

УДК 539.3

EDN JDRGGC (<https://elibrary.ru/jdrggc>)

DOI 10.33113/mkmk.ras.2025.31.02.03



СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАЗБРОСЫ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ КАК ФАКТОР НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕПЛОАГРУЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ. СРАВНЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО И СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЙ

Миронихин А.Н.

АО «Композит», г. Королёв, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача оптимального проектирования многослойной композитной оболочки, подверженной воздействию давления и неравномерного нагрева, в детерминированной и стохастической постановках. Вектор варьируемых переменных включает толщины слоёв, целевой функцией является масса оболочки. Область поиска оптимального проекта в рамках детерминированной постановки задаётся геометрическими ограничениями на варьируемые переменные, температурным и прочностным ограничениями. Температурное ограничение обуславливает отсутствие перегрева внутреннего слоя. При формулировании стохастической задачи оптимального проектирования вводится вектор случайных величин, содержащий модули упругости, модули сдвига, коэффициенты Пуассона, технические константы линейного расширения, пределы прочности материалов слоёв, прочностное ограничение заменяется его вероятностным аналогом.

Разработан вычислительный алгоритм для численного решения задачи оптимального проектирования многослойной композитной оболочки. С помощью метода Монте-Карло осуществляются оценка расчётного значения вероятности безотказной работы P_s и построение детерминированного эквивалента исходной стохастической задачи оптимизации. В дальнейшем общая детерминированная задача нелинейного программирования преобразуется с использованием метода внешнего штрафа в последовательность задач безусловной минимизации, каждая из которых решается с применением алгоритма Нелдера-Мида. Для определения температурного поля в проектируемой конструкции применяется метод конечных разностей, анализ напряжённо-деформированного состояния многослойной композитной оболочки проводится с помощью метода конечных элементов.

Исследовано влияние статистических разбросов упругих и прочностных свойств материалов слоёв на весовой критерий эффективности многослойной оболочки. Построены зависимости минимального значения массы оболочки от коэффициентов вариаций физико-механических свойств материалов для различных уровней требуемой вероятности безотказной работы P_s . На основании анализа и сравнения полученных расчётных данных установлено соответствие параметров детерминированной и стохастической задач оптимального проектирования.

Ключевые слова: случайные разбросы механических свойств композитов; надёжность композитных конструкций; вероятностное проектирование конструкций; стохастическая оптимизация; оптимизация конструкции на основе надёжности; коэффициент запаса прочности

STATISTICAL VARIATIONS OF THE PHYSICO-MECHANICAL PROPERTIES OF COMPOSITE MATERIALS AS AN UNCERTAINTY FACTOR IN THE PROBLEMS OF OPTIMAL DESIGN OF HEAT-LOADED STRUCTURES. COMPARISON OF DETERMINISTIC AND STOCHASTIC SOLUTIONS

Mironikhin A.N.

JSC «Kompozit», Korolev, Russia

ABSTRACT

The problem of optimal design of a multilayer composite shell exposed to pressure and uneven heating in deterministic and stochastic formulations is considered. The vector of variable parameters includes the thickness of the layers, the target function is the mass of the shell. The search area for the optimal design within the framework of a deterministic formulation is determined by geometric constraints on variable parameters, temperature and strength constraints. The temperature limitation ensures that the inner layer does not overheat. When formulating a stochastic optimal design problem, a vector of random variables containing elastic modulus, shear modulus, Poisson coefficients, technical constants of linear expansion, strength limits of layer materials is introduced, and the strength constraint is replaced by its probabilistic counterpart.

A computational algorithm has been developed for numerically solving the problem of optimal design of a multilayer composite shell. The Monte Carlo method is used to estimate the calculated value of the reliability P_s and construct a deterministic equivalent of the initial stochastic optimization problem. In the future, a general deterministic nonlinear programming problem is transformed using the external penalty method into a sequence of unconditional minimization problems, each of which is solved using the Nelder-Mead algorithm. The finite difference method is used to determine the temperature field in the projected structure, and the stress-strain state of a multilayer composite shell is analyzed using the finite element method.

The influence of statistical variations in the elastic and strength properties of the materials of the layers on the weight criterion of the effectiveness of the multilayer shell is investigated. The dependences of the minimum value of the shell mass on the coefficients of variations in the physico-mechanical properties of materials for various levels of the required reliability P_s are constructed. Based on the analysis and comparison of the calculated data obtained, the correspondence of the parameters of deterministic and stochastic optimal design problems has been established.

Keywords: random variations in the mechanical properties of composites; reliability of composite structures; probabilistic design of structures; stochastic optimization; reliability based design optimization; the safety factor

ВВЕДЕНИЕ

При производстве элементов конструкций, функционирующих в условиях воздействия высокоинтенсивного термосилового нагружения, находят широкое применение композиционные материалы. Примером подобных материалов являются углерод-углеродные композиционные материалы (УУКМ), обладающие сочетанием высоких жаростойкости и жаропрочности, стойкостью к термическим ударам и способные обеспечивать несущую способность деталей

при неравномерных нагревах до 2500°C и более. Изготовление и экспериментальная обработка рассматриваемых теплонагруженных конструкций зачастую сопряжены со значительными техническими трудностями и высокой стоимостью. Эффективным и экономичным является подход к поиску наилучшего сочетания проектных параметров, при котором применяются методы математического моделирования, решаются задачи оптимального проектирования конструкций.

