

УДК 539.3

EDN AINSFT (<https://elibrary.ru/ainsft>)

DOI 10.33113/mkmk.ras.2025.31.01.01



ПОСТРОЕНИЕ КИНЕМАТИКО-СИЛОВОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОМПОЗИТНОГО УПРУГОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ДВУМЯ НАКЛОНЕННЫМИ ДРУГ К ДРУГУ ПЛОСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ*

Киреенков А.А.^{1,2}, Федотенков Г.В.²

¹ФГБУН Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского,
г. Москва, Россия

²ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В данной работе представлена методика построения кинематико-силовой модели взаимодействия композитного упругого сферического тела с двумя наклонёнными друг к другу плоскими поверхностями. Подобные задачи актуальны в механике контактных взаимодействий, поскольку они имеют широкое применение в инженерной практике, включая транспортные системы, робототехнику, аэрокосмическую технику и строительные конструкции. Разработанный подход позволяет свести сложную контактную задачу, связанную с неоднородным распределением кинематических и силовых параметров, к ряду более простых модельных задач, для которых ранее были разработаны численно-аналитические методы решения. Особое внимание уделено учёту эффектов комбинированного сухого трения, возникающего внутри пятен контакта, а также влиянию анизотропных распределений контактных напряжений. Методика основана на численно-аналитическом расчёте напряжённого состояния композитного упругого тела, движущегося по шероховатым плоскостям в условиях сложной кинематики, включающей одновременное качение и проскальзывание. Для адекватного описания силового взаимодействия тела с контактными поверхностями предложены аппроксимационные модели, учитывающие распределение нормальных и касательных напряжений в пятнах контакта. Это позволило не только упростить математическое описание системы, но и получить аналитические зависимости, пригодные для использования в инженерных расчётах. Разработанный подход учитывает ключевые особенности взаимодействия упругого тела с наклонёнными поверхностями, что важно при моделировании динамики контактных систем, работающих в условиях сложного трения. Методика может применяться при анализе механических систем с многоточечными контактами, прогнозировании динамики упругих сферических оболочек, оптимизации геометрии и материалов контактных элементов, а также при разработке алгоритмов управления движением объектов с опорой на шероховатые и наклонённые поверхности. В частности, предложенная модель может быть использована при проектировании роботизированных систем с элементами сложного контактного взаимодействия, анализе устойчивости транспортных и аэрокосмических конструкций, а также при изучении механических свойств композитных материалов, подвергающихся сложным нагрузкам.

*Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда №23-29-00987,
<https://rscf.ru/project/23-29-00987/>

Ключевые слова: композитное упругое тело; сложная кинематика; комбинированное сухое трение

METHOD FOR REDUCING CONTACT PROBLEMS FOR SPHERICAL SHELLS OF THE TIMOSHENKO TYPE TO PAIRED SERIES-EQUATIONS

Kireenkov Alexey A.^{1,2}, Fedotenkov Grigory V.²

¹*Institute of Problems of Mechanics RAS named after. A.Yu. Ishlinsky, Moscow, Russia*

²*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

ABSTRACT

This study presents a methodology for constructing a kinematic-force model of the interaction between a composite elastic spherical body and two flat surfaces inclined to each other. Such problems are relevant in contact mechanics, as they have broad applications in engineering practice, including transportation systems, robotics, aerospace engineering, and structural construction. The developed approach makes it possible to reduce a complex contact problem, associated with the inhomogeneous distribution of kinematic and force parameters, to a series of simpler model problems for which numerical-analytical solution methods have been previously developed.

Special attention is paid to the consideration of combined dry friction effects arising within the contact patches, as well as the influence of anisotropic distributions of contact stresses. The methodology is based on a numerical-analytical calculation of the stress state of the composite elastic body moving over rough surfaces under complex kinematics, which includes simultaneous rolling and slipping. To adequately describe the force interaction between the body and the contact surfaces, approximation models are proposed that take into account the distribution of normal and tangential stresses in the contact patches.

