struct.*, 1990, Vol.1, No.2, Pp.207-234.
 35. Movchan A.A., Davydov V.V. *Inkremental'nye opredelyayushhie sootnosheniya dlya ob'emnoj doli martensitnoj fazy v splavakh s pamyat'yu formy [Incremental constitutive relations for the volume fraction of the martensitic phase in shape memory alloys]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2010, Vol.16, No.5, Pp.653-661.
 36. Movchan A.A. *Uchet vliyaniya vida napryazhennogo sostoyaniya v ramkakh ob'edinennoj modeli fazovo-strukturnogo deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy s izotropnym uprochneniem [Consideration of the influence of the type of stress state within the framework of the combined model of phase-structural deformation of shape memory alloys with isotropic hardening]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2023, Vol.29, No.3, Pp.354-381.
 37. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Experimental Identification of a Nonlinear Deformation Model for a Shape Memory Alloy during Phase and Structural Transformations*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2019, Vol.2019, No.4, Pp.301-308.
 38. Adler P.H., Yu W., Pelion A.R., Zadno R., Duerig T.W., Barresi R. *On the tensile and torsional properties of pseudoelastic NiTi*. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 1990, Vol.24, Pp.943-947.
 39. Mishustin I.V. *Otsenka tenzora predel'noj deformatsii polikristallicheskogo splava s pamyat'yu formy [Estimation of the limit strain tensor of a polycrystalline alloy with shape memory]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2022, Vol.28, No.3, Pp.374-386.
 40. Zolocheskij A.A., Bekker A.A. *Vvedenie v ABAQUS [Introduction to ABAQUS]*. Khar'kov, 2011, 49 p.

Поступила в редакцию 22 апреля 2024 года.

Сведения об авторах:

Мовчан Андрей Александрович – д.ф.-м.н., проф., гл.н.с. ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: movchan47@mail.ru

Шарунов Алексей Валерьевич – асп., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: aleksej-sharunov@yandex.ru