Вследствие сложности контроля и управления физическими процессами формирования углеродной матрицы газофазным или жидкофазным методом, разбросов свойств углеродного армирующего наполнителя и сырья, используемого для получения матрицы [1-3], для УУКМ характерны высокие значения коэффициентов вариаций физико-механических характеристик V , превышающие 10-15% [4]. При анализе работоспособности и проведении проектных расчётов конструкций из УУКМ необходимо располагать полным набором упругих и прочностных свойств анизотропных композитов в широком температурном диапазоне (до 2500°C и более). Определение механических характеристик материалов при подобных экстремальных условиях является сложной задачей, а несовершенство применяемых экспериментальных методов также может быть причиной высоких значений коэффициентов вариаций упругих и прочностных свойств.

Одним из возможных способов учёта стохастичности исходных данных в практических расчётах является назначение повышенного коэффициента запаса прочности k_F . При этом решается детерминированная задача, безотказное функционирование обеспечивается проверкой критерия прочности с использованием коэффициента запаса. Однако назначение коэффициента запаса прочности однозначно не определяет такой важный критерий работоспособности, как надёжность [5,6]: каждому фиксированному значению коэффициента при различных сочетаниях статистических разбросов свойств материалов и в общем случае нагрузок соответствуют разные уровни вероятности безотказной работы. Кроме того, современные тенденции разработки рациональных конструкций диктуют целесообразность обоснованного снижения коэффициента запаса прочности с целью уменьшения веса изделия и расхода материалов.

Альтернативным способом учёта случайных отклонений исходных данных от их номинальных значений является подход, связанный с переходом от традиционных детерминированных постановок задач оптимального проектирования к стохастическим и выбором в качестве критерия работоспособности вероятности безотказной работы P_s . Обсуждаемый в настоящей работе подход является более гибким по отношению к заданию исходных данных, позволяет повысить адекватность математических моделей и проводить глубокий и детальный анализ влияния случайных разбросов параметров нагрузки [7,8] и свойств материалов [9-11], начальных геометрических несовершенств конструкции [9,12] на оптимальный проект. Решение задач оптимального проектирования конструкций с вероятностными ограничениями, выделившихся в зарубежной литературе в отдельное направление – Reliability Based Design Optimization (RBDO) [13], требует длительного времени и больших вычислительных ресурсов.

Зачастую для оптимизации стохастических систем используются стохастические квазиградиентные алгоритмы [14-17]. В то же время при решении задач оптимального проектирования конструкций с вероятностными ограничениями находят более широкое применение непрямые методы, связанные

с аппроксимацией исходной стохастической задачи приближённой детерминированной задачей [9,11,12,15,17-21] и последующим её решением с помощью стандартных методов нелинейного программирования [22]. Таким образом, одной из основных проблем при решении рассматриваемых оптимизационных задач является построение детерминированного эквивалента, в частности, вычисление расчётного значения вероятности безотказной работы проектируемой конструкции.

Общие вопросы использования вероятностных методов в анализе надёжности элементов конструкций сооружений и машин широко изучены в работах А.Р. Ржаницына [23], В.В. Болотина [24,25], В.А. Светлицкого [26], К. Капура и Л. Ламберсона [5], В.Д. Райзера [6] и др. В монографии [6] представлены обзор современных методов вычисления вероятности безотказной работы и примеры их использования. В разное время многие практические задачи определения вероятности безотказной работы [27,28] и стохастической оптимизации конструкций [9,10] были численно решены с помощью метода статистического моделирования. В настоящее время развиваются и внедряются некоторые другие способы вычисления надёжности [29], среди которых своей эффективностью выделяются метод надёжности первого порядка [6,13] и его модификации.

Целью настоящей работы являлось решение задачи оптимального проектирования модельной многослойной конической оболочки, внешняя поверхность которой подвержена воздействию давления и теплового потока, в детерминированной и стохастической постановках, анализ и сравнение полученных результатов. В рамках задачи стохастической оптимизации исследовалось влияние статистических разбросов физико-механических свойств материалов слоёв, в частности, модулей упругости, модулей сдвига, коэффициентов Пуассона, технических констант линейного расширения, пределов прочности на весовой критерий эффективности проекта рассматриваемой композитной оболочки.

1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассматривается модельная коническая оболочка (рис.1), подверженная одностороннему нагреву тепловым потоком q и воздействию давления p , включающая три слоя:

- внешний ортотропный слой, выполненный из высокоплотного УУКМ;
- средний ортотропный теплоизоляционный слой из УУКМ;
- внутренний изотропный металлический силовой слой.