This approach not only simplifies the mathematical description of the system but also provides analytical dependencies suitable for use in engineering calculations. The developed method considers the key features of the interaction between an elastic body and inclined surfaces, which is essential for modeling the dynamics of contact systems operating under complex friction conditions. The methodology can be applied to the analysis of mechanical systems with multi-point contacts, the prediction of the dynamics of elastic spherical shells, the optimization of the geometry and materials of contact elements, as well as the development of motion control algorithms for objects relying on rough and inclined surfaces.

In particular, the proposed model can be used in the design of robotic systems with complex contact interactions, the analysis of the stability of transport and aerospace structures, and the study of the mechanical properties of composite materials subjected to complex loading conditions.

Keywords: composite elastic solid; complex kinematics; combined dry friction

ВВЕДЕНИЕ

Построение кинематико-силовой модели взаимодействия композитного упругого сферического тела с двумя наклоненными друг к другу плоскими поверхностями является актуальным направлением развития механики контактных взаимодействий, поскольку подобные элементы широко применяются при проектировании и производстве всех современных видов транспорта, включая различные аэрокосмические аппараты, при строительстве зданий

и сооружений, а также в робототехнике. Например, задача о движении сферической композитной упругой оболочки по двум наклоненными друг к другу плоскими поверхностями имеет многочисленные инженерные приложения. Данная модель может быть использована для построения эффективных законов управления так называемым «роботом-бабочкой». Для корректного учета возникающих эффектов требуется построение модели, описывающей взаимосвязь параметров, характеризующих силовое состояние внутри пятен контакта с кинематическими параметрами задачи. Эта задача, в свою очередь, разбивается на две больших подзадачи. Одна из них состоит в построении приближенных аналитических моделей силового состояния внутри пятна контакта с учетом реального распределения нормальных и касательных контактных напряжений [1-6]. При изучении подобных проблем наиболее эффективной оказалось теория многокомпонентного сухого трения [7-10]. Данная теория позволяет корректно описать возникающие эффекты трения с помощью построения физически согласованных феноменологических моделей трения. В свою очередь, для определения коэффициентов этих моделей требуется разработка численно-аналитических методов определения распределений контактных напряжений внутри пятен контакта для различных типов упругих сферических оболочек и тел.

Характерной особенностью контактных задач является то, что в математическом плане, они представляют собой задачи со смешанными граничными условиями, которые, как правило, сводятся к интегральным уравнениям первого рода. Эти уравнения зачастую являются некорректными и требуют использования специальных методов решения. Одним из эффективных методов решения подобных задач является метод парных рядов-уравнений. По существу, он представляет собой обобщение метода разделения переменных на краевые задачи со смешанными граничными условиями.

В работах [11-13] с применением принципа суперпозиции и функций влияния был предложен общий подход к решению контактных задач для сферических оболочек, основанный на сведении математической постановки к решению системы интегральных уравнений. В свою очередь, с использованием разложений в ряды Фурье эта система была сведена к парным рядам-уравнениям. Для их решения было предложено использовать метод введения новой неизвестной вспомогательной функции, являющейся решением интегрального уравнения Фредгольма II рода. С этой целью была рассмотрена контактная задача для сферической оболочки, опирающейся на абсолютно твёрдую плоскую поверхность. Для описания напряженного состояния оболочки использовалась система уравнений равновесия в перемещениях, основанная на гипотезах С.П. Тимошенко, учитывающая влияние деформации сдвига. Система разрешающих уравнений была построена с помощью принципа суперпозиции, согласно которому нормальные перемещения оболочки связаны с контактным давлением посредством интегрального соотношения. Этот подход позволил получить основное разрешающее интегральное уравнение типа Фредгольма I рода. Ядро этого уравнения представляет собой функции влияния для оболочки. Сама функция влияния была построена с применением разложений в ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. Для построения корректной системы разрешающих уравнений задача была сведена к системе парных рядов-уравнений. Метод решения системы разрешающих уравнений основан на сведении парных уравнений к регулярному интегральному уравнению Фредгольма II рода. Для этого использовались известные разложения разрывных функций в ряды

