

УДК 539.3

EDN AJQIAZ (<https://elibrary.ru/ajqiaz>)

DOI 10.33113/mkmk.ras.2025.31.02.01



АНАЛИЗ ФОРМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМЫХ КОМПОЗИТНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ НАГРУЖЕНИЯ*

Паймушин В.Н.^{1,2}, Левшонкова Н.В.¹, Чумакова С.Ф.¹

¹ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», г. Казань, Россия

²ФГБОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», г. Казань, Россия

АННОТАЦИЯ

Проведен анализ трехмерных уравнений теории упругости, составленных для случая конечных перемещений и деформаций твердых тел. Установлено, что при малых деформациях их общепринятые упрощения являются в недостаточной степени обоснованными, что подтверждается постановкой и решением на их основе модельных задач как по определению напряженно-деформированного состояния (НДС), так и критических нагрузок и форм потери устойчивости (ФПУ). В недостаточной степени обоснованными являются также и все известные в механике тонкостенных конструкций уравнения при конечных перемещениях и малых деформациях, базирующиеся на определении деформаций как приращения компонент метрического тензора.

Построены такие геометрически нелинейные уравнения теории упругости при конечных перемещениях и малых деформациях, которые являются корректными и непротиворечивыми. Они оказались абсолютно точными также и в случае больших безсдвиговых деформаций тела. Для прямолинейных упругих стержней, подверженных действию консервативных внешних сил и выполненных из ортотропного материала, на основе использования модели Тимошенко проведена редукция трехмерных линеаризованных уравнений теории упругости к одномерным уравнениям в двух вариантах. Первый из них соответствует использованию непротиворечивого варианта трехмерных геометрически нелинейных соотношений, составленных в неполном квадратичном приближении и модели Тимошенко без учета поперечных деформаций удлинений, а второй – трехмерных соотношений, составленных в полном квадратичном приближении и модели Тимошенко с учетом поперечных деформаций удлинений. С целью проведения качественного анализа их содержательности на их основе сформулирован ряд новых неклассических задач устойчивости стержней и найдены их аналитические решения. К ним относятся, в частности, задачи о крутильных, изгибных и сдвиговых ФПУ стержня при продольном осевом, двухстороннем поперечном и трехстороннем сжатии стержня, об изгибно-крутильной ФПУ при чистом изгибе и осевом сжатии совместно с чистым изгибом, а также об изгибной ФПУ стержня при кручении и изгибно-крутильной ФПУ в условиях чистого сдвига.

Ключевые слова: деформируемое тело; конечные и малые деформации; композитный стержень; модель Тимошенко; формы потери устойчивости

* Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект FZSU-2024-0010).

ANALYSIS OF THE FORMS OF LOSS OF STABILITY OF STRAIGHT COMPOSITE RODS UNDER VARIOUS TYPES OF LOADING

Paimushin V.N.^{1,2}, Levshonkova N.V.¹, Chumakova S.F.¹

¹*A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University, Kazan, Russia*

²*Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia*

ABSTRACT

An analysis of three-dimensional equations of elasticity theory, compiled for the case of finite displacements and deformations of solids, is carried out. It is established that for small deformations, their generally accepted simplifications are insufficiently substantiated, which is confirmed by the formulation and solution of model problems on their basis for determining both the stress-strain state (SSS) and critical loads and stability loss modes (SLM). All equations known in the mechanics of thin-walled structures for finite displacements and small deformations, based on the definition of deformations as an increment of the components of the metric tensor, are also insufficiently substantiated.

Such geometric nonlinear equations of elasticity theory during displacement and small deformations are constructed, which are correct and consistent. They turned out to be absolutely accurate also in the case of large shearless deformations of the body. For rectilinear elastic rods, exposed to conservative external forces and made of orthotropic material, based on the use of Timoshenko models, carried out the reduction of three-dimensional linearized equations of elasticity to one-dimensional equations in two versions. The first of them corresponds to the use of a consistent version of three-dimensional geometrically nonlinear relationships compiled in an incomplete quadratic approximation and the Timoshenko model without taking into account transverse deformations of elongations. The second one is uses the three-dimensional relationships compiled in a complete quadratic approximation and the Timoshenko model taking into account transverse deformations of elongations. In order to carry out a qualitative analysis of their content, a number of new non-classical problems of rod stability have been formulated on their basis and their analytical solutions have been found. These include, in particular, the problems of torsional, bending and shear SLM of the rod with longitudinal axial, two-sided transverse and three-sided compression of the rod, on flexural-torsional SLM with pure bending and axial compression together with pure bending, as well as on bending SLM of the rod with torsion and flexural-torsional SLM under conditions of pure shear.

Keywords: deformable body; finite and small deformations; composite rod; Timoshenko model; forms of loss of stability

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена дальнейшему развитию и обобщению результатов проведенных ранее исследований, некоторые сведения о которых были изложены в статьях [1-4 и др.].

Исследования в области устойчивости стержней так или иначе берут своё начало с исследований Л. Эйлера, проведенных в 40-ых – 80-ых годах 18-го века. Они легли в основу современной инженерной теории расчёта продольно сжатых длинных стержней, а некоторые основополагающие выводы этой теории стали частью курса сопротивления материалов. В инженерных же расчётах с начала 20-го века используется понятие «классическая потеря устойчивости» или «устойчивость по Эйлеру», которое характеризует изгибную форму потери

устойчивости прямолинейного сжатого стержня, соответствующая нагрузка которой может быть найдена с помощью простой и понятной формулы Эйлера. Такая формула и по настоящее время полностью удовлетворяет потребностям инженеров при расчёте стержней под действием консервативной осевой нагрузки. Уточнение формулы Эйлера, которое позволило учитывать различные условия закрепления концов стержня, было дано Ф.С. Ясинским введением понятия приведённой длины стержня.

Развитие ракетной и авиационной отрасли в середине 20-го века привело к необходимости постановки и решению задач устойчивости, в которых нагрузка является следящей (неконсервативной). Широкий круг подобных вопросов в доступной для понимания форме освещён, например, в монографии В.В. Болотина [5].

Несмотря на, казалось бы, уже довольно подробно изученную проблему устойчивости прямых стержней, количество публикаций в научной литературе на данную тему не уменьшается. Об этом свидетельствует, например, обзор [6], который является одним из многих опубликованных по проблемам устойчивости, колебаний и статической прочности стержней из изотропных и композиционных материалов. Главные выводы данного объёмного обзора можно кратко сформулировать в следующей форме: 1) решение задач стержней в плоской постановке для аппроксимации искомых функций по толщине нерационально в расчётной инженерной практике, поэтому следует развивать одномерные модели с учётом сдвиговых деформаций; 2) необходимо развитие уточнённых теорий стержней, в которых бы учитывались поперечные деформации обжатия ε_z ; 3) необходимо развитие уточнённых нелинейных моделей для решения задач устойчивости композитных стержней с различными схемами укладок; 4) применительно к решению задач для стержней необходимо развитие численных методов, таких как: метод конечных разностей, метод Галёркина, метод Рэлея-Ритца, безсеточных методов.

Использование стержней из композиционных материалов с различными тонкостенными профилями поперечного сечения в строительных конструкциях привело к необходимости развития теории и методов их расчёта на устойчивость. Такие вопросы, в частности, освещены в работах [7-11]. В работе [7] решена задача устойчивости криволинейного тонкостенного композитного стержня, закреплённого на упругих опорах. Выявлена пространственная форма потери устойчивости, характеризующаяся выходом осевой линии стержня из первоначальной плоскости. В работе [8] проведены экспериментальные исследования на сжатие прямых стержней с угловым тонкостенным профилем. Стержни изготовлены методом пултрузии на основе однонаправленного стекловолокна. В результате экспериментов выявлена изгибно-крутильная форма потери устойчивости. Отмечается хорошее совпадение полученной в эксперименте критической нагрузки с результатами численных расчётов в пакете прикладных программ, использующем теорию прямой нормали. В работе [9] проведено экспериментальное исследование на сжатие композитных тонкостенных стержней с двутавровым профилем поперечного сечения. Сдвиговая модель третьего порядка была применена в [10] для исследования местной потери устойчивости полок и стенок стержней с двутавровым, угловым и коробчатым тонкостенными профилями поперечного сечения. В работе результаты вычислений были верифицированы с моделями прямой нормали и сдвиговой моделью первого порядка (моделью Тимошенко). Расчёты показали,

что для относительно тонких элементов поперечных сечений все три модели показывают идентичные значения критической сжимающей нагрузки. Исследование двух видов граничных условий на влияние критической сжимающей нагрузки для композитного стержня с поперечным сечением швеллера было проведено в работе [11]. По результатам работы сделан вывод, что граничные условия в виде закрепления одного из концов стержня или шарнирного опирания не влияют на величину критической силы. Стержням с тонкостенным поперечным профилем из алюминиевого сплава посвящена работа [12]. В ней исследовано закритическое поведение стержня в физически нелинейной постановке, когда материал стержня описывался соотношением Рамберта-Осгуда. Авторами отмечается хорошая сходимость построенного аналитического решения с решением коммерческого пакета ABAQUS.

Классические задачи устойчивости прямых стержней с учётом закритического поведения рассмотрены в [13-15]. Прикладное значение такие задачи могут иметь при исследовании устойчивости стержней из эластичных материалов, например, из резины. Материал стержня в работе [13] был принят физически нелинейным, упрочняющимся по степенному закону. Выявлено различное закритическое поведение стержня в зависимости от параметра упрочнения. В работе [14] разработанная в [13] методика использована для исследования устойчивости стержней эллиптического поперечного сечения. Отмечается, что учёт осевых и сдвиговых деформаций в задаче, рассмотренной в [15], значительно влияет на значения критической сжимающей нагрузки.

Задачи устойчивости стержней с непрерывно изменяющимися свойствами материала в поперечном сечении рассматриваются в работах [16-18]. В [16] для трёхслойных стержней применены кинематические соотношения третьего порядка для аппроксимации перемещений по толщине, а в [17] устойчивость стержней из сплошного материала исследуется в рамках классической теории Бернулли-Эйлера. Авторы статьи [18] рассматривают задачу потери устойчивости и закритического поведения защемлённого с двух сторон стержня с круглым поперечным сечением при поперечном изгибе.

В работе [19] авторы рассматривают устойчивость стержня полосы, моделью которой может являться, например, конвейерная лента. Лента жёстко закреплена с обеих сторон. Авторы отмечают, что, если ограничить перемещения полосы из своей плоскости, то критическая сжимающая нагрузка будет соответствовать потере устойчивости по классической изгибной плоской форме. При использовании трёхмерной теории стержней и возможности поперечных перемещений, полоса может терять устойчивость даже, если осреднённые напряжения в поперечном сечении имеют положительный знак. Задача о потере устойчивости сжатого защемленного стержня решена в [16] в рамках прикладной задачи о генерировании энергии при изгибе с помощью пьезоэлектрических элементов, закреплённых на стержне.

Неклассические задачи устойчивости при комбинированном нагружении прямолинейного стержня сжимающей осевой нагрузкой и крутящим моментом рассмотрены в работе [20]. Уравнения равновесия стержня получены на основе уточнённой сдвиговой модели Тимошенко с учётом обжатия в поперечном направлении и непротиворечивых кинематических соотношений теории упругости в квадратичном приближении. Путём линеаризации исходной системы уравнений равновесия получены уравнения нейтрального равновесия, на основе которых построено аналитическое и численное решение при различных

соотношениях величин осевой сжимающей нагрузки и крутящего момента, а также граничных условий. Численный алгоритм решения составлен на основе метода конечных сумм в варианте интегрирующих матриц. В ходе анализа полученных результатов авторами установлено, что для композитного стержня учёт сдвиговых поперечных деформаций наибольшее влияние оказывает на критическую нагрузку при чистом осевом сжатии. При чистом кручении учёт сдвиговых деформаций не влияет на критическую величину крутящего момента.

Задачи устойчивости композитных стержней с различными граничными условиями при сжатии и термомеханическом нагружении рассмотрены в работах [21-23]. Авторы проводят сравнение кинематических соотношений с квадратичной, кубической и экспоненциальной аппроксимацией перемещений по толщине стержня. Решения задачи получены с помощью метода Ритца. Устойчивость составных стержней, элементы которых соединены упругими шарнирами, исследуется в [23].

1. УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И КОНЕЧНЫХ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

1.1. Конечные перемещения и деформации.

Отнесем пространство твердого тела, имеющего до деформации объем V и ограниченного граничной поверхностью Ω , к прямоугольной декартовой системе координат, определяя положение произвольной точки M с координатами x_1, x_2, x_3 радиус-вектором $\mathbf{R} = \sum_1^3 x_\alpha \mathbf{e}_\alpha = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ так, что $\mathbf{R}_\alpha = \partial \mathbf{R} / \partial x_\alpha = \mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ – тензор Кронекера. После деформации тела вектор $\mathbf{R}$ получает приращение за счет вектора перемещений $\mathbf{u} = u_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ и при этом

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{R}_\alpha^* = \partial \mathbf{R}^* / \partial x_\alpha = (\delta_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta}) \mathbf{e}_\beta, \quad e_{\alpha\beta} = \partial u_\beta / \partial x_\alpha, \quad (1.1)$$

а компоненты основного метрического тензора после деформации тела будут равны $g_{\alpha\beta}^* = g_{\alpha\beta}^* = \mathbf{R}_\alpha^* \mathbf{R}_\beta^* = \delta_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha\beta}$, где величины

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha} + e_{\alpha\gamma} e_{\beta\gamma} \quad (1.2)$$

в современной механике деформируемого твердого тела принимаются за меру как конечных, так и малых деформаций при произвольных перемещениях, которые получили название компонент тензора деформаций Коши-Грина.