В качестве директивных параметров принимаются габаритные размеры оболочки, порядок укладки и материалы слоёв, тепловой поток q и давление p . Вектор варьируемых переменных X включает линейные распределения толщин слоёв относительно продольной оси z

$$X = \{h_1(z), h_2(z), h_3(z)\} = \{\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{31}, \delta_{32}\}, \quad (1)$$

$$h_i(z) = \frac{\delta_{i1} \cdot (L - z) + \delta_{i2} \cdot z}{L}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Целевой функцией является масса $M(X)$ проектируемой оболочки

$$M(X) = \sum_{i=1}^3 [\rho_i \cdot V_i(X)], \quad (3)$$

где ρ_i и $V_i(X)$ – соответственно, плотность и объём i -ого слоя.

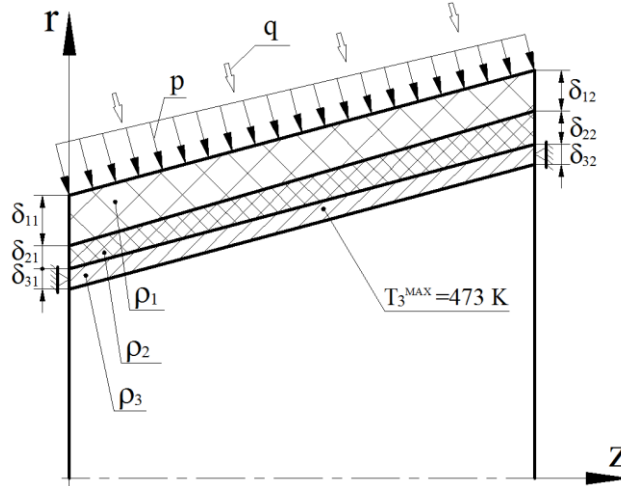


Рис.1. Расчётная схема многослойной оболочки.

Задача оптимального проектирования в общем виде формулируется следующим образом: необходимо найти сочетание распределений толщин слоёв, принадлежащих допустимой области поиска D_X , при котором масса оболочки принимает минимальное значение

$$M(X^{OPT}) = \min M(X), \quad X^{OPT} \in D_X \subset R^n. \quad (4)$$

Допустимая область поиска D_X для детерминированной постановки задачи оптимизации формируется набором следующих ограничений:

- геометрические ограничения на варьируемые переменные

$$h_{i\min} \leq \delta_{ij} \leq h_{i\max}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2; \quad (5)$$

- температурное ограничение для внутреннего металлического слоя, обуславливающее отсутствие его перегрева

$$g_T = \frac{T_3(z, r)}{T_3^{MAX}} - 1 < 0; \quad (6)$$

- прочностное ограничение g_S для каждого слоя оболочки строится на базе использования критерия наибольших напряжений

$$g_S = \max_{i=1,3} g_S^{(i)} < 0, \quad g_S^{(i)} = \max \left\{ \frac{\sigma_r^{(i)}}{F_r^{(i)}}, \frac{\sigma_z^{(i)}}{F_z^{(i)}}, \frac{\sigma_\theta^{(i)}}{F_\theta^{(i)}}, \frac{\tau_{rz}^{(i)}}{F_{rz}^{(i)}} \right\} - 1, \quad (7)$$

где σ_r , σ_z , σ_θ – радиальное, осевое и окружное нормальные напряжения, действующие в i -ом слое оболочки; F_r , F_z , F_θ – пределы прочности материала i -ого слоя в направлении осей r , z и θ , соответственно; τ_{rz} и F_{rz} – касательное напряжение и предел прочности при сдвиге в плоскости rz материала i -ого слоя

$$F_r = \begin{cases} F_r^+, & \sigma_r > 0, \\ F_r^-, & \sigma_r < 0; \end{cases} \quad F_z = \begin{cases} F_z^+, & \sigma_z > 0, \\ F_z^-, & \sigma_z < 0; \end{cases} \quad F_\theta = \begin{cases} F_\theta^+, & \sigma_\theta > 0, \\ F_\theta^-, & \sigma_\theta < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Аналогичным образом записывается стохастическая постановка задачи оптимального проектирования многослойной оболочки, отличия от детерминированной постановки заключаются в задании прочностного ограничения области поиска. В рамках стохастической задачи оптимизации вводится вектор случайных величин $\mathbf{Y}$, содержащий модули упругости E , модули сдвига G , коэффициенты Пуассона ν , технические константы линейного расширения (ТКЛР) α , пределы прочности F материалов слоёв. Каждая компонента данного вектора является нормально распределённой случайной величиной с известными математическим ожиданием и дисперсией

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{(E\alpha)} \oplus \mathbf{Y}^{(F)}, \quad Y_k \in N(\bar{Y}_{(k)}, S_{Y(k)}^2), \quad (9)$$

$$\mathbf{Y}^{(E\alpha)} = \{E_r^{(i)}, \dots, G_{rz}^{(i)}, \nu_{rz}^{(i)}, \dots, \alpha_r^{(i)}, \dots\}, \quad (10)$$

$$\mathbf{Y}^{(F)} = \{F_r^{+(i)}, F_r^{-(i)}, F_z^{+(i)}, \dots\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Полагается, что математическое ожидание и