по полиномам Лежандра, а также интегральное представление для полиномов Лежандра. В результате задача была сведена к интегральному уравнению Фредгольма II рода относительно вспомогательной функции. Через вспомогательную функцию были выражены искомые коэффициенты ряда для контактного давления. Была также произведена оценка области контакта с помощью условий равновесия оболочки.

В представленном ниже исследовании рассматривается более сложная ситуация, обусловленная тем, что сферические упругие оболочки или твердые тела опираются на две различных плоских поверхности, наклоненные друг к другу. Этот факт приводит к различию компонент тензоров трения внутри пятен контакта, что в свою очередь оказывает влияние на возникающие за счет трения упругие касательные напряжения. Еще одним фактором, оказывающим существенное влияние на силовое состояние внутри пятен контакта, является смещение диаграммы распределения нормальных контактных напряжений как под действием силы тяжести, так и под действием компонент вектора сил трения. Возникающая ситуация аналогична действию анизотропного сухого трения на динамику упругой сферической оболочки или упругого твердого тела, движущегося по горизонтальной плоскости в условиях сложной кинематики. Основное проявление возникающих эффектов состоит в нарушении симметричных диаграмм распределения контактных напряжений. Для описания их влияния на динамику подходит методика, разработанная в предыдущих исследованиях авторов. Она состоит в построении простых асимптотических линейных приближений для распределения нормальных контактных напряжений внутри пятен контакта. Коэффициенты этих разложений могут быть также как в работах [7-10] определены из условия равенства статических моментов и моментов сил трения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Рассматривается свободное безотрывное движение упругой сферической оболочки или упругого сферического тела по двум наклоненным друг к другу под углом горизонтальным, шероховатым поверхностям (рис.1).

Предполагается, что имеет место комбинированная кинематика: одновременное качение с угловой скоростью Ω_C и проскальзывание с линейной скоростью V_C параллельно линии соединения плоских поверхностей. При этом направление качения совпадает с направлением проскальзывания. Уравнения движения такой системы удобно записывать в прямоугольной Декартовой системе координат, центр которой жестко связан с центром масс движущегося объекта. Единичный вектор e_1 этой системы направлен вдоль направления относительного проскальзывания, параллельно поверхностям скольжения и линии их соединения. Единичный вектор e_3 направлен перпендикулярно направлению скольжения и линии соединения поверхностей. Единичный вектор e_2 дополняет векторы e_1 и e_3 до правой тройки.

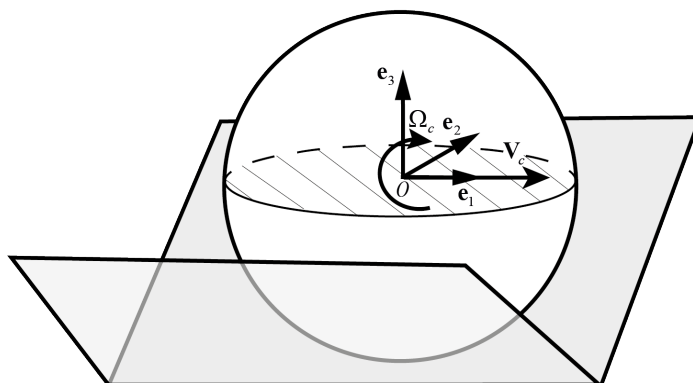


Рис.1. Кинематическая схема.

В силу сферической формы движущегося объекта предполагается, что площадки контакта с поверхностями, вдоль которых осуществляется движение, имеют круговую форму с радиусами R_i , $i = 1, 2$, соответственно. В силу симметрии рассматриваемой задачи размеры пятен контакта также можно считать идентичными.