Длины отрезков координатных линий, равные $dl_\alpha = dx_\alpha$ до деформации тела, после деформации будут равны $dl_\alpha^* = dx_\alpha \sqrt{1 + 2\varepsilon_{\alpha\alpha}}$. Поэтому истинные деформации [24] удлинений ε_α вдоль координатных линий x_α определяются по формулам

$$\varepsilon_\alpha = dl_\alpha^* / dl_\alpha - 1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{\alpha\alpha}} - 1. \quad (1.3)$$

Так как $|\mathbf{R}_\alpha^*| = \sqrt{\mathbf{R}_\alpha^* \cdot \mathbf{R}_\alpha^*} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{\alpha\alpha}}$, то для единичных векторов $\mathbf{e}_\alpha^* = \mathbf{R}_\alpha^* / |\mathbf{R}_\alpha^*|$, являющихся касательными векторами к координатным линиям x_α после деформации тела, в силу следующих из (1.3) равенств $\sqrt{1 + 2\varepsilon_{\alpha\alpha}} = 1 + \varepsilon_\alpha$, имеют место соотношения

$$\mathbf{e}_\alpha^* = (1 + 2\varepsilon_{\alpha\alpha})^{-1/2} (\delta_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta}) \mathbf{e}_\beta = (1 + \varepsilon_\alpha)^{-1} (\delta_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta}) \mathbf{e}_\beta. \quad (1.4)$$

Используя теперь формулы (1.4), для сдвиговых деформаций тела приходим к кинематическим зависимостям

$$\sin \gamma_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} (1 + 2\varepsilon_{\alpha\alpha})^{-1/2} (1 + 2\varepsilon_{\beta\beta})^{-1/2} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} (1 + \varepsilon_\alpha)^{-1} (1 + \varepsilon_\beta)^{-1}. \quad (1.5)$$

Как видно из (1.3) и (1.5), деформации удлинений ε_α и сдвигов $\sin \gamma_{\alpha\beta}$ выражаются через приращения компонент метрического тензора $2\varepsilon_{\alpha\beta}$. Поэтому они и получили название компонент тензора деформаций.

На плоскостях $x_\alpha = \text{const}$, проведенных через точку M тела до его деформации, выделим прямоугольные площадки $S_1 = dx_2 dx_3$, $S_2 = dx_1 dx_3$, $S_3 = dx_1 dx_2$, которые после деформации тела будут иметь площади [24] (символ $\overline{1,2,3}$ здесь и в дальнейшем означает, что не приведенные соотношения получаются из приведенных круговой перестановкой индексов)

$$S_1^* = S_1 \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{22})(1 + 2\varepsilon_{33}) - 4\varepsilon_{23}^2}; \quad \overline{1,2,3}. \quad (1.6)$$

На этих деформированных площадках, следуя [24], введем в рассмотрение векторы напряжений $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta^*$, компоненты которых отнесены к единицам площадей S_α^* и по В.В. Новожилову называются истинными напряжениями, а также векторы напряжений σ_1^* , σ_2^* , σ_3^* , заданные разложениями $\sigma_\alpha^* = \sigma_{\alpha\beta}^* \mathbf{R}_\beta^*$. В них компоненты $\sigma_{\alpha\beta}^*$ отнесены к единицам площадей S_α до деформации тела и по В.В. Новожилову называются обобщенными (условными) напряжениями. Так как между σ_α и σ_α^* должны выполняться равенства $S_\alpha \sigma_\alpha^* = S_\alpha^* \sigma_\alpha$, то между $\sigma_{\alpha\beta}^*$ и $\sigma_{\alpha\beta}$ имеют место зависимости

$$\sigma_{\alpha\beta}^* = \frac{S_\alpha^*}{S_\alpha} \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{1 + \varepsilon_\beta}, \quad (1.7)$$

где

$$S_1^*/S_1 = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{22})(1 + 2\varepsilon_{33}) - 4\varepsilon_{23}^2}; \quad \overline{1,2,3}. \quad (1.8)$$

По определению $\sigma_{\alpha\beta}^* = \sigma_{\beta\alpha}^*$, но при этом $\sigma_{\alpha\beta} \neq \sigma_{\beta\alpha}$, как это следует из (1.7).

Исходя из (1.5), устанавливаются зависимости

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = (1 + \varepsilon_\alpha)(1 + \varepsilon_\beta) \sin \gamma_{\alpha\beta}. \quad (1.9)$$

Поэтому зависимости (1.7) при использовании (1.8), (1.9) можно представить в виде формул

$$\sigma_{11}^* = \frac{\sigma_{11}}{1 + \varepsilon_1} (1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \cos \gamma_{23}, \quad (1.10)$$

$$\sigma_{12}^* = \sigma_{12} (1 + \varepsilon_3) \cos \gamma_{23} = \sigma_{21} (1 + \varepsilon_3) \cos \gamma_{13} = \sigma_{21}^*; \quad \overline{1,2,3},$$

которые оказываются весьма удобными для проведения дальнейшего анализа.

И, наконец, для векторов обобщенных напряжений σ_α^* примем представления $\sigma_\alpha^* = s_{\alpha\beta}^* \mathbf{e}_\beta$, где, как не трудно показать,

$$s_{\alpha\beta}^* = \sigma_{\alpha\gamma}^* (\delta_{\gamma\beta} + e_{\gamma\beta}). \quad (1.11)$$

Если ввести в рассмотрение векторы объемных сил F^* и F , связанные зависимостями $F^* = F dV^*/dV = DF$, где $D = \sqrt{g^*/g}$, $g^* = \det(g_{\alpha\beta}^*)$, $g = \det(g_{\alpha\beta}) = \det(\delta_{\alpha\beta}) = 1$, то при использовании представления $F^* = F_\alpha^* e_\alpha$ уравнения статического равновесия тела относительно компонент $s_{\alpha\beta}^*$ и F_α^* запишутся в виде

$$s_{\alpha\beta,\beta}^* + F_\beta^* = 0. \quad (1.12)$$

Предположим, что граничная поверхность тела Ω ограничена координатными плоскостями $x_\alpha = x_\alpha^-$, $x_\alpha = x_\alpha^+$, на которых заданы векторы поверхностных внешних сил в двух вариантах представлений $p_\alpha^* = p_{\alpha\beta}^* e_\beta$, $p_\alpha = p_{\alpha\beta} e_\beta$ и так, что

$$p_\alpha^* = \frac{S_\alpha^*}{S_\alpha} p_\alpha. \quad (1.13)$$

Тогда в точках граничных поверхностей для уравнений (1.12) должны быть заданы граничные условия вида

$$\sigma_{\alpha\gamma}^* (\delta_{\gamma\beta} + e_{\gamma\beta}) = p_{\alpha\beta}^* \quad \text{при} \quad \delta u_\beta \neq 0. \quad (1.14)$$

Все изложенные выше результаты практически в полном виде (за исключением зависимостей (1.10)) известны в научной литературе, подробный вывод которых дан в монографиях В.В. Новожилова (в частности, в [24]). Для дальнейшего их анализа и упрощений принципиальное значение имеет рассмотрение простейшего частного вида деформирования тела в виде прямоугольного параллелепипеда.

Пусть во всех точках тела $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$. Такой случай в деформируемом теле может реализоваться при всестороннем растяжении-сжатии, если материал тела, предполагаемого невесомым ($F_\alpha^* = 0$), является или изотропным, или ортотропным с осями ортотропии, совпадающими с осями используемой системы координат. Очевидно, равенства $\gamma_{\alpha\beta} = 0$ ($\alpha \neq \beta$) могут быть выполнены только при выполнении равенств

$$e_{12} = e_{21} = e_{13} = e_{31} = e_{23} = e_{32} = 0, \quad (1.15)$$

в силу которых зависимости (1.2) принимают вид

$$2\varepsilon_{11} = 2e_{11} + e_{11}^2, \quad 2\varepsilon_{22} = 2e_{22} + e_{22}^2, \quad 2\varepsilon_{33} = 2e_{33} + e_{33}^2. \quad (1.16)$$

Следовательно, в соответствии с (1.3) для деформаций удлинений абсолютно точными являются соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} - 1 = \sqrt{(1 + e_{11})^2} - 1 = e_{11} = \partial u_1 / \partial x_1, \\ \varepsilon_2 &= \partial u_2 / \partial x_2, \quad \varepsilon_3 = \partial u_3 / \partial x_3 \end{aligned} \quad (1.17)$$

при произвольных перемещениях и деформациях.

С учетом (1.10), (1.15) и (1.17) формулы (1.11) запишутся в виде

$$\begin{aligned} s_{11}^* &= \sigma_{11}^* (1 + e_{11}) = \sigma_{11} (1 + e_{22}) (1 + e_{33}), \\ s_{22}^* &= \sigma_{22} (1 + e_{11}) (1 + e_{33}), \quad s_{33}^* = \sigma_{33} (1 + e_{11}) (1 + e_{22}), \\ s_{\alpha\beta}^* &= 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta \end{aligned} \quad (1.18)$$

В силу (1.18) точным решением рассматриваемой задачи будут равенства

$$\sigma_{\alpha\alpha}^* = p_{\alpha\alpha}^* = \text{const} \text{ или } \sigma_{\alpha\alpha} = p_{\alpha\alpha} = \text{const}, \quad (1.19)$$

в которых $p_{\alpha\alpha}^*$, $p_{\alpha\alpha}$ – интенсивности внешних поверхностных сил, отнесенных к единицам площадей граней $x_\alpha = x_\alpha^-$ и $x_\alpha = x_\alpha^+$ до и после деформации тела.

1.2. Упрощения основных уравнений, возможные при малых удлинениях и сдвигах.

Соотношения (1.3) представим в виде $\varepsilon_\alpha (2 + \varepsilon_\alpha) = 2\varepsilon_{\alpha\alpha}$, откуда при малых деформациях удлинений $\varepsilon_\alpha \ll 1$ с точностью $2 + \varepsilon_\alpha \approx 2$ следуют приближенные формулы

$$\varepsilon_\alpha \approx \varepsilon_{\alpha\alpha}, \quad (1.20)$$

а с точностью $1 + \varepsilon_\alpha \approx 1$ вместо (1.5) будем иметь приближенные формулы

$$\sin \gamma_{12} \approx 2\varepsilon_{12}, \quad \sin \gamma_{13} \approx 2\varepsilon_{13}, \quad \sin \gamma_{23} \approx 2\varepsilon_{23}. \quad (1.21)$$

Последние при использовании зависимостей (1.2) в развернутой форме представимы в виде

$$\varepsilon_1 \approx \varepsilon_{11} = e_{11} + (e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2)/2; \quad \overline{1,2,3}, \quad (1.22)$$

$$\sin \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = (1 + e_{11})e_{21} + (1 + e_{22})e_{12} + e_{13}e_{23}; \quad \overline{1,2,3}, \quad (1.23)$$

которые справедливы при малых деформациях удлинений и произвольных сдвиговых деформациях. Такому деформированному состоянию твердого тела соответствуют упрощенные формулы

$$S_1^*/S_1 = \cos \gamma_{23}, \quad S_2^*/S_2 = \cos \gamma_{13}, \quad S_3^*/S_3 = \cos \gamma_{12}, \quad (1.24)$$

$$\sigma_{11}^* = \sigma_{11} \cos \gamma_{23}, \quad \sigma_{12}^* = \sigma_{12} \cos \gamma_{23} = \sigma_{21} \cos \gamma_{13}; \quad \overline{1,2,3}, \quad (1.25)$$

следующие из (1.7) и (1.10) с точностью $1 + \varepsilon_\alpha \approx 1$.

Если наряду с предположениями $\varepsilon_\alpha \ll 1$ считать малыми и углы сдвига, полагая

$$\sin \gamma_{12} \approx \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}, \quad \sin \gamma_{13} \approx \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}, \quad \sin \gamma_{23} \approx \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}, \quad (1.26)$$

то формулы (1.24) и (1.25) при введении предположений $\cos \gamma_{12} \approx \cos \gamma_{13} \approx \cos \gamma_{23} \approx 1$ допускают дальнейшие упрощения

$$S_\alpha^*/S_\alpha \approx 1, \quad \sigma_{\alpha\beta}^* \approx \sigma_{\alpha\beta}. \quad (1.27)$$

Кинематические соотношения (1.22) и (1.26) хорошо известны в научной литературе, получили название кинематических соотношений геометрически нелинейной теории упругости в квадратичном приближении и приводятся в монографиях и учебниках по механике деформируемого твердого тела как абсолютно корректные при малых деформациях, когда в соответствии с (1.27) не имеет практического смысла вводить различия между компонентами обобщенных $\sigma_{\alpha\beta}^*$ и истинных $\sigma_{\alpha\beta}$ напряжений. При этом в силу (1.27) формулы (1.11) и уравнения равновесия (1.12) представимы в упрощенном виде

$$s_{\alpha\beta}^* = \sigma_{\alpha\gamma}^* (\delta_{\gamma\beta} + e_{\gamma\beta}) \approx s_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\gamma} (\delta_{\gamma\beta} + e_{\gamma\beta}), \quad (1.28)$$

$$s_{\alpha\beta,\alpha} + F_\beta = 0, \quad F_\alpha \approx F_\alpha^*, \quad (1.29)$$

которые во всей научной и учебной литературе по механике деформируемых твердых тел рекомендуется использовать как абсолютно строго обоснованные для случая малых деформаций.

Исходя из составленных соотношений, сформулируем задачу о трехстороннем растяжении-сжатии невесомого прямоугольного параллелепипеда ($F^* = 0$). Так как при таком нагружении в силу $p_{\alpha\beta}^* \approx p_{\alpha\beta} = 0$ ($\alpha \neq \beta$) имеют место равенства (1.15), то формулы (1.28), уравнения равновесия (1.29) и граничные условия (1.14) принимают вид

$$s_{11} = \sigma_{11}(1 + e_{11}), \quad s_{22} = \sigma_{22}(1 + e_{22}), \quad s_{33} = \sigma_{33}(1 + e_{33}), \quad (1.30)$$

$$\partial s_{11} / \partial x_1 = 0, \quad \partial s_{22} / \partial x_2 = 0, \quad \partial s_{33} / \partial x_3 = 0, \quad (1.31)$$

$$s_{11} = p_{11}(x_2, x_3 \in \Omega_1), \quad s_{22} = p_{22}(x_1, x_3 \in \Omega_2), \quad s_{33} = p_{33}(x_1, x_2 \in \Omega_3). \quad (1.32)$$

При граничных условиях (1.32) уравнения (1.31) имеют решения

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(1 + e_{11}) &= p_{11} = \text{const}, & \sigma_{22}(1 + e_{22}) &= p_{22} = \text{const}, \\ \sigma_{33}(1 + e_{33}) &= p_{33} = \text{const}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

которые принципиально отличаются от построенного ранее точного решения (1.19).