Из сделанных предположений вытекает еще одно о том, что нормальные реакции N_i , $i = 1, 2$ внутри каждого из пятен контакта также одинаковы и направлены по радиусу к геометрическому центру оболочки (шара) (рис.2), который, в свою очередь, можно считать совпадающим с центром масс. Данные предположения вполне допустимы для большинства проблем динамики, потому что определяющее влияние оказывают эффекты комбинированного сухого трения внутри пятен контакта, которые носят интегральный характер.

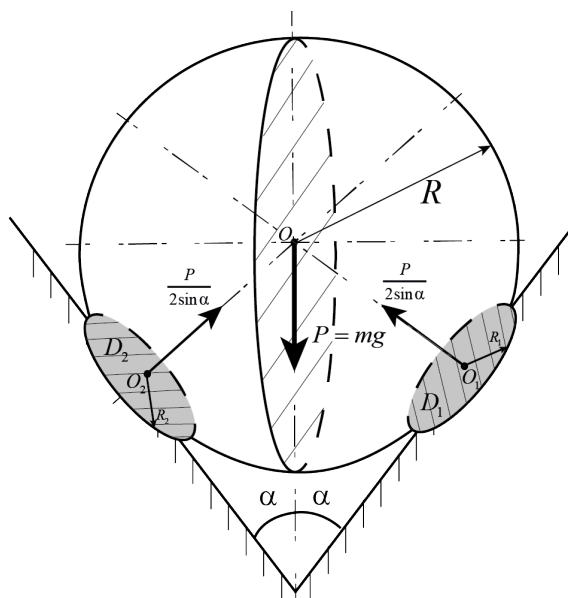


Рис.2. Силовое взаимодействие с поверхностями скольжения.

В предположении, что угол раструба поверхностей, вдоль которых осуществляется движение, равен 2α , нормальные реакции определяются по простым формулам

$$N_i \equiv N = \frac{P}{2 \sin \alpha}, \quad i = 1, 2, \quad P = mg, \quad (1.1)$$

где m – масса тела, а g – ускорение свободного падения.

2. КИНЕМАТИКО-СИЛОВАЯ СХЕМА ВНУТРИ ПЯТЕН КОНТАКТА

В соответствии со сделанными в разделе 1 предположениями, кинематика внутри пятен контакта также носит сложный характер. Качение тела приводит к верчению площадок контакта относительно поверхностей скольжения.

Для описания кинематики внутри пятен контакта вводятся две дополнительные прямоугольные Декартовы системы координат $\{O_i e_{i1} e_{i2} e_{i3}\}$, $i = 1, 2$, начала которых жестко связаны с геометрическими центрами площадок контакта (рис.3). Единичные векторы e_{i1} , $i = 1, 2$ этих систем координат направлены параллельно направлению скольжения и параллельно поверхностям, по которым оно осуществляется. Кроме того, их направления совпадают с направлением вектора e_1 глобальной системы координат, жестко связанной с центром масс тела.

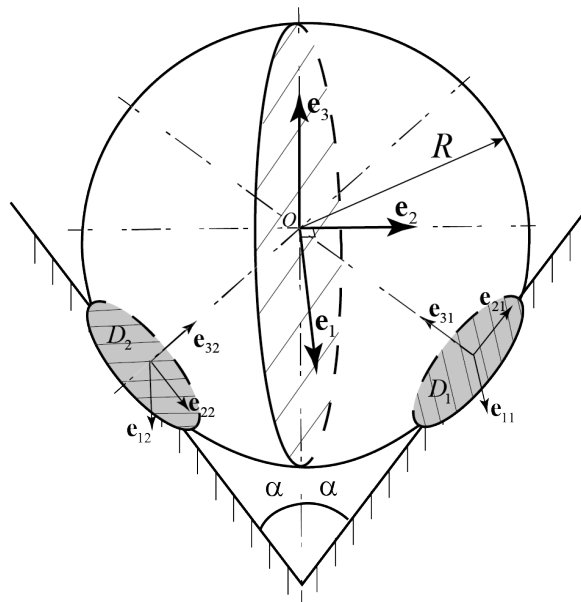


Рис.3 Кинематическая схема.

Единичные векторы e_{i3} , $i = 1, 2$ направлены перпендикулярно площадкам контакта по направлению радиусов векторов тела, проведенных к центрам введенных систем координат. Единичные векторы e_{i2} , $i = 1, 2$ дополняют векторы e_{i1} , $i = 1, 2$ и e_{i3} , $i = 1, 2$, соответственно, до правых троек. Эти векторы, также как и единичные векторы e_{i1} , $i = 1, 2$ лежат в плоскости контакта.

Для определения влияния эффектов комбинированного сухого трения сделаем, как и во всех предыдущих работах на эту тематику, предположение о справедливости закона Амонтона-Кулона в дифференциальной форме для маленького элемента площади dS_i , $i = 1, 2$ внутри пятен контакта (рис.4). В соответствии с этим законом, дифференциалы результирующего вектора dF_i , $i = 1, 2$ и момента сил трения dM_{ic} , $i = 1, 2$ определяются следующими формулами [7-10]

$$d\mathbf{F}_i = -\mathbf{f}_i \sigma_i(x_i, y_i) \frac{\mathbf{V}_i}{|\mathbf{V}_i|} dS_i, \quad dM_{iC} = -\mathbf{f}_i \sigma_i(x_i, y_i) \frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{V}_i}{|\mathbf{V}_i|} dS_i, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{V}_i = (v + (-1)^i \omega_i y, \omega_i x), \quad \mathbf{r}_i = (x_i, y_i), \quad i = 1, 2,$$

где $\mathbf{f}_i$ – тензор трения внутри i -ого пятна контакта ($i = 1, 2$); $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ – радиус-векторы элементарной площадки контакта dS_i , $i = 1, 2$ внутри i -ого пятна контакта ($i = 1, 2$), $\omega_i = (-1)^i \omega$ – угловая скорость вращения геометрического центра i -ого пятна контакта ($i = 1, 2$), а $\sigma_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ – распределения нормальных касательных напряжений внутри пятен контакта.

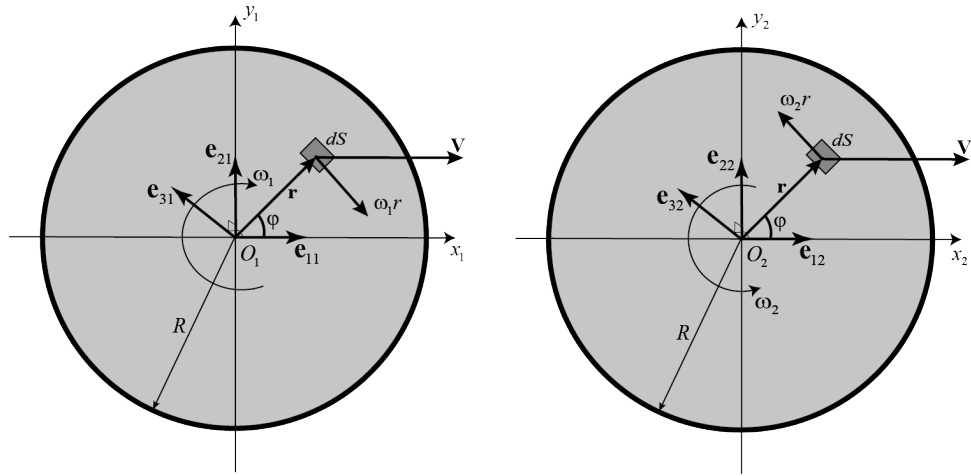


Рис.4. Кинематическая схема внутри пятен контакта.