Предположим далее, что $p_{22} = p_{33} = 0$, а напряжение σ_{11} с деформацией $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_{11}$ (в рамках исследуемого приближения) связано законом Гука

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_1 \approx E\varepsilon_{11} = E(e_{11} + e_{11}^2/2). \quad (1.34)$$

При использовании (1.34) первая формула из (1.33) принимает вид

$$e_{11}^3 + \frac{3}{2}e_{11}^2 + 2e_{11} + C = 0, \quad C = -\frac{p_{11}}{E} = \frac{p}{E}, \quad (1.35)$$

где $p = -p_{11}$ – сжимающее усилие, равномерное распределенное в точках торцевых сечений Ω_1 .

Полученное кубическое уравнение (1.35) имеет действительное решение в виде

$$\begin{aligned} e_{11} = u_{,x} &= \frac{1}{6} \left(81 - 108C + 6\sqrt{276 - 486C + 324C^2} \right)^{1/3} - \\ &- \frac{5}{2} \left(81 - 108C + 6\sqrt{276 - 486C + 324C^2} \right)^{-1/3} - \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

которое принципиально отличается от единственного решения рассматриваемой задачи

$$e_{11} = \varepsilon_1 = p_{11}/E = -p/E, \quad (1.37)$$

являющегося абсолютно точным при любых деформациях и следующего из (1.19) при использовании закона Гука $\sigma_{11} = E\varepsilon_1 = Ee_{11}$.

Причина установленного парадокса и полученного «абсурдного» решения (1.36) весьма проста: если в рамках точной постановки задачи при предельном переходе к случаю деформированного состояния, характеризующегося равенствами (1.15), имеют место преобразования

$$\begin{aligned} \frac{S_1^* \sigma_{11} \delta \varepsilon_{11}}{S_1 (1 + \varepsilon_1)} &= \frac{S_1^* \sigma_{11} (1 + e_{11}) \delta e_{11}}{S_1 (1 + e_{11})} = \frac{S_1^* \sigma_{11} \delta u_{,x}}{S_1} = \\ &= (1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \sigma_{11} \delta u_{,x} = \sigma_{11}^* \delta u_{,x}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

то в рамках приближения

$$1 + \varepsilon_1 \approx 1, \quad S_1^*/S_1 \approx 1, \quad \varepsilon_1 \approx \varepsilon_{11} = e_{11} + e_{11}^2/2, \quad (1.39)$$

$$\delta \varepsilon_{11} = (1 + e_{11}) \delta e_{11} = (1 + e_{11}) \delta u_{,x}$$

вместо (1.38) имеют место преобразования

$$\frac{S_1^*}{S_1} \frac{\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11}}{1 + \varepsilon_1} = \sigma_{11} \delta e_{11} = \sigma_{11} (1 + e_{11}) \delta e_{11}. \quad (1.40)$$

Использование (1.40) как раз и приводит к задаче (1.30)-(1.32) и ее решению в виде (1.33), (1.36).

Для того чтобы устранить установленный дефект приближенных соотношений (1.22) и получающихся от их использования зависимостей (1.28) и уравнений (1.29), достаточно отбросить в (1.22) слагаемые вида $e_{\alpha\alpha}^2/2$, представив их в виде

$$\varepsilon_1 \approx \varepsilon_{11} \approx e_{11} + (e_{12}^2 + e_{13}^2)/2; \quad \overline{1,2,3}. \quad (1.41)$$

При этом соотношения (1.23) остаются без изменений, в (1.28) зависимости для S_{11} , S_{22} , S_{33} принимают вид

$$S_{11}^* = \sigma_{11}^* (1 + e_{11}) + \sigma_{12}^* e_{21} + \sigma_{13}^* e_{31} = \left[\frac{\sigma_{11}}{1 + \varepsilon_1} (1 + e_{11}) (1 + \varepsilon_2) (1 + \varepsilon_3) + \right. \\ \left. + \sigma_{12} e_{21} (1 + \varepsilon_3) + \sigma_{13} e_{31} (1 + \varepsilon_2) \right] \cos \gamma_{23} \approx \sigma_{11} + \sigma_{12} e_{21} + \sigma_{13} e_{31}; \quad \overline{1,2,3}, \quad (1.42)$$

в то время как для $s_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) остаются без изменений

$$s_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\gamma} (\delta_{\gamma\beta} + e_{\gamma\beta}) \neq s_{\beta\alpha}; \quad \alpha \neq \beta. \quad (1.43)$$

Необходимо отметить, что составленные соотношения (1.41), (1.23), (1.42) (1.43) справедливы при малых деформациях удлинений ε_α и произвольных сдвиговых деформациях $\sin \gamma_{\alpha\beta}$. В связи с этим входящие в них компоненты касательных напряжений несимметричны, о чем свидетельствуют установленные формулы (1.25). В соответствии с этими формулами можно считать справедливыми равенства $\sigma_{\alpha\beta} \approx \sigma_{\beta\alpha}$ лишь в том случае, когда допустимо принять

$$\cos \gamma_{\alpha\beta} \approx 1. \quad (1.44)$$

С пятипроцентной точностью, обычно принятой в расчетной практике, приближенные равенства (1.44) выполняются при $\gamma_{\alpha\beta} \leq 18^\circ$ ($\alpha \neq \beta$), а приближенные равенства $1 + \varepsilon_\alpha \approx 1$ – при $\varepsilon_\alpha \leq 0.05$.

В частных случаях, когда сдвиговая деформация происходит только в одной плоскости и без появления деформаций ε_α , парность истинных касательных напряжений выполняется и без введения каких-либо ограничений на сдвиговые деформации. Действительно, при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, когда $\gamma_{12} \neq 0$, $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$, имеет место равенство $\sigma_{12}^* = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{21}^*$, а когда $\gamma_{13} \neq 0$, $\gamma_{12} = \gamma_{23} = 0$, приходим к равенству $\sigma_{13}^* = \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{31}^*$ и т.д. Следовательно, при таких видах деформаций твердого тела энергетически согласованным обобщенным перемещением для σ_{12} будет $\sin \gamma_{12}$, а не γ_{12} . В то же время угол γ_{12} , как можно показать, является обобщенным перемещением для $\tau_{12}^* = \sigma_{12} \cos \gamma_{12} = \sigma_{21} \cos \gamma_{12}$. Данное замечание имеет непосредственное отношение к форме представления

закона Гука при сдвиге и к задаче обработки соответствующих экспериментальных данных при значительных сдвиговых деформациях, т.е. для линейно-упругого материала при значительных деформациях сдвига закон Гука должен быть представлен в виде (G – модуль сдвига) $\tau = G \sin \gamma$, а не в виде $\tau = G\gamma$, как это везде принято. Заметим, однако, что при $\gamma \leq 18^\circ$, когда допустимо принять приближенные равенства (1.44), при замене $\sin \gamma$ на угол γ в радианах вносится погрешность всего лишь порядка 1,5%.

Анализу содержательности и степени точности соотношений (1.22), (1.23) был посвящен ряд исследований. Так, например, Доннел [25], используя разложения ε_α и $\gamma_{\alpha\beta}$ в ряд Тейлора и ограничиваясь квадратичными членами, получил соотношения

$$\varepsilon_1 = u_{1,1} + (u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2)/2, \dots, \quad (1.45)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = (1 - u_{1,1})u_{1,2} + (1 - u_{2,2})u_{2,1} + u_{3,1}u_{3,2}, \dots \quad (1.46)$$

Из них соотношения (1.45), полученные в работе Донелл [25], и соотношения (1.23), составленные в работе В.В. Новожилова [24], при малых деформациях, как показано в работах [1,2], являются корректными и непротиворечивыми.

Упрощенными и непротиворечивыми являются соотношения (1.45) для ε_α и соотношения

$$\gamma_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} + u_{3,1}u_{3,2}, \dots, \quad (1.47)$$

с точностью $1 + u_{1,1} \approx 1$, $1 + u_{2,2} \approx 1$, $1 + u_{3,3} \approx 1$, следующие из (1.23) и (1.46) и рекомендованные в [26] для практического использования.

Если определять деформацию $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_{11}$ в линейном приближении, то приходим к найденному точному решению $e_{11} = -C$, $\sigma_{11} = -p$ рассматриваемой одномерной задачи. Проведя в окрестности этого решения линеаризацию уравнения равновесия ($u = u_1$)

$$\frac{ds_{11}}{dx} = \frac{d[(1 + u_{,x})E(u_{,x} + u_{,x}^2/2)]}{dx} = 0,$$

получим линеаризованное уравнение нейтрального равновесия $(E - p)u_{,xx} = 0$.

Данное уравнение имеет нетривиальное решение $u_{,xx} \neq 0$ при бифуркационном значении сжимающей нагрузки p , равном $p_* = E$. Оно было установлено в работе [2], а ему подобное – в работе [27], которые физически соответствуют явлениям «ложной» потери устойчивости тела при его сжатии, причем с сохранением прямолинейности оси x .

Таким образом, кинематические соотношения (1.45) и (1.23), использование которых для описания элементарных состояний приводит к точным решениям задач, а при введении ограничений $\varepsilon_\alpha \ll 1$, $\cos \gamma_{\alpha\beta} \ll 1$ позволяет считать компоненты истинных напряжений симметричными, являются непротиворечивыми и абсолютно корректными. Будем их называть кинематическими соотношениями нелинейной теории упругости в полном квадратичном приближении.

2. УРАВНЕНИЯ И ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ, ОСНОВАННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕПОЛНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ В КВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

2.1. Редукция трёхмерных уравнений к одномерным.

Исследования, связанные с построением геометрически нелинейных уравнений теории упругих и неупругих стержней при произвольных перемещениях, а также с изучением их ФПУ при действии различного вида консервативных и неконсервативных нагрузок, весьма обширны. Основные результаты в этой области были получены еще до 60-70-ых годов прошлого века. Они связаны с именами Л. Эйлера, Е.Л. Николаи, Г.Ю. Джанедлидзе, В.И. Феодосьева, В.В. Болотина, А. Пфлюгера и многих других ученых. Для справки укажем лишь монографию В.В. Болотина [5], в которой приводятся некоторые исторические сведения и результаты решения ряда задач устойчивости стержней при нестандартных видах нагружения. К числу таких задач, в частности, можно отнести задачу об устойчивости плоской формы изгиба стержней, которая приводится даже в некоторых учебниках по курсу сопротивления материалов, и задачу об устойчивости равновесия скрученного стержня. Детальный анализ этих задач содержится в упомянутой монографии В.В. Болотина.

Казалось бы в области теории устойчивости стержней все предельно ясно и давным-давно известно.

Необходимость проведения дальнейших исследований по проблемам устойчивости стержней выявилась практически неожиданно и связана с изложенными выше результатами, которые частично были отражены в работах [1,2,27 и др.]. В них были рассмотрены и простейшие примеры применения построенных выше непротиворечивых соотношений, связанные с редукцией двумерной нелинейной задачи деформирования полосы в виде стержня к одномерным уравнениям и последующим их использованием для выявления возможных ФПУ при характерных видах их нагружения. Из полученных результатов принципиально новыми оказались результаты, связанные с исследованием ФПУ стержня при его равномерном поперечном сжатии и чистом сдвиге. В первом случае существенным оказывается поведение нагрузки: если она остается нормальной к деформированной оси стержня, то бифуркация возможна только по сдвиговой форме, если же сохраняет свое направление, то, кроме бифуркации по сдвиговой форме, возможна изгибная ФПУ, совпадающая по форме с Эйлеровой, при которой сдвиги отсутствуют. Во втором случае при действии нагрузки, вызывающей чистый сдвиг стержня, для выявления ее бифуркационных значений сдвиговые деформации необходимо описывать нелинейными кинематическими соотношениями в полном квадратичном варианте, в то время как при отсутствии докритических касательных напряжений для описания сдвиговых деформаций допустимо использование упрощенных соотношений.

Описанные результаты потребовали проведения определенной ревизии всех вариантов нелинейной теории стержней при произвольных перемещениях, известных к настоящему времени, а также разработки таких ее вариантов, использование которых позволило бы выявить и корректно исследовать все возможные известные и неизвестные ФПУ стержней при их классических и неклассических видах нагружения (плоские изгибные и сдвиговые, плоские

изгибно-сдвиговые, пространственные изгибные и изгибно-крутильные, пространственные изгибно-сдвигово-крутильные).

Предположим, что для величин $e_{\alpha\alpha}$ имеют место оценки $e_{\alpha\alpha} \ll 1$, $1 + e_{\alpha\alpha} \approx 1$. Тогда для определения деформаций удлинений ε_1 , ε_2 , ε_3 и сдвигов γ_{12} , γ_{13} , γ_{23} можно использовать кинематические соотношения в неполном квадратичном приближении следующего вида

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e_{11} + (e_{12}^2 + e_{13}^2)/2, \dots, & \gamma_{12} &= e_{12} + e_{21} + e_{13}e_{23}, \dots, \\ e_{\alpha\beta} &= \partial u_\alpha / \partial x_\beta; & \alpha, \beta &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

При использовании соотношений (2.1) между компонентами напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ в деформированных осях x_α^* и компонентами напряжений $s_{\alpha\beta}$ в недеформированных осях x_α устанавливаются зависимости

$$\begin{aligned} s_{11} &= \sigma_{11} + \sigma_{12}e_{21} + \sigma_{13}e_{31}, & s_{12} &= \sigma_{12} + \sigma_{11}e_{12} + \sigma_{13}e_{32}, \\ s_{13} &= \sigma_{13} + \sigma_{11}e_{13} + \sigma_{12}e_{23}; & \overline{1, 2, 3}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

причем $s_{\alpha\beta}^* \neq s_{\beta\alpha}^*$, в то время как $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$.

Для линейно упругого ортотропного материала, имеющего в осях ортотропии x_α модули упругости E_α , сдвигов G_{12} , G_{13} , G_{23} и коэффициенты Пуассона $\nu_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$) справедливы общеизвестные соотношения обобщенного закона Гука

$$\sigma_{\alpha\alpha} = g_{\alpha 1}\varepsilon_1 + g_{\alpha 2}\varepsilon_2 + g_{\alpha 3}\varepsilon_3, \quad \sigma_{12} = G_{12}\gamma_{12}, \dots \quad (2.3)$$

в которых величины $g_{\alpha\beta}$ через E_α и $\nu_{\alpha\beta}$ выражаются по формулам, приведенным, например, в книге [29].