Разность в знаках угловых скоростей связана с тем, что вращение пятен контакта происходит в противоположных направлениях, но с одним и тем же модулем угловой скорости.

Интегрирование соответствующих дифференциалов (2.1) по пятнам контакта дает результирующие векторы $d\mathbf{F}_i$, $i = 1, 2$ и моменты сил трения dM_{iC} , $i = 1, 2$, возникающие из-за эффектов комбинированного сухого трения

$$\mathbf{F}_i = -\mathbf{f}_i \iint_G \sigma_i(x_i, y_i) \frac{\mathbf{V}_i}{|\mathbf{V}_i|} dx_i dy_i, \quad \mathbf{M}_C = -\mathbf{f}_i \iint_G \sigma_i(x_i, y_i) \frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{V}_i}{|\mathbf{V}_i|} dx_i dy_i, \quad (2.2)$$

$$G_i = \{(x_i, y_i) : x_i^2 + y_i^2 \leq R^2\}, \quad \mathbf{F}_i = (F_{i\parallel}, F_{i\perp}), \quad i = 1, 2.$$

С целью изучения задач динамики, в соответствии с результатами работ [8,10], трение можно считать ортотропным, определяемым следующими тензорами трения

$$\mathbf{f}_i = f_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa_i \end{pmatrix}, \quad f_i \neq 0, \quad \kappa_i \neq 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

Здесь f_i и $\kappa_i f_i$ – главные компоненты тензора трения. Предполагается, что они коллинеарны базисным векторам e_{i1} , $i = 1, 2$ и e_{i2} , $i = 1, 2$.

Еще одной отличительной чертой, влияющей на силовое состояние внутри пятен контакта, является нарушение в симметрии распределения нормального статического контактного давления под действием веса тела. Эти смещения

на величины d_{iy} , $i=1,2$ коллинеарны векторам e_{i2} , $i=1,2$ введенных систем координат и могут быть описаны по аналогии со смещениями, возникающими из-за влияния качения [7-10], простыми асимптотическими формулами

$$\sigma_i(x_i, y_i) = \sigma_{i0}(x_i, y_i) \left(1 + (-1)^i d_{iy} y_i\right), \quad i=1,2, \quad (2.4)$$

где $\sigma_{i0}(x_i, y_i)$, $i=1,2$ – статические контактные давления, рассчитанные в предположении, что опорные плоскости горизонтальны. В соответствии с результатами предыдущих работ можно считать, что они обладают свойством осевой симметрии: $\sigma_{i0}(x_i, y_i) = \sigma_{i0}(\pm x_i, \pm y_i)$, $i=1,2$. Данное допущение существенно упрощает методики аппроксимации двойных интегралов в формулах (2.2). Эти интегралы удобно записать в полярных системах координат $\{r, \varphi\}$ с полюсами в геометрических центрах пятен контакта. С учетом универсальности методики, применяемой для аппроксимации функций (2.2) и независимости введенных систем координат, индекс « i » для полярных координат будем опускать для краткости записи.

В результате замены координат

$$x_i = r \cos \varphi, \quad y_i = r \sin \varphi, \quad r \in [0, R], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad i=1,2 \quad (2.5)$$

модули для компонент результирующего вектора и момента сил трения приобретают вид

$$\begin{aligned} F_{i\parallel}(u, v) &= f_i N \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\left(v - (-1)^i u r \sin(\varphi)\right) r \sigma_{i0}(r)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2(-1)^i u v r \sin(\varphi)}} dr d\varphi, \\ F_{i\perp}(u, v) &= k f_i N d_{iy} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{u r^3 \sigma_{i0}(r) \cos^2(\varphi)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2(-1)^i u v r \sin(\varphi)}} dr d\varphi, \quad i=1,2, \quad (2.6) \\ M_c(u, v) &= f_i R N \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\left((-1)^i u r^2 - v r \sin(\varphi)\right) r \sigma_{i0}(r)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2(-1)^i u v r \sin(\varphi)}} dr d\varphi, \end{aligned}$$

где через $F_{i\parallel}(u, v)$ и $F_{i\perp}(u, v)$ обозначены компоненты результирующего вектора сил трения, направленные по и перпендикулярно направлению проскальзывания пятен контакта относительно плоскости скольжения.

Интегральные представления для компонент результирующего вектора и момента сил трения дают хорошее описание влияния на динамику эффектов комбинированного сухого трения, но не удобны для использования в уравнениях движения и, тем более, для проведения качественного анализа. Вместо них удобно использовать приближенные аналитические модели, методика построения которых была разработана и эффективно применена в предыдущих работах авторов [7-10]. Ниже приводится общая форма этих моделей

$$F_{i\parallel} = \frac{F_{i0} v}{\sqrt{v^2 + a u^2}}, \quad F_{i\perp} = \frac{b_{i0} u}{\sqrt{u^2 + b v^2}}, \quad M_{ic} = \frac{M_{i0} u}{\sqrt{u^2 + m v^2}}, \quad i=1,2. \quad (2.7)$$

Коэффициенты моделей могут быть рассчитаны численно в зависимости от вида движущегося тела или определены из натурных экспериментов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика построения кинематико-силовой модели взаимодействия композитного упругого тела с двумя наклоненными друг другу плоскими поверхностями. Основным преимуществом данного подхода является сведение достаточно сложной с точки зрения распределения кинематических и силовых параметров задачи к более простым модельным задачам, подробно изученным ранее. К числу этих задач относятся методики численно-аналитического расчета напряженного состояния для композитного упругого тела, совершающего сложное кинематическое движение по горизонтальной шероховатой плоскости и методики построения многокомпонентных моделей комбинированного сухого трения. Приведен пример модели для круговых пятен контакта и ортотропного комбинированного сухого трения. Универсальность предложенной методики позволяет ее обобщить на случай более сложных пятен контакта при наличии анизотропного трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kireenkov A.A., Fedotenkov G.V. *Contact problem for a spherical shell supported on two flat surfaces* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2024. – Vol.20. – No.3. – Pp.24-34.
2. Kireenkov A.A. *On interaction of elastic composite shell with two rails* // AIP Conference Proceedings. – 2024. – 3269.
3. Киреенков А.А., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. *Метод сведения контактных задач для сферических оболочек типа Тимошенко к парным рядам-уравнениям* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т.29. – №3. – С.390-401.
4. Грицков А.В., Киреенков А.А., Федотенков Г.В. *Функции Грина для балки Тимошенко, связанной с деформируемым основанием* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №4. – С.561-574.
5. Киреенков А.А., Федотенков Г.В. *Модель силового контакта композитной сферической оболочки с твёрдой поверхностью с учётом комбинированного анизотропного сухого трения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №4. – С.558-569.
6. Киреенков А.А., Федотенков Г.В. *Движение композитной сферической оболочки по твёрдой поверхности с учётом комбинированного сухого трения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №3. – С.327-340.
7. Kireenkov A.A. *Further development of the theory of multicomponent dry friction* / Proceedings of the 6th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. COUPLED PROBLEMS'2015. – 2015. – Pp.203-209.
8. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Anisotropic Combined Dry Friction in Problems of Pneumatics' Dynamics* // Journal of Vibrational Engineering and Technologies. – 2020. – Vol.8(2). – Pp.365-372.
9. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Coupled dry friction models in problems of aviation pneumatics' dynamics* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2017. – Vol.127. – Pp.198-203.
10. Zhavoronok S.I., Kireenkov A.A. *On the effect of the anisotropic dry friction and the deformed state of tires on the shimmy initiation* / Proceedings of the VII

International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. – Rhodes Island, Greece, 2017. – Pp.216-226.

11. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. *Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства* // Труды МАИ. – 2014. – №78. – 10.
12. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. *Нестационарная осесимметричная задача об ударе сферической оболочки по упругому полупространству (начальный этап взаимодействия)* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.98-108.
13. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. *Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек* // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2018. – Т.160. – №3. – С.561-577.

REFERENCES

1. Kireenkov A.A., Fedotenkov G.V. *Contact problem for a spherical shell supported on two flat surfaces*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2024, Vol.20, No.3, Pp.24-34.
2. Kireenkov A.A. *On interaction of elastic composite shell with two rails*. AIP Conference Proceedings, 2024, 3269.
3. Kireenkov A.A., Muchailova E.Yu., Fedotenkov G.V. *Metod svedeniya kontaktnykh zadach dlya sfericheskikh obolochek tipa Timoshenko k parnym ryadam-uravneniyam [Method of reducing contact problems for spherical shells of timoshenko type to paired series-equations]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2023, Vol.29, No.3, Pp.390-401.
4. Gritskov A.V., Kireenkov A.A., Fedotenkov G.V. *Funktsii Grina dlya balki Timoshenko, svyazannoj s deformiruemym osnovaniem [Green functions for a Timoshenko beam associated with a deformable base]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2022, Vol.28, No.4, Pp.561-574.
5. Kireenkov A.A., Fedotenkov G.V. *Model' silovogo kontakta kompozitnoj sfericheskoy obolochki s tvordoj poverkhnost'yu s uchyotom kombinirovannogo anizotropnogo sukhogo treniya [A model of the force contact of a composite spherical shell with a solid surface taking into account the combined anisotropic dry friction]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2021, Vol.27, No.4, Pp.558-569.
6. Kireenkov A.A., Fedotenkov G.V. *Dvizhenie kompozitnoj sfericheskoy obolochki po tvordoj poverkhnosti s uchyotom kombinirovannogo sukhogo treniya [Motion of a composite spherical shell on a solid surface under conditions of combined dry friction]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.3, Pp.327-340.
7. Kireenkov A.A. *Further development of the theory of multicomponent dry friction*. Proceedings of the 6th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. COUPLED PROBLEMS'2015, 2015, Pp.203-209.
8. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Anisotropic Combined Dry Friction in Problems of Pneumatics' Dynamics*. Journal of Vibrational Engineering and Technologies, 2020, Vol.8(2), Pp.365-372.
9. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Coupled dry friction models in problems of aviation pneumatics' dynamics*. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, Vol.127, Pp.198-203.

10. Zhavoronok S.I., Kireenkov A.A. *On the effect of the anisotropic dry friction and the deformed state of tires on the shimmy initiation*. Proceedings of the VII International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. Rhodes Island, Greece, 2017, Pp.216-226.
11. Mihajlova E.Yu., Tarlakovskij D.V., Fedotenkov G.V. *Nestatsionarnyj kontakt sfericheskoj obolochki i uprugogo poluprostranstva [Unsteady contact of a spherical shell and an elastic half-space]*. Trudy MAI, 2014, No.78, 10.
12. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. *Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction)*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.239-247.
13. Mihajlova E.Yu., Tarlakovskij D.V., Fedotenkov G.V. *Obobshhennaya linejnaya model' dinamiki tonkikh uprugikh obolochek [Generalized linear model of dynamics of thin elastic shells]*. Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki, 2018, Vol.160, No.3, Pp.561-577.

Поступила в редакцию 06 ноября 2024 года.

Сведения об авторах:

Киреевков Алексей Альбертович – к.ф.-м.н., доц., с.н.с., ФГБУН Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, г. Москва, Россия; e-mail: kireenk@ipmnet.ru, kireenk@mail.ru
Федотенков Григорий Валерьевич – д.ф.-м.н., доц., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: greghome@mail.ru