Если произвести линеаризацию составленных соотношений в окрестности некоторого начального напряженного состояния с компонентами $\sigma_{\alpha\beta}^0$, формирующимися от действия консервативных внешних сил, то в нейтральном равновесном состоянии стержня без учета деформационных параметрических слагаемых можно составить вариационное уравнение следующего вида

$$\iiint_V s_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} dV = 0, \quad (2.4)$$

где для малых приращений перемещений u_α , величин $e_{\alpha\beta} = \partial u_\alpha / \partial x_\beta$ и компонент напряжений $s_{\alpha\beta}$ сохранены прежние обозначения, но в отличие от (2.2) и (2.3)

$$\begin{aligned} s_{11} &= \sigma_{11}^0 + \sigma_{12}^0 e_{21} + \sigma_{13}^0 e_{31}, & s_{12} &= \sigma_{12}^0 + \sigma_{11}^0 e_{12} + \sigma_{13}^0 e_{32}, \\ s_{13} &= \sigma_{13}^0 + \sigma_{11}^0 e_{13} + \sigma_{12}^0 e_{23}; & \overline{1, 2, 3}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= g_{\alpha 1}e_{11} + g_{\alpha 2}e_{22} + g_{\alpha 3}e_{33}; & \alpha &= 1, 2, 3, \\ \sigma_{12} &= G_{12}(e_{12} + e_{21}), \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Введя далее обозначения $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и предполагая, что в каждом поперечном сечении стержня $x = \text{const}$ оси y и z являются главными центральными осями инерции, для вектора перемещений $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$ примем следующее представление [3,4] ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные орты декартовой системы координат)

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k} = u(x) \mathbf{i} + v(x) \mathbf{j} + w(x) \mathbf{k} + \boldsymbol{\varphi}(x) \times \boldsymbol{\rho} = \\
&= u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k} + (\varphi \mathbf{i} + \psi \mathbf{j} + \chi \mathbf{k}) \times (y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) = \\
&= (u + z\psi - y\chi) \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k} + (-z\mathbf{j} + y\mathbf{k}) \boldsymbol{\varphi},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

при использовании которого для величин $e_{\alpha\beta}$ будут иметь место соотношения

$$\begin{aligned}
e_{11} &= u' + z\psi' - y\chi', & e_{12} &= v' - z\phi', & e_{13} &= w' + y\phi', \\
e_{21} &= -\chi, & e_{23} &= \phi, & e_{31} &= \psi, & e_{32} &= -\phi, & e_{22} &= e_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Следует отметить, что принятое представление соответствует известной кинематической модели Тимошенко в простейшем ее варианте, при использовании которой в соответствии с соотношениями (2.7) приходим к нулевым приращениям деформаций $\gamma_{23} = e_{23} + e_{32} = 0$, $\varepsilon_2 = e_{22} = 0$, $\varepsilon_3 = e_{33} = 0$ (кинематические гипотезы теории стержней). В дополнение к ним примем классические в теории стержней статические гипотезы $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{33} = 0$, при использовании которых приходим к соотношению закона Гука $\sigma_{11} = E_1 \varepsilon_1 = E_1 e_{11}$. В результате, в предположении о том, что в начальном состоянии $\sigma_{23}^0 = 0$, с учетом соотношений (2.8) вместо зависимостей (2.5) получим редуцированные зависимости

$$\begin{aligned}
s_{11} &= E_1 (u' + z\psi' - y\chi') - \sigma_{12}^0 \chi + \sigma_{13}^0 \psi, \\
s_{12} &= (G_{12} + \sigma_{11}^0) (v' - z\phi') - G_{12} \chi - \sigma_{13}^0 \phi, \quad \sigma_{13}^* = \\
&= (G_{13} + \sigma_{11}^0) (w' + y\phi') + G_{13} \psi + \sigma_{12}^0 \phi, \\
s_{21} &= -(G_{12} + \sigma_{22}^0) \chi + G_{12} (v' - z\phi'), & s_{23} &= \sigma_{12}^0 (w' + y\phi') + \sigma_{22}^0 \phi, \\
s_{31} &= (G_{13} + \sigma_{33}^0) \psi + G_{13} (w' + y\phi'), & s_{32} &= -\sigma_{33}^0 \phi + \sigma_{13}^0 (v' - z\phi'),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

а при подстановке (2.8) в (2.4) приходим к вариационному уравнению вида

$$\begin{aligned}
&\int_0^a (Q_x^* \delta u' + M_y^* \delta \psi' + M_z^* \delta \chi' + Q_y^* \delta v' + Q_z^* \delta w' + M_x^* \delta \phi' + \\
&\quad + N_z^* \delta \psi + N_y^* \delta \chi + N_x^* \delta \phi) dx = 0,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где введены обозначения для внутренних усилий и моментов

$$\begin{aligned}
Q_x^* &= \iint_F s_{11} dF, & Q_y^* &= \iint_F s_{12} dF, & Q_z^* &= \iint_F s_{13} dF, \\
M_y^* &= \iint_F s_{11} z dF, & M_z^* &= -\iint_F s_{11} y dF, & M_x^* &= \iint_F (s_{13} y - s_{12} z) dF, \\
N_z^* &= \iint_F s_{31} dF, & N_y^* &= -\iint_F s_{21} dF, & N_x^* &= \iint_F (s_{23} - s_{32}) dF.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

После стандартных преобразований из (2.10) следуют однородные уравнения нейтрального равновесия стержня в усилиях и моментах

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_x^*}{dx} &= 0, & \frac{dQ_y^*}{dx} &= 0, & \frac{dQ_z^*}{dx} &= 0, & \frac{dM_y^*}{dx} - N_z^* &= 0, \\
\frac{dM_z^*}{dx} - N_y^* &= 0, & \frac{dM_x^*}{dx} - N_x^* &= 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

и граничные условия в сечениях $x = 0$, $x = a$

$$\begin{aligned} Q_x^* = 0 \text{ при } \delta u \neq 0, \quad Q_y^* = 0 \text{ при } \delta v \neq 0, \quad Q_z^* = 0 \text{ при } \delta w \neq 0, \\ M_y^* = 0 \text{ при } \delta \psi \neq 0, \quad M_z^* = 0 \text{ при } \delta \chi \neq 0, \quad M_x^* = 0 \text{ при } \delta \phi \neq 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Предположим, что входящие в соотношения (2.9) начальные напряжения $\sigma_{12}^0, \sigma_{13}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{33}^0$ заданы осредненными по поперечному сечению значениями, а начальное нормальное напряжение σ_{11}^0 в первом приближении определяется формулой сопротивления материалов

$$\sigma_{11}^0 = \frac{Q_x^0}{F} + y \frac{M_z^0}{J_z} + z \frac{M_y^0}{J_y}, \quad (2.14)$$

в которой Q_x^0, M_z^0, M_y^0 – осевая сила и внутренние изгибающие моменты в сечениях $x = \text{const}$; J_y, J_z – моменты инерции поперечного сечения относительно главных центральных осей.

Если считать, что конфигурация поперечных сечений стержня удовлетворяет условиям $\iint_F y^3 dF = 0, \iint_F z^3 dF = 0$, то в силу принятых предположений при подстановке выражений (2.8) в формулы (2.10) приходим к соотношениям упругости следующего вида

$$\begin{aligned} Q_x^* &= F(E_1 u' - \sigma_{12}^0 \chi + \sigma_{13}^0 \psi), \quad Q_y^* = G_{12} F(v' - \chi) + Q_x^0 v' - M_y^0 \phi' - \sigma_{13}^0 F \phi, \\ Q_z^* &= G_{13} F(w' + \psi) + Q_x^0 w' + M_z^0 \phi' + \sigma_{12}^0 F \phi, \\ M_y^* &= E_1 J_y \psi', \quad M_z^* = E_1 J_z \chi', \\ M_x^* &= \left[\left(G_{13} + \frac{Q_x^0}{F} \right) J_z + \left(G_{12} + \frac{Q_x^0}{F} \right) J_y \right] \phi' + M_z^0 w' - M_y^0 v', \\ N_z^* &= F[(G_{13} + \sigma_{33}^0) \psi + G_{13} w'], \quad N_y^* = F[(G_{12} + \sigma_{22}^0) \chi - G_{12} v'], \\ N_x^* &= F[(\sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0) \phi + \sigma_{12}^0 w' - \sigma_{13}^0 v']. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Видно, что в общем случае, когда $M_x^0 \neq 0, M_y^0 \neq 0, Q_x^0 \neq 0, \sigma_{12}^0 \neq 0, \sigma_{13}^0 \neq 0, \sigma_{22}^0 \neq 0, \sigma_{33}^0 \neq 0$, при подстановке (2.15) в (2.12) получается связанная система однородных дифференциальных уравнений, выраженных через шесть искомых функций $u, v, w, \phi, \psi, \chi$. Их разделение возможно лишь в частных случаях нагружения стержня, рассмотрение которых представляет наибольший практический интерес.

В частности, при $\sigma_{12}^0 = 0, \sigma_{13}^0 = 0$ первое уравнение в (2.12), принимающее вид $(E_1 F u')' = 0$, будет иметь только тривиальное решение, а остальные уравнения при $E_1 F = \text{const}, E_1 J_y = \text{const}, E_2 J_z = \text{const}, Q_x^0 = \text{const}, M_y^0 = \text{const}, M_z^0 = \text{const}$ представимы в виде

$$E_1 J_y \psi'' - G_{13} F(w' + \psi) - \sigma_{33}^0 F \psi = 0, \quad (2.16)$$

$$G_{13} F(w'' + \psi') + Q_x^0 w'' + M_z^0 \phi'' = 0;$$

$$E_1 J_z \chi'' - G_{12} F(\chi - v') - \sigma_{22}^0 F \chi = 0,$$

$$G_{12} F(v'' - \chi') + Q_x^0 v'' - M_y^0 \phi'' = 0; \quad (2.17)$$

$$\left(B_p + \frac{J_p}{F} Q_x^0 \right) \phi'' + M_z^0 w'' - M_y^0 v'' - (\sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0) F \phi = 0, \quad (2.18)$$

где

$$B_p = G_{13} J_z + G_{12} J_y, \quad (2.19)$$

$$J_p = J_y + J_z. \quad (2.20)$$

Видно, что величиной B_p характеризуется крутильная жесткость стержня из ортотропного материала, а через J_p обозначен полярный момент инерции поперечного сечения.

Рассмотрим решения составленных уравнений (2.16)-(2.18) для ряда частных видов нагружения стержня.

2.2. Равномерное осевое сжатие стержня напряжением $\sigma_{11}^0 = -p$.

Так как в данном случае $Q_x^0 = -pF$, то уравнения (2.16)-(2.18) примут вид

$$E_1 J_y \psi'' - G_{13} F (w + \psi) = 0, \quad G_{13} (w'' + \psi') - p w'' = 0, \quad (2.21)$$

$$E_1 J_z \chi'' - G_{12} F (\chi - v') = 0, \quad G_{12} (v'' - \chi') - p v'' = 0, \quad (2.22)$$

$$(B_p - p J_p) \phi'' = 0. \quad (2.23)$$

Решения уравнений видов (2.21), (2.22) в литературе хорошо изучены [30]. Они для стержней с шарнирно опертыми кромками приводят к четырем бифуркационным значениям напряжения p

$$p_*^{(1)} = \frac{E_1 J_z \pi^2}{F a^2 (1 + k_{12})}, \quad k_{12} = \frac{E_1 J_z \pi^2}{G_{12} F a^2}, \quad p_*^{(2)} = \frac{E_1 J_y \pi^2}{F a^2 (1 + k_{13})}, \quad (2.24)$$

$$k_{13} = \frac{E_1 J_y \pi^2}{G_{13} F a^2}, \quad p_*^{(3)} = G_{13}, \quad p_*^{(4)} = G_{12},$$

а из (2.23) при условии $\phi \neq 0$ следует неизвестная ранее формула

$$p_*^{(5)} = \frac{G_{13} J_z + G_{12} J_y}{J_z + J_y}, \quad (2.25)$$

соответствующая чисто крутильной форме потери устойчивости, описываемой функцией $\phi = c_1 + c_2 x$ (c_1, c_2 – постоянные интегрирования). Если $G_{13} = G_{12} = G$, то формула (1.72) принимает вид

$$p_*^{(5)} = G, \quad (2.26)$$

следовательно, для стержня из изотропного материала $p_*^{(3)} = p_*^{(4)} = p_*^{(5)}$.

Заметим, что формула (2.25) и соответствующая ей форма потери устойчивости стержня являются полным аналогом результатов решения задачи, рассмотренной в [3] для цилиндрической оболочки при ее осевом сжатии напряжением $\sigma_{11}^0 = -p$.

Если же поперечное сечение стержня характеризуется равенством $J_z = J_y$, то из (2.25) следует еще одна интересная формула

$$p_*^{(5)} = \frac{G_{13} + G_{12}}{2}. \quad (2.27)$$

2.3. Сжатие стержня в поперечных направлениях напряжениями

$$\sigma_{22}^0 = -q_2, \quad \sigma_{33}^0 = q_3.$$

В рассматриваемом случае уравнения (2.16)-(2.18) принимают вид

$$E_1 J_y \psi'' - G_{13} F (w' + \psi) + q_3 F \psi = 0, \quad w'' + \psi' = 0, \quad (2.28)$$

$$E_1 J_z \chi'' - G_{12} F (\chi - v') + q_2 F \chi = 0, \quad v'' - \chi' = 0, \quad (2.29)$$

$$B_p \phi'' + (q_2 + q_3) F \phi = 0. \quad (2.30)$$

Задачи, описываемые уравнениями видов (2.28) и (2.29), полностью аналогичны исследованной в [2] задаче о плоских ФПУ балки-полосы, находящейся в условиях поперечного сжатия. При нулевой изменчивости функций, входящих в эти уравнения, их ненулевые решения $\psi = const$, $w = 0$ и $\chi = const$, $v = 0$ возможны при бифуркационных значениях

$$q_3^{(1)} = G_{13}, \quad q_2^{(1)} = G_{12}, \quad (2.31)$$

соответствующие чисто сдвиговому ФПУ. А другие бифуркационные значения напряжений q_3 и q_2 , равные

$$q_3^{(2)} = \frac{E_1 J_y \pi^2}{F a^2}, \quad q_2^{(2)} = \frac{E_1 J_z \pi^2}{F a^2} \quad (2.32)$$

соответствуют чисто изгибным ФПУ. Эти формулы полностью аналогичны формулам, соответствующим классической задаче об устойчивости стержня при осевом сжатии силой, численно равной $pF = q_3^{(2)} F$ и $pF = q_2^{(2)} F$.

Если ввести в рассмотрение параметр нагрузки $q = q_2 + q_3$, то для его бифуркационного значения из (2.29) следует неизвестная ранее, весьма интересная формула

$$q_* = \frac{B_p \pi^2}{F a^2} = \frac{(G_{13} J_z + G_{12} J_y) \pi^2}{F a^2}, \quad (2.33)$$

соответствующая чисто крутильной ФПУ стержня, описываемой функциями $\phi = \phi_0 \sin(\pi x/a)$ или $\phi = \phi_0 \cos(\pi x/a)$. Данная ФПУ полностью аналогична крутильной ФПУ цилиндрической оболочки при действии равномерного внешнего давления, исследованной в работе [31]. Другая ФПУ такой оболочки, когда она при внешнем давлении после потери устойчивости превращается в цилиндрическую оболочку с параллельными косыми срезами [31], аналогична установленным выше чисто сдвиговому ФПУ стержня с бифуркационными значениями, определяемыми по формулам (2.31).

Если $G_{13} = G_{12} = G$, то формула (2.32) представима в виде

$$q_* = \frac{G J_p \pi^2}{F a^2}. \quad (2.34)$$

Введя в рассмотрение параметр $r = q_2/q_3$, формулу (2.33) перепишем в виде

$$q_2^{(3)} = \frac{(G_{13} J_z + G_{12} J_y) \pi^2}{F a^2 (1+r)}. \quad (2.35)$$

Как следует из (2.35), при $r = -1$ (т.е. когда стержень в одном из поперечных направлений сжимается, а в другом – растягивается одинаковыми

напряжениями) имеем $q_2^{(3)} = \infty$ (нет потери устойчивости по крутильной ФПУ), а при $r = 1$ $q_2^{(3)}$ уменьшается в два раза.

Если же $r = 0$, то выполнение неравенства $q_2^{(3)} < q_2^{(2)}$ возможно лишь при выполнении неравенства $(G_{13}J_z + G_{12}J_y) < E_1J_z$, которое может иметь место для стержней из композитных материалов.

2.4. Чистый изгиб стержня торцевыми изгибающими моментами $M_z^0 = m$ в плоскости xOz .

В рассматриваемом случае система уравнений (2.17) в силу $Q_x^0 = M_y^0 = \sigma_{22}^0 = 0$ имеет только тривиальное решение, а уравнения (2.16), (2.18) принимают вид

$$\begin{aligned} E_1J_y\psi'' - G_{13}F(w' + \psi) &= 0, & G_{13}F(w'' + \psi') + m\phi'' &= 0, \\ B_p\phi'' + mw'' &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

После элементарных преобразований составленная система (2.36) сводится к одному разрешающему уравнению

$$E_1J_y\psi''' + \frac{m^2}{B_p} \left(\psi' - \frac{E_1J_y}{G_{13}F} \psi''' \right) = 0, \quad (2.37)$$

из которого при шарнирном опирании кромок $x = 0$, $x = a$ путем использования представления $\psi = \psi_0 \sin(n\pi x/a)$, $n = 1, 2, \dots$ устанавливается минимальное бифуркационное значение параметра m

$$m_{*}^{uk} = \sqrt{\frac{E_1J_yB_p\pi^2}{a^2(1+k_{13})}}, \quad (2.38)$$

получающееся при $n = 1$. При этом форма потери устойчивости стержня в силу $\psi \neq 0$, $w \neq 0$, $\phi \neq 0$ является изгибно-крутильной.

Заметим, что в случае чистого изгиба стержня в плоскости xOy моментом m в формуле (2.38) величину J_y достаточно заменить на величину J_z .

2.5. Осевое сжатие стержня при его одновременном чистом изгибе в плоскости xOz .

В рассматриваемом случае $Q_x^0 = -pF$, $M_z^0 = m$. Поэтому система уравнений (2.15)-(2.18) распадается на две несвязанные системы (2.22) и

$$\begin{aligned} E_1J_y\psi'' - G_{13}F(w' + \psi) &= 0, & G_{13}F(w'' + \psi') - pFw'' + m\phi'' &= 0, \\ (B_p - pJ_p)\phi'' + mw'' &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Из уравнений (2.22) следуют первое и четвертое бифуркационные значения нагрузки p , содержащиеся в (2.24), а уравнения (2.39) сводятся к одному разрешающему уравнению

$$E_1J_y\psi''' - \frac{E_1J_y}{G_{13}F} \left(Fp + \frac{m^2}{B_p - pJ_p} \right) \psi''' + \left(Fp + \frac{m^2}{B_p - pJ_p} \right) \psi' = 0, \quad (2.40)$$

которым описывается изгибно-крутильная ФПУ стержня.

Если ввести в рассмотрение параметр r_m в соответствии с зависимостью

$$m = r_m W_y p, \quad (2.41)$$

где W_y – момент сопротивления поперечного сечения стержня относительно главной центральной оси y , то в случае шарнирного опирания краев $x = 0$, $x = a$ путем представления функции ψ в виде $\psi = \psi_0 \sin(\pi x/a)$ для определения бифуркационных значений p приходим к квадратному уравнению

$$p^2 - \frac{FB_p + J_p P_y}{FJ_p - r_m^2 W_y^2} p + \frac{B_p P_y}{FJ_p - r_m^2 W_y^2} = 0, \quad P_y = \frac{E_1 J_y \pi^2}{a^2 (1 + k_{13})}, \quad (2.42)$$

имеющему корни

$$p_{1,2} = \left(FB_p + J_p P_y \pm \sqrt{(FB_p - J_p P_y)^2 + 4r_m^2 W_y^2 B_p P_y} \right) / \left[2(FJ_p - r_m^2 W_y^2) \right]. \quad (2.43)$$

Исследования показали, что действительные значения критической нагрузки определяются вторым корнем уравнения (2.42). В случае, когда $G_{12} = G_{13}$, значения этого корня для стержня с прямоугольным поперечным сечением, имеющим геометрические характеристики $J_y = bh^3/12$, $J_z = hb^3/12$, $W_y = bh^2/6$, приведены в Таблице 1 ($h = b$) и Таблице 2 ($h = 0.25b$) в виде значений безразмерного параметра $p_* = p_2 F/P_y$ при различных значениях параметров E_1/G_{13} , a/b , r_m . Заметим, что в рассматриваемом случае формула (2.41) представима в виде

$$m = r_m \frac{Fh}{6} p = r_m hP/6, \quad P = pF$$

так что величиной r_m , содержащейся в Таблицах 1 и 2, характеризуется эксцентриситет точки приложения сжимающей силы P относительно центра прямоугольника (случай внецентренного сжатия стержня). Из всех значений r_m , приведенных в таблицах, практический интерес представляют значения p_* для $r_m \leq 3$, когда $m \leq hP/2$, т.к. при больших значениях r_m до потери устойчивости возможен значительный изгиб стержня, не учтенный в построенных уравнениях.

Таблица 1.

($h = b$)

r_m	$E_1/G_{13} = 700$		$E_1/G_{13} = 7$	
	$a/b = 10$	$a/b = 100$	$a/b = 10$	$a/b = 100$
0	1	1	1	1
0.1	0.99104	0.99990	0.99990	0.99999
1	0.76334	0.99059	0.99059	0.99990
10	0.21299	0.62869	0.62869	0.99058
100	0.02590	0.09936	0.09936	0.62512

Таблица 2.

 $(h = 0.25b)$

r_m	$E_1/G_{13} = 700$		$E_1/G_{13} = 7$	
	$a/b = 10$	$a/b = 100$	$a/b = 10$	$a/b = 100$
0	1	1	1	1
0.1	0.99992	0.99999	0.99999	0.99999
1	0.99306	0.99992	0.99992	0.99999
10	0.69394	0.99304	0.99304	0.99993
100	0.12747	0.67700	0.67700	0.99304

Исходя из анализа полученных результатов, можно сформулировать два основных вывода.

1) При совместном действии осевого сжатия напряжением p и чистого изгиба моментом m всегда наблюдается снижение критического значения p_* .

2) Значительное и заметное снижение значения p_* при одновременном действии m возможно только у стержней из материала с малой сдвиговой жесткостью. Данный эффект усиливается по мере уменьшения относительной длины стержня и параметра h/b .

2.6. Трехстороннее сжатие стержня напряжениями p , q_2 , q_3 .

В рассматриваемом случае уравнения (2.16)-(2.18) принимают вид

$$E_1 J_y \psi'' - G_{13} F (w' + \psi) + q_3 F \psi = 0, \quad G_{13} (w'' + \psi') - p w'' = 0, \quad (2.44)$$

$$E_1 J_z \chi'' - G_{12} F (\chi - v') + q_2 F \chi = 0, \quad G_{12} (v'' - \chi') - p v'' = 0, \quad (2.45)$$

$$(B_p - p J_p) \phi'' + q F \phi = 0. \quad (2.46)$$

При граничных условиях $\phi'(x=0) = \phi'(x=a) = 0$ решение уравнения (2.46) при использовании зависимости $q = r_q p$ доставляет формулу

$$p_* = \frac{B_p \pi^2}{J_p \pi^2 + r_q F a^2}, \quad (2.47)$$

которая соответствует чисто крутильной ФПУ стержня. А системы уравнений (2.44), (2.45) сводятся к двум несвязанным разрешающим уравнениям

$$\frac{E_1 J_y}{F} \left(1 - \frac{p}{G_{13}} \right) \psi''' + \left(p + q_3 - \frac{p q_3}{G_{13}} \right) \psi' = 0, \quad (2.48)$$

$$\frac{E_1 J_z}{F} \left(1 - \frac{p}{G_{12}} \right) \chi''' + \left(p + q_2 - \frac{p q_2}{G_{12}} \right) \chi' = 0, \quad (2.49)$$

которыми описываются задачи об изгибно-сдвиговых ФПУ в плоскостях xOz и yOz .

3. УРАВНЕНИЯ И ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ, ОСНОВАННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ В ПОЛНОМ КВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

3.1. Редукция трёхмерных уравнений к одномерным.

Исходя из уравнений, следующих из (2.12) при подстановке в них соотношений (2.15), рассмотрим вначале задачу об устойчивости стержня при формировании в нем начального напряжения $\sigma_{12}^0 = \tau$. Если остальные компоненты начальных напряжений равны нулю, то указанные уравнения распадаются на две несвязанные системы

$$G_{13}(w'' + \psi') + \tau\phi' = 0, \quad E_1 J_y \psi'' - G_{13} F(w' + \psi) = 0, \quad B_p \phi'' - \tau F w' = 0, \quad (3.1)$$

$$E_1 u'' - \tau \chi' = 0, \quad v'' - \chi' = 0, \quad E_1 J_z \chi'' + G_{12} F(v' - \chi) = 0. \quad (3.2)$$

Система уравнений (3.1) путем несложных преобразований сводится к одному разрешающему уравнению вида

$$\frac{G_{13} E_1 J_y}{G_{12}} \psi^{IV} + \frac{\tau^2 F^2}{B_p} \left(\frac{E_1 J_y}{G_{13} F} \psi'' - \psi \right) = 0. \quad (3.3)$$

Из него для случая шарнирного опирания кромок $x = 0$, $x = a$ следует бифуркационное значение напряжения τ

$$\tau_*^{uk} = \frac{\pi^2}{a^2 F} \sqrt{\frac{G_{13} E_1 J_y B_p}{G_{12} (1 + k_{13})}}, \quad (3.4)$$

которое в силу $\psi \neq 0$, $w \neq 0$, $\phi \neq 0$ соответствует изгибно-крутильной ФПУ стержня.

В то же время вторая из составленных систем уравнений (3.2), как легко можно убедиться, является абсолютно несодержательной. Причиной этому, судя по полученным в [2] результатам, является недостаточная степень точности соотношений (2.1) и представления (2.7).

Как следует из анализа результатов работы [2], при формировании в стержне начальных напряжений σ_{12}^0 , σ_{13}^0 вместо неполных соотношений (2.1), (2.2) необходимо использовать неупрощенные (полные) кинематические соотношения вида

$$\varepsilon_1 = e_{11} + (e_{12}^2 + e_{13}^2)/2, \dots, \quad \gamma_{12} = e_{12}(1 + e_{22}) + e_{21}(1 + e_{11}) + e_{13}e_{23}, \dots \quad (3.5)$$

$$s_{11} = \sigma_{11} + \sigma_{12}e_{21} + \sigma_{13}e_{31}, \quad s_{12} = \sigma_{11}e_{12} + \sigma_{12}(1 + e_{22}) + \sigma_{13}e_{32}, \quad (3.6)$$

$$s_{13} = \sigma_{11}e_{13} + \sigma_{12}e_{23} + \sigma_{13}(1 + e_{33}), \dots$$

а вместо (2.7) – представление

$$u = (u + z\psi - y\chi)\mathbf{i} + (v - z\phi + y\theta_2)\mathbf{j} + (w + y\phi + z\theta_3)\mathbf{k}, \quad (3.7)$$

соответствующее модели Тимошенко с учетом поперечных деформаций ε_2 и ε_3 [4].

По принятой уточненной модели стержня входящие в (3.5) величины $e_{\alpha\beta}$ будут равны

$$e_{11} = u' + z\psi' - y\chi', \quad e_{12} = v' - z\phi' + y\theta_2', \quad e_{13} = w' + y\phi' + z\theta_3', \quad (3.8)$$

$$e_{21} = -\chi, \quad E_{22} = \theta_2, \quad e_{23} = \phi, \quad e_{31} = \psi, \quad e_{32} = -\phi, \quad e_{33} = \theta_3.$$

Если в начальном состоянии принять $\sigma_{23}^0 = 0$, то в рассматриваемом случае вместо зависимостей (3.6) необходимо использовать линеаризованные зависимости

$$\begin{aligned} s_{11} &= \sigma_{11} + \sigma_{12}^0 e_{21} + \sigma_{13}^0 e_{31}, & s_{12} &= \sigma_{12} + \sigma_{11}^0 e_{12} + \sigma_{12}^0 e_{22} + \sigma_{13}^0 e_{32}, \\ s_{13} &= \sigma_{13} + \sigma_{11}^0 e_{13} + \sigma_{12}^0 e_{23} + \sigma_{13}^0 e_{33}, \dots, \end{aligned} \quad (3.9)$$

которые при подстановке соотношений (3.8) примут вид

$$\begin{aligned} s_{11} &= g_{11}(u' + z\psi' - y\chi') + g_{12}\theta_2 + g_{13}\theta_3 - \sigma_{12}^0\chi + \sigma_{13}^0\psi, \\ s_{12} &= (G_{12} + \sigma_{11}^0)(v' - z\phi' + y\theta_2') - G_{12}\chi + \sigma_{12}^0\theta_2 - \sigma_{13}^0\phi, \\ s_{21} &= -(G_{12} + \sigma_{22}^0)\chi + \sigma_{12}^0(u' + z\psi' - y\chi') + G_{12}(v' - z\phi' + y\theta_2'), \\ s_{22} &= g_{12}(u' + z\psi' - y\chi') + g_{22}\theta_2 + g_{23}\theta_3 + \sigma_{12}^0(v' - z\phi' + y\theta_2'), \\ s_{13} &= (G_{13} + \sigma_{11}^0)(w' + y\phi' + z\theta_3') + G_{13}\psi + \sigma_{12}^0\phi + \sigma_{13}^0\theta_3, \\ s_{31} &= (G_{13} + \sigma_{33}^0)\psi + \sigma_{13}^0(u' + z\psi' - y\chi') + G_{13}(w' + y\phi' + z\theta_3'), \\ s_{23} &= \sigma_{12}^0(w' + y\phi' + z\theta_3') + \sigma_{22}^0\phi, \\ s_{32} &= -\sigma_{33}^0\phi + \sigma_{13}^0(v' - z\phi' + y\theta_2'), \\ s_{33} &= g_{13}(u' + z\psi' - y\chi') + g_{23}\theta_2 + g_{33}\theta_3 + \sigma_{13}^0(w' + y\phi' + z\theta_3'). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Используя далее соотношения (3.8) в силу $e_{22} \neq 0$, $e_{33} \neq 0$ вместо (2.10) приходим к вариационному уравнению

$$\begin{aligned} \int_0^a & \left(Q_x^* \delta u' + M_y^* \delta \psi' + M_z^* \delta \chi' + Q_y^* \delta v' + Q_z^* \delta w' + M_x^* \delta \phi' + M_{xy}^* \delta \theta_2' + \right. \\ & \left. + M_{xz}^* \delta \theta_3' + N_z^* \delta \psi + N_y^* \delta \chi + N_x^* \delta \phi + T_y^* \delta \theta_2 + T_z^* \delta \theta_3 \right) dx = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

в котором в дополнение к (2.11) введены обозначения

$$T_y^* = \iint_F s_{22} dF, \quad T_z^* = \iint_F s_{33} dF, \quad M_{xy}^* = \iint_F s_{12} y dF, \quad M_{xz}^* = \iint_F s_{13} z dF. \quad (3.12)$$

Из (3.11) следуют шесть дифференциальных уравнений (2.12), граничные условия (2.13), два дополнительных уравнения

$$\frac{dM_{xy}^*}{dx} - T_y^* = 0, \quad \frac{dM_{xz}^*}{dx} - T_z^* = 0 \quad (3.13)$$

и соответствующие им граничные условия

$$M_{xy}^* = 0 \text{ при } \delta \theta_2 \neq 0, \quad M_{xz}^* = 0 \text{ при } \delta \theta_3 = 0. \quad (3.14)$$

Для усилий и моментов, входящих в (3.13) и (2.12), необходимые соотношения вида (2.15) получаются подстановкой выражений (3.10) в формулы (2.11) и (3.12)

$$\begin{aligned} Q_x^* &= F(g_{11}u' + g_{12}\theta_2 + g_{13}\theta_3) - Q_y^0\chi + Q_z^0\psi, \\ Q_y^* &= (G_{12}F + Q_x^0)v' - G_{12}F\chi + Q_y^0\theta_2 - Q_z^0\phi + M_z^0\theta_2' - M_y^0\phi', \\ Q_z^* &= (G_{13}F + Q_x^0)w' + G_{13}F\psi + M_y^0\theta_3' + M_z^0\phi' + Q_y^0\phi + Q_z^0\theta_3; \\ M_y^* &= g_{11}J_y\psi' - \chi \iint_F \sigma_{12}^0 z dF + \psi \iint_F \sigma_{13}^0 z dF, \\ M_z^* &= g_{11}J_z\chi' + \chi \iint_F \sigma_{12}^0 y dF - \psi \iint_F \sigma_{13}^0 y dF, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
M_x^* &= \left[B_p + \iint_F \sigma_{11}^0 (y^2 + z^2) dF \right] \phi' + w' \iint_F \sigma_{11}^0 y dF - v' \iint_F \sigma_{11}^0 z dF + \\
&+ \underbrace{\phi \iint_F (\sigma_{12}^0 y + \sigma_{13}^0 z) dF}_{\text{}} + \theta_3 \iint_F \sigma_{13}^0 y dF - \theta_2 \iint_F \sigma_{12}^0 z dF + \\
&+ (\theta_3' - \theta_2') \iint_F \sigma_{11}^0 z y dF, \\
N_z^* &= (G_{13} F + T_z^0) \psi + G_{13} F w' + Q_z^0 u' + \underbrace{\psi' \iint_F \sigma_{13}^0 z dF}_{\text{}} - \chi' \iint_F \sigma_{13}^0 y dF, \\
N_y^* &= (G_{12} F + T_y^0) \chi - G_{12} F v' - Q_y^0 u' - \underbrace{\psi' \iint_F \sigma_{12}^0 z dF}_{\text{}} + \chi' \iint_F \sigma_{12}^0 y dF, \\
N_x^* &= (T_y^0 + T_z^0) \phi + Q_y^0 w' - Q_z^0 v' + \phi' \iint_F (\sigma_{12}^0 y + \sigma_{13}^0 z) dF + \\
&+ \theta_3' \iint_F \sigma_{12}^0 z dF - \theta_2' \iint_F \sigma_{13}^0 y dF
\end{aligned}$$

и в формулы (3.12)

$$\begin{aligned}
T_y^* &= F (g_{12} u' + g_{22} \theta_2 + g_{23} \theta_3) + Q_y^0 v' - \phi' \iint_F \sigma_{12}^0 z dF + \theta_2' \iint_F \sigma_{12}^0 y dF, \\
T_z^* &= F (g_{13} u' + g_{23} \theta_2 + g_{33} \theta_3) + Q_z^0 w' + \phi' \iint_F \sigma_{13}^0 y dF + \theta_3' \iint_F \sigma_{13}^0 z dF, \\
M_{xz}^* &= M_y^0 w' + G_{13} J_y \theta_3' + \phi \iint_F \sigma_{12}^0 z dF + \theta_3 \iint_F \sigma_{13}^0 z dF + \phi' \iint_F \sigma_{11}^0 z y dF + \\
&+ \theta_3' \iint_F \sigma_{11}^0 z^2 dF, \\
M_{xy}^* &= M_z^0 v' + G_{12} J_z \theta_2' + \theta_2 \iint_F \sigma_{12}^0 y dF - \phi \iint_F \sigma_{13}^0 y dF - \\
&- \phi' \iint_F \sigma_{11}^0 z y dF + \theta_2' \iint_F \sigma_{11}^0 y^2 dF,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

где введены обозначения для усилий и моментов начального состояния стержня

$$\begin{aligned}
Q_x^0 &= \iint_F \sigma_{11}^0 dF, \quad M_y^0 = \iint_F \sigma_{11}^0 z dF, \quad M_z^0 = \iint_F \sigma_{11}^0 y dF, \\
T_y^0 &= \iint_F \sigma_{22}^0 dF, \quad T_z^0 = \iint_F \sigma_{33}^0 dF, \quad Q_y^0 = \iint_F \sigma_{12}^0 dF, \quad Q_z^0 = \iint_F \sigma_{13}^0 dF.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Вполне очевидно, что составленные соотношения упругости (3.15), (3.16) содержат в себе ряд второстепенных слагаемых, которые без потери содержательности формулируемых на их основе задач могут быть отброшены. Для проведения таких упрощений, оставаясь в рамках степени точности соотношений классической теории стержней, предположим, что нормальные напряжения σ_{11}^0 допустимо определять по формуле (2.14), а касательные напряжения $\sigma_{12}^0, \sigma_{13}^0$ – по формулам

$$\sigma_{12}^0 = \frac{Q_y^0}{F} + z \frac{M_{kp}^0}{J_p}, \quad \sigma_{13}^0 = \frac{Q_z^0}{F} - y \frac{M_{kp}^0}{J_p}, \tag{3.18}$$

где $M_{\kappa p}^0$, Q_y^0 , Q_z^0 – крутящий момент и перерезывающие усилия в поперечных сечениях стержня в его начальном состоянии.

При использовании формул (2.14), (3.18) для входящих в (3.15) величин начального состояния в дополнение к (3.17) будем иметь точные формулы

$$\begin{aligned} \iint_F \sigma_{12}^0 z dF &= \frac{J_y}{J_p} M_{\kappa p}^0, \quad \iint_F \sigma_{13}^0 z dF = 0, \quad \iint_F \sigma_{12}^0 y dF = 0, \\ \iint_F \sigma_{13}^0 y dF &= -\frac{J_z}{J_p} M_{\kappa p}^0, \quad \iint_F \sigma_{11}^0 z^2 dF = \frac{J_y}{F} Q_x^0, \quad \iint_F \sigma_{11}^0 y^2 dF = \frac{J_z}{F} Q_x^0, \\ \iint_F \sigma_{11}^0 (y^2 + z^2) dF &= \frac{J_p}{F} Q_x^0, \quad \iint_F (\sigma_{12}^0 y + \sigma_{13}^0 z) dF = 0, \\ \iint_F \sigma_{11}^0 z^2 dF &= \frac{J_y}{F} Q_x^0, \quad \iint_F \sigma_{11}^0 y^2 dF = \frac{J_z}{F} Q_x^0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

а также положим, что $\iint_F z^3 dF = 0$, $\iint_F y^3 dF = 0$, $\iint_F \sigma_{11}^0 z y dF = 0$. В результате вместо зависимостей (3.16) приходим к упрощенным зависимостям вида

$$\begin{aligned} M_y^* &= g_{11} J_y \psi' - \frac{J_y}{J_p} M_{\kappa p}^0 \chi, \quad M_z^* = g_{11} J_z \chi' + \frac{J_z}{J_p} M_{\kappa p}^0 \psi, \\ M_x^* &= \left(B_p + \frac{J_p}{F} Q_x^0 \right) \phi' + M_z^0 w' - M_y^0 v' - \frac{J_z}{J_p} M_{\kappa p}^0 \theta_3 - \frac{J_y}{J_p} M_{\kappa p}^0 \theta_2, \\ N_z^* &= (G_{13} F + T_z^0) \psi + G_{13} F w' + Q_z^0 u' + \frac{J_z}{J_p} M_{\kappa p}^0 \chi', \\ N_y^* &= (G_{12} F + T_y^0) \chi - G_{12} F v' - Q_y^0 u' - \frac{J_y}{J_p} M_{\kappa p}^0 \psi', \\ N_x^* &= (T_y^0 + T_z^0) \phi + Q_y^0 w' - Q_z^0 v' + \frac{J_y}{J_p} M_{\kappa p}^0 \theta_3 + \frac{J_z}{J_p} M_{\kappa p}^0 \theta_2, \\ T_y^* &= F (g_{12} u' + g_{22} \theta_2 + g_{23} \theta_3) + Q_y^0 v' - \frac{J_y}{J_p} M_{\kappa p}^0 \phi', \\ T_z^* &= F (g_{13} u' + g_{23} \theta_2 + g_{33} \theta_3) + Q_z^0 w' - \frac{J_z}{J_p} M_{\kappa p}^0 \phi', \\ M_{xz}^* &= G_{13} J_y \theta_3' + M_y w' + \frac{J_y}{J_p} M_{\kappa p}^0 \phi + \frac{J_y}{F} Q_x^0 \theta_3', \\ M_{xy}^* &= G_{12} J_z \theta_2' + M_z v' + \frac{J_z}{J_p} M_{\kappa p}^0 \phi + \frac{J_z}{F} Q_x^0 \theta_2'. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для проведения дальнейшего анализа и возможного упрощения составленных соотношений (3.15) и (3.20) обратимся к нелинейным кинематическим соотношениям (1.10). Внося в них зависимости (3.8), для ε_1 , ε_2 и ε_3 получим соотношения (для ε_1 с точностью до $z^2(0)$, $y^2(0)$, $zy(0)$, как обычно принято в теории стержней, пластин и оболочек)

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) + z(\psi' - v'\phi' + w'\theta'_3) - y(\chi' - v'\theta'_2 - w'\phi'), \\ \varepsilon_2 &= \theta_2 + \frac{1}{2}(\chi^2 + \phi^2), \quad \varepsilon_3 = \theta_3 + \frac{1}{2}(\psi^2 + \phi^2),\end{aligned}\quad (3.21)$$

а для сдвиговых деформаций – зависимости

$$\begin{aligned}\gamma_{12} &= v' - \chi + \theta_2 v' - \chi u' + \phi w' - z(\phi' + \theta_2 \phi' + \chi \psi' - \phi \theta'_3) + \\ &\quad + y(\theta'_2 + \theta_2 \theta'_2 + \chi \chi' + \phi \phi'), \\ \gamma_{13} &= w' + \psi + \theta_3 w' + \psi u' - \phi v' + y(\phi' + \theta_3 \phi' - \psi \chi' - \phi \theta'_2) + \\ &\quad + z(\theta'_3 + \theta_3 \theta'_3 + \psi \psi' + \phi \phi').\end{aligned}\quad (3.22)$$

Видно, что в (3.22) для подчеркнутых слагаемых справедливы равенства $y(\theta'_2 + \theta_2 \theta'_2 + \chi \chi' + \phi \phi') = y\varepsilon'_2$, $z(\theta'_3 + \theta_3 \theta'_3 + \psi \psi' + \phi \phi') = z\varepsilon'_3$, если для вычисления ε_2 и ε_3 использовать формулы $\varepsilon_2 = \theta_2 + (\theta_2^2 + \chi^2 + \phi^2)/2$, $\varepsilon_3 = \theta_3 + (\theta_3^2 + \psi^2 + \phi^2)/2$, в соответствии с результатами, полученными в п.1.2 и работах [1,2], являющиеся противоречивыми и некорректными. В теории тонких оболочек слагаемыми указанных видов обычно пренебрегают.

В результате использования проведенных выше упрощений для вариации потенциальной энергии деформации стержня приходим к выражению (полагая $\sigma_{23} \approx 0$)

$$\begin{aligned}\delta U &= \iint_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_1 + \sigma_{22} \delta \varepsilon_2 + \sigma_{33} \delta \varepsilon_3 + \sigma_{12} \delta \gamma_{12} + \sigma_{13} \delta \gamma_{13}) dV = \\ &= \int_0^a (Q_x^* \delta u' + M_y^* \delta \psi' + M_z^* \delta \chi' + Q_y^* \delta v' + Q_z^* \delta w' + M_x^* \delta \phi' + \\ &\quad + M_{xy}^* \delta \theta'_2 + M_{xz}^* \delta \theta'_3 + N_z^* \delta \psi + N_y^* \delta \chi + N_x^* \delta \phi + T_y^* \delta \theta_2 + T_z^* \delta \theta_3) dx,\end{aligned}\quad (3.23)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}Q_x^* &= \iint_F (\sigma_{11} - \sigma_{12} \chi + \sigma_{13} \psi) dF, \\ Q_y^* &= \iint_F [\sigma_{12} (1 + \theta_2) + \sigma_{11} (v' - z\phi' + y\theta'_2) - \sigma_{13} \phi] dF, \\ Q_z^* &= \iint_F [\sigma_{13} (1 + \theta_3) + \sigma_{11} (w' + y\phi' + z\theta_3) + \sigma_{12} \phi] dF, \\ M_y^* &= \iint_F (\sigma_{11} - \sigma_{12} \chi) z dF, \quad M_z^* = -\iint_F (\sigma_{11} + \sigma_{13} \psi) y dF, \\ M_x^* &= \iint_F [-\sigma_{11} z v' + \sigma_{11} y w' - \sigma_{12} (1 + \theta_2) z + \sigma_{13} (1 + \theta_3) y] dF, \\ M_{xy}^* &= \iint_F (\sigma_{11} v' - \sigma_{13} \phi) y dF, \quad M_{xz}^* = \iint_F (\sigma_{11} w' + \sigma_{12} \phi) z dF, \\ N_z^* &= \iint_F (\sigma_{13} - \sigma_{13} \chi' y + \sigma_{33} \psi) dF, \quad N_y^* = \iint_F (-\sigma_{12} - \sigma_{12} \psi' z + \sigma_{22} \chi) dF, \\ N_x^* &= \iint_F [\sigma_{12} w' - \sigma_{13} v' + (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \phi] dF, \\ T_y^* &= \iint_F (\sigma_{12} v' - \sigma_{13} \phi' z + \sigma_{22}) dF, \quad T_z^* = \iint_F (\sigma_{33} + \sigma_{13} w' + \sigma_{13} \phi' y) dF.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Проведем линеаризацию составленных соотношений (3.24) в окрестности начального напряженного состояния, заданного усилиями $Q_x^0, Q_y^0, Q_z^0, T_y^0, T_z^0$ и моментами M_y^0, M_z^0, M_{kp}^0 . Тогда с учетом формул (2.14), (3.8) и (3.19) для $Q_x^*, Q_y^*, Q_z^*, M_y^*, M_z^*, T_y^*, T_z^*$ получим те же выражения, которые содержатся в (3.15) и (3.20), а для других усилий и моментов, характеризующих нейтральное равновесие стержня, получаются упрощенные выражения вида

$$\begin{aligned} M_x^* &= B_p \phi' - M_y^0 v' + M_z^0 w' - \frac{M_{kp}^0}{J_p} (J_z \theta_3 + J_y \theta_2), \\ N_z^* &= G_{13} F(w' + \psi) + T_z^0 \psi + \frac{J_z}{J_p} M_{kp}^0 \chi', \\ N_y^* &= G_{12} F(\chi - v') + T_y^0 \chi - \frac{J_y}{J_p} M_{kp}^0 \psi', \\ N_x^* &= Q_y^0 w' - Q_z^0 v' + (T_y^0 + T_z^0) \phi, \\ M_{xy}^* &= M_z^0 v' + \frac{J_z}{J_p} M_{kp}^0 \phi, \quad M_{xz}^* = M_y^0 w' + \frac{J_y}{J_p} M_{kp}^0 \phi. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Видно, что в выражении для M_x^* по (3.25), в отличие от (3.20), отсутствует слагаемое $J_p Q_x^0 \phi' / F$. В связи с этим при использовании упрощенных соотношений решения соответствующих уравнений, составленных из (2.12), (3.13), при осевом сжатии стержня для p_* приводят только к формулам второго раздела, так как ими не описывается крутильная ФПУ стержня при его осевом сжатии. В то же время при других видах начального напряженного состояния выведенные в этом разделе упрощенные соотношения оказываются более содержательными, чем соотношения раздела 2. Подтверждением сказанному служат построенные ниже решения тех же задач, которые были изучены в первом разделе.

3.2. Чистый изгиб стержня торцевыми изгибающими моментами $M_z^0 = m$.

В рассматриваемом случае система уравнений (2.12), (3.13) при использовании соответствующих соотношений из (3.15), (3.20), (3.25) распадается на две несвязанные системы

$$\begin{aligned} G_{13} F(w'' + \psi') + m \phi'' &= 0, \quad g_{11} J_y \psi'' - G_{13} F(w' + \psi) = 0, \\ B_p \phi'' + m w'' &= 0; \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} g_{11} u'' + g_{12} \theta_2' + g_{13} \theta_3' &= 0, \quad G_{12} F(v'' - \chi') + m \theta_2'' = 0, \\ g_{11} J_z \chi'' - G_{12} F(\chi - v') &= 0, \quad m v'' - F(g_{12} u' + g_{22} \theta_2 + g_{23} \theta_3) = 0, \\ g_{13} u' + g_{23} \theta_2 + g_{33} \theta_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Первая из этих систем отличается от уравнений (2.36) только коэффициентом g_{11} во втором уравнении, которой описывается изгибно-крутильная ФПУ стержня. А первое, четвертое и пятое уравнения второй системы (3.27) позволяют установить зависимости (c_1 – постоянная интегрирования)

$$u' = c_1 - \frac{v_{12}}{E_2 F} m v'', \quad \theta_2 = -v_{21} c_1 + \frac{m}{E_2 F} v'', \quad \theta_3 = -v_{31} c_1 - \frac{v_{32}}{E_2 F} m v''. \quad (3.28)$$

При их использовании остальные два уравнения системы (3.28) сводятся к одному разрешающему уравнению вида (c_2 – постоянная интегрирования)

$$g_{11} J_z v''' - \frac{m^2}{E_2 F} \left(v''' - \frac{g_{11} J_z}{G_{12} F} v'' \right) = c_2, \quad (3.29)$$

которым описывается изгибно-сдвиговая ФПУ стержня. В случае шарнирного опирания его концов из (3.29) для определения бифуркационного значения m следует формула

$$m_*^{uc} = \sqrt{\frac{g_{11} J_z E_2 F}{1 + k_{12}^* n^2}}, \quad k_{12}^* = \frac{g_{11} J_z}{G_{12} F} \approx k_{12}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

приводящая при $n \rightarrow \infty$ к значению $m_*^{uc} = 0$.

Таким образом, при чистом изгибе стержня возможна реализация только изгибно-сдвиговой ФПУ, сопровождающаяся кручением и изгибом в направлении, перпендикулярном плоскости действия внешнего изгибающего момента.

Следует отметить, что при рассмотрении совместного действия на стержень осевого сжатия p и изгибающего момента m система уравнений (2.12), (3.13) при использовании соотношений (3.15), (3.20), (3.25) также распадается на две несвязанные системы уравнений. Первая из них совпадает с системой уравнений (2.38), если произвести замену g_{11} на E_1 , а второй системой будет описываться изгибно-сдвиговая ФПУ, приводящей к тривиальному результату.

3.3. Чистое кручение стержня моментом $M_{kp}^0 = M$.

В рассматриваемом случае система уравнений (2.12), (3.13) при использовании соответствующих соотношений из (3.15), (3.20), (3.25) также распадается на две несвязанные системы уравнений

$$v'' - \chi' = 0, \quad w'' + \psi' = 0, \quad g_{11} J_y \psi'' - G_{13} F (w' + \psi) - M \chi' = 0, \quad (3.31)$$

$$g_{11} J_z \chi'' - G_{12} F (\chi - v') + M \psi' = 0;$$

$$g_{11} u'' + g_{12} \theta_2' + g_{13} \theta_3' = 0, \quad B_p \phi'' - M (\theta_2' + \theta_3') = 0,$$

$$M \phi' - F (g_{12} u' + g_{22} \theta_2 + g_{23} \theta_3) = 0, \quad (3.32)$$

$$M \phi' - F (g_{13} u' + g_{23} \theta_2 + g_{33} \theta_3) = 0,$$

из которых первая может быть сведена к одному разрешающему уравнению вида

$$v^{IV} + \frac{M^2}{g_{11}^2 J_z J_y} v'' = 0. \quad (3.33)$$

При шарнирном опирании торцевых сечений из (3.33) следует бифуркационное значение крутящего момента

$$M_{(1)}^* = \frac{g_{11} \pi}{a} \sqrt{J_z J_y}, \quad (3.34)$$

соответствующее чисто изгибной ФПУ стержня.

Из первого и последних двух уравнений второй системы (3.32) по аналогии с (3.28) устанавливаются зависимости (c_1 – постоянная интегрирования)

$$\begin{aligned}
u' &= -\frac{M}{F} \left(\frac{\nu_{12}}{E_2} + \frac{\nu_{13}}{E_3} \right) \phi' + \frac{c_1}{E_1}, & \theta_2 &= \frac{M}{F} \frac{(E_3 - E_2 \nu_{23})}{E_2 E_3} \phi' - \frac{\nu_{21}}{E_1} c_1, \\
\theta_3 &= \frac{M}{F} \frac{(E_2 - \nu_{32} E_3)}{E_2 E_3} \phi' - \frac{\nu_{31}}{E_1} c_1.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

При их использовании второе уравнение системы преобразуется к виду

$$\left[B_p - \frac{M^2 (E_2 + E_3 - E_2 \nu_{23} - E_3 \nu_{32})}{F E_2 E_3} \right] \phi'' = 0, \tag{3.36}$$

откуда следует второе бифуркационное значение крутящего момента

$$M_{(2)}^* = \sqrt{\frac{B_p F E_2 E_3}{E_2 (1 - \nu_{23}) + E_3 (1 - \nu_{32})}}, \tag{3.37}$$

соответствующее чисто крутильной ФПУ стержня.

Заметим, что найденные значения $M_{(1)}^*$ и $M_{(2)}^*$ имеют порядки $M_{(1)}^* \approx E_1 a^3 \varepsilon^4$, $M_{(2)}^* \approx E_1 a^3 \varepsilon^3 \sqrt{G/E_2}$, если $E_2 \approx E_3$, $b \approx a\varepsilon$, $h \approx a\varepsilon$. Следовательно, $M_{(1)}^* \approx M_{(2)}^*$, если $\sqrt{G/E_2} \approx \varepsilon$.

3.4. Стержень в условиях чистого сдвига.

Предположим, что в стержне $Q_z^0 \neq 0$, а остальные внутренние усилия и моменты начального состояния равны нулю. В рассматриваемом случае системы уравнений (2.12), (3.13) при использовании соответствующих соотношений из (3.15), (3.20), (3.25) как и в предыдущем случае, распадаются на две системы уравнений

$$F (g_{11} u' + g_{12} \theta_2 + g_{13} \theta_3)' + Q_z^0 \psi' = 0, \quad g_{12} u' + g_{22} \theta_2 + g_{23} \theta_3 = 0, \tag{3.38}$$

$$F (g_{13} u' + g_{23} \theta_2 + g_{33} \theta_3)' + Q_z^0 w' = 0,$$

$$G_{13} F (w' + \psi)' + Q_z^0 \theta_3' = 0, \quad g_{11} J_y \psi'' - G_{13} F (w' + \psi) = 0;$$

$$G_{12} F (v' - \chi)' - Q_z^0 \phi' = 0, \quad g_{11} J_z \chi'' - G_{13} F (\chi - v') = 0, \tag{3.39}$$

$$B_p \phi'' + Q_z^0 v' = 0.$$

Первой системой (3.38), состоящей из пяти уравнений, описывается ФПУ стержня, подробно исследованная в работе [2] для стержня в виде полосы, а вторая система (3.39) из трех уравнений сводится к одному разрешающему уравнению вида

$$g_{11} J_z B_p \phi^{IV} + (Q_z^0)^2 (k_{12}^* \phi''' + \phi') = 0. \tag{3.40}$$

При шарнирном закреплении торцевых сечений стержня из (3.40) следует бифуркационное значение Q_z^* , равное

$$Q_z^* = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{g_{11} J_z B_p}{1 + k_{12}^*}} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{g_{11} J_z (G_{13} J_z + G_{12} J_y)}{1 + k_{12}^*}}, \tag{3.41}$$

которое соответствует неизвестной ранее изгибно-крутильной ФПУ стержня.

Можно убедиться в том, что для реальных стержней значение Q_z^* , определяемое по формуле (3.41), намного меньше значения Q_z^* , определяемого решением уравнений (3.38).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные выше результаты являются достаточно неожиданными и приводят к выводу о недостоверности и ошибочности результатов, получаемых во многих случаях на основе использования геометрически нелинейных уравнений механики деформируемых твердых тел и тонкостенных конструкций, построенных на базе кинематических соотношений вида (1.22), (1.23). Так как величины $2\varepsilon_{\alpha\beta}$ являются приращениями компонент метрического тензора, то некорректными могут оказаться и все геометрически нелинейные уравнения, в которых при произвольных перемещениях и деформациях указанные величины принимаются за меру деформаций. Следует иметь в виду, что к настоящему времени многие известные пакеты прикладных программ, которые предназначены для решения задач прочности, устойчивости и колебаний элементов конструкций с учетом геометрической нелинейности общего вида, так или иначе основаны на использовании соотношений вида (1.22), (1.23). В связи с изложенным, все они требуют проведения соответствующей ревизии и корректировки.

Следует считать также неполными и все справочные материалы и издания справочного характера, по которым проводятся расчеты элементов конструкций на устойчивость. Сказанное относится, прежде всего, к элементам конструкций из композитных материалов с малой сдвиговой жесткостью, так как в них при тех или иных видах нагружения возможна реализация не только классических (хорошо изученных в литературе), но и неклассических ФПУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. *Непротиворечивый вариант теории деформаций сплошных сред в квадратичном приближении* // Доклады РАН. – 2004. – Т.396. – №4. – С.492-495.
2. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. *О соотношениях теории деформаций в квадратичном приближении и проблемы построения уточненных вариантов геометрически нелинейной теории слоистых элементов конструкций* // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т.69. – Вып.5. – С.864-882.
3. Паймушин В.Н. *Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и прямолинейных стержней* // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т.71. – Вып.5. – С.855-893.
4. Паймушин В.Н., Полякова Н.В. *Непротиворечивые уравнения теории плоских криволинейных стержней при конечных перемещениях и линеаризованные задачи устойчивости* // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т.73. – Вып.2. – С.303-324.
5. Bolotin V.V. *Nonconservative problems of the theory of elastic stability*. – Elsevier Science and Technology, 1963. – 324 p.
6. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. *Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature* // Composite Structures. – 2017. – Vol.171. – Pp.486-504.

7. Huang S., Qiao P. *Nonlinear stability analysis of thin-walled I-section laminated composite curved beams with elastic end restraints* // Engineering Structures. – 2021. – Vol.226. – 111336. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.111336.
8. Cardoso D.C.T., Togashi B.S. *Experimental investigation on the flexural-torsional buckling behavior of pultruded GFRP angle columns* // Thin-Walled Structures. – 2018. – Vol.125. – Pp.269-280. DOI: 10.1016/j.tws.2018.01.031.
9. Cintra G.G, Cardoso D.C.T.,Vieira J.D. *Parameters affecting local buckling response of pultruded GFRP I-columns: Experimental and numerical investigation* // Composite Structures. – 2019. – Vol.222. – 110897. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.110897.
10. Herrmann J., Kuhn T., Mullenstedt T., Mittelstedt S., Mittelstedt C. *Closed Form Approximate Solutions for the Local Buckling Behavior of Composite Laminated Beams Based on Third-Order Shear Deformation Theory* // Advances in Mechanics of Materials and Structural Analysis, Advanced Structured Materials. – 2018. – Vol.80. – Pp.175-205. DOI: 10.1007/978-3-319-70563-7_8.
11. Urbaniak M.,Teter A., Kubiak T. *Influence of boundary conditions on the critical and failure load in the GFRP channel cross-section columns subjected to compression* // Composite Structures. – 2015. – Vol.134. – Pp.199-208. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.076.
12. Szymczak C., Kujawa M. *Flexural buckling and post-buckling of columns made of aluminium alloy* // European journal of mechanics a-solids. – 2019. – Vol.73. – Pp.420-429. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2018.10.006.
13. Brojan M., Puksic A., Kosel F. *Buckling and post-buckling of a nonlinearly elastic column* // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2007. – Vol.87. – No.7. – Pp.518-527. DOI: 10.1002/zamm.200710333.
14. Brojan M., Kosel F. *Approximative formula for post-buckling analysis of non-linearly elastic columns with superellipsoidal cross-sections* // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2011. – Vol.30. – No.5. – Pp.409-415. DOI: 10.1177/0731684410397897.
15. Emam S., Lacarbonara W. *Buckling and postbuckling of extensible, shear-deformable beams: Some exact solutions and new insights* // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2021. – Vol.129. – 103667. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103667.
16. Derikvand M., Farhatnia F., Hodges H. *Functionally graded thick sandwich beams with porous core: Buckling analysis via differential transform method* // Mechanics Based Design of Structures and Machines. – 2023. – Vol.51. – Iss.7. – Pp.3650-3677. DOI: 10.1080/15397734.2021.1931309.
17. Soleimani A., Zamani F., Gorgani H.H. *Buckling analysis of three-dimensional functionally graded Euler-Bernoulli nanobeams based on the nonlocal strain gradient theory* // Journal of Computational Applied Mechanics. – 2022. – Vol.53. No.1. – Pp.24-40. DOI: 10.22059/jcamech.2022.338327.689.
18. She G.-L., Yuan F.-G., Ren Y.-R. *Nonlinear analysis of bending, thermal buckling and post-buckling for functionally graded tubes by using a refined beam theory* // Compos. Struc. – 2017. – Vol.165. – Pp.74-81. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.01.013.
19. Schmidrathner C. *Buckling of a clamped strip-like beam with a linear pre-stress distribution* // Z Angew Math Mech. – 2020. – Vol.100. – Iss.7. – e201900336. DOI: 10.1002/zamm.201900336.

20. Paimushin V.N., Ivanov V.A., Lukankin S.A., Polyakova N.V., Firsov V.A., Kholmogorov S.A. *Exact analytical and numerical solutions of stability problems for a straight composite bar subjected to axial compression and torsion* // Mechanics of Composite Materials. – 2009. – Vol.45. – No.2. – Pp.113-136.
21. Aydogdu M. *Buckling analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method* // Composites Science And Technology. – 2006. – Vol.66. – Pp.2148-1255. DOI: 10.1016/j.compscitech.2005.10.029.
22. Aydogdu M. *Thermal buckling analysis of cross-ply laminated composite beams with general boundary conditions* // Composites Science And Technology. – 2007. – Vol.67. – Pp.106-1104. DOI: 10.1016/j.compscitech.2006.05.021.
23. Wang C.M., Zhang H., Challamel N., Duan W.H. *On boundary conditions for buckling and vibration of nonlocal beams* // European Journal of Mechanics / A Solids. – 2017. – Vol.61. – Pp.73-81. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.08.014.
24. Новожилов В.В. *Основы нелинейной теории упругости*. – М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 212 с.
25. Доннелл Л.Г. *Балки, пластины и оболочки*. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
26. Шклярчук Ф.Н. *К расчету деформированного состояния и устойчивости геометрически нелинейных упругих систем* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – №1. – С.140-146.
27. Иванов В.А., Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. *Линеаризованные уравнения нейтрального равновесия не тонких трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем и смежные вопросы нелинейной теории упругости* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2005. – №6. – С.113-131.
28. Болотин В.В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. – М.: Физматгиз, 1961.
29. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
30. Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. – М.: Машиностроение, 1988. – 272с.
31. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. *О геометрически нелинейных уравнениях теории безмоментных оболочек с приложениями к задачам о неклассических формах потери устойчивости цилиндра* // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т.70. – №1. – С.110-120.

REFERENCES

1. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. *Neprotivorechivyy variant teorii deformatsij sploshnykh sred v kvadrachnom priblizhenii* [A consistent version of the theory of deformations of continuous media in the quadratic approximation]. Doklady RAN, 2004, Vol.396, No.4. Pp.492-495.
2. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. *O sootnosheniyakh teorii deformatsij v kvadrachnom priblizhenii i problemy postroeniya utochnennykh variantov geometricheski nelinejnoj teorii sloistyx ehlementov konstruksij* [On the relations of the theory of deformations in the quadratic approximation and the problems of constructing refined versions of the geometrically nonlinear theory of layered

- structural elements*]. Prikladnaya matematika i mekhanika, 2005, Vol.69, Iss.5, Pp.864-882.
3. Paimushin V.N. *Problemy geometricheskoj nelinejnosti i ustojchivosti v mekhanike tonkikh obolochek i pryamolinejnykh sterzhnej* [Problems of geometric nonlinearity and stability in the mechanics of thin shells and rectilinear rods]. Prikladnaya matematika i mekhanika, 2007, Vol.71, Iss.5, Pp.855-893.
 4. Paimushin V.N., Polyakova N.V. *Neprotivorechivye uravneniya teorii ploskikh krivolinejnykh sterzhnej pri konechnykh peremeshheniyakh i linearizovannye zadachi ustojchivosti* [Consistent equations of the theory of plane curved rods under finite displacements and linearized stability problems]. Prikladnaya matematika i mekhanika, 2009, Vol.73, Iss.2, Pp.303-324.
 5. Bolotin V.V. *Nonconservative problems of the theory of elastic stability*. Elsevier Science and Technology, 1963, 324 p.
 6. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. *Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature*. Composite Structures, 2017, Vol.171, Pp.486-504. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.03.053.
 7. Huang S., Qiao P. *Nonlinear stability analysis of thin-walled I-section laminated composite curved beams with elastic end restraints*. Engineering Structures, 2021, Vol.226, 111336. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.111336.
 8. Cardoso D.C.T., Togashi B.S. *Experimental investigation on the flexural-torsional buckling behavior of pultruded GFRP angle columns*. Thin-Walled Structures, 2018, Vol.125, Pp.269-280. DOI: 10.1016/j.tws.2018.01.031.
 9. Cintra G.G., Cardoso D.C.T., Vieira J.D. *Parameters affecting local buckling response of pultruded GFRP I-columns: Experimental and numerical investigation*. Composite Structures, 2019, Vol.222, 110897. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.110897.
 10. Herrmann J., Kuhn T., Mullenstedt T., Mittelstedt S., Mittelstedt C. *Closed Form Approximate Solutions for the Local Buckling Behavior of Composite Laminated Beams Based on Third-Order Shear Deformation Theory*. Advances in Mechanics of Materials and Structural Analysis, Advanced Structured Materials, 2018, Vol.80, Pp.175-205. DOI: 10.1007/978-3-319-70563-7_8.
 11. Urbaniak M., Teter A., Kubiak T. *Influence of boundary conditions on the critical and failure load in the GFRP channel cross-section columns subjected to compression*. Composite Structures, 2015, Vol.134, Pp.199-208. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.076.
 12. Szymczak C., Kujawa M. *Flexural buckling and post-buckling of columns made of aluminium alloy*. European journal of mechanics a-solids, 2019, Vol.73, Pp.420-429. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2018.10.006.
 13. Brojan M., Puksic A., Kosel F. *Buckling and post-buckling of a nonlinearly elastic column*. ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 2007, Vol.87, No.7, Pp.518-527. DOI: 10.1002/zamm.200710333.
 14. Brojan M., Kosel F. *Approximative formula for post-buckling analysis of nonlinearly elastic columns with superellipsoidal cross-sections*. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2011, Vol.30, No.5, Pp.409-415. DOI: 10.1177/0731684410397897.
 15. Emam S., Lacarbonara W. *Buckling and postbuckling of extensible, shear-deformable beams: Some exact solutions and new insights*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2021, Vol.129, 103667. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103667.

16. Derikvand M., Farhatnia F., Hodges H. *Functionally graded thick sandwich beams with porous core: Buckling analysis via differential transform method*. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2023, Vol.51, Iss.7, Pp.3650-3677. DOI: 10.1080/15397734.2021.1931309.
17. Soleimani A., Zamani F., Gorgani H.H. *Buckling analysis of three-dimensional functionally graded Euler-Bernoulli nanobeams based on the nonlocal strain gradient theory*. Journal of Computational Applied Mechanics, 2022, Vol.53, No.1, Pp.24-40. DOI: 10.22059/jcamech.2022.338327.689.
18. She G.-L., Yuan F.-G., Ren Y.-R. *Nonlinear analysis of bending, thermal buckling and post-buckling for functionally graded tubes by using a refined beam theory*. Compos. Struc., 2017, Vol.165, Pp.74-81. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.01.013.
19. Schmidrathner C. *Buckling of a clamped strip-like beam with a linear pre-stress distribution*. Z. Angew. Math. Mech., 2020, Vol.100, Iss.7, e201900336. DOI: 10.1002/zamm.201900336.
20. Paimushin V.N., Ivanov V.A., Lukankin S.A., Polyakova N.V., Firsov V.A., Kholmogorov S.A. *Exact analytical and numerical solutions of stability problems for a straight composite bar subjected to axial compression and torsion*. Mechanics of Composite Materials, 2009, Vol.45, No.2, Pp.113-136.
21. Aydogdu M. *Buckling analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method*. Composites Science And Technology, 2006, Vol.66, Pp.2148-1255. DOI: 10.1016/j.compscitech.2005.10.029.
22. Aydogdu M. *Thermal buckling analysis of cross-ply laminated composite beams with general boundary conditions*. Composites Science And Technology, 2007, Vol.67, Pp.106-1104. DOI: 10.1016/j.compscitech.2006.05.021.
23. Wang C.M., Zhang H., Challamel N., Duan W.H. *On boundary conditions for buckling and vibration of nonlocal beams*. European Journal of Mechanics / A Solids, 2017, Vol.61, Pp.73-81. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.08.014.
24. Novozhilov V.V. *Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti [Foundations of the nonlinear theory of elasticity]*. Moskva-Leningrad, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1948, 212 p.
25. Donnell L.H. *Beams, Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1976.
26. Shklyarchuk F.N. *K raschetu deformirovannogo sostoyaniya i ustojchivosti geometricheski nelinejnykh uprugikh sistem [On the calculation of the deformed state and stability of geometrically nonlinear elastic systems]*. Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela, 1998, No.1, Pp.140-146.
27. Ivanov V.A., Paimushin V.N., Shalashilin V.I. *Linearizovannye uravneniya nejtral'nogo ravnovesiya ne tonkikh trekhslonnykh obolochek s transversal'no-myagkim zapolnitelem i smezhnye voprosy nelinejnoj teorii uprugosti [Linearized equations of neutral equilibrium of non-thin three-layer shells with a transversally soft filler and related issues of nonlinear elasticity theory]*. Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela, 2005, No.6, Pp.113-131.
28. Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoy ustojchivosti [Nonconservative problems of the theory of elastic stability]*. Moskva, Fizmatgiz, 1961.
29. Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogoslonojnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials]*. Moskva, Mashinostroenie, 1984, 264 p.
30. Vasiliev V.V. *Mekhanika konstruksij iz kompozitsionnykh materialov [Mechanics of structures made of composite materials]*. Moskva, Mashinostroenie, 1988, 272 p.

31. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. *O geometricheski nelinejnykh uravneniyakh teorii bezmomentnykh obolochek s prilozheniyami k zadacham o neklassicheskikh formakh poteri ustojchivosti tsilindra [On geometrically nonlinear equations of the theory of momentless shells with applications to problems of non-classical forms of cylinder stability loss]*. Prikladnaya matematika i mekhanika, 2006, Vol.70, No.1, Pp.110-120.

Поступила в редакцию 17 декабря 2024 года.

Сведения об авторах:

Паймушин Виталий Николаевич – д.ф.-м.н., проф. Кафедры «Прочность конструкций», ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», г. Казань, Россия; e-mail: vpajmushin@mail.ru

Левшонкова Наталья Витальевна – вед. инж., ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», г. Казань, Россия; e-mail: chydo.n@mail.ru

Чумакова Софья Федоровна – инж., ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», г. Казань, Россия; e-mail: sova3g@mail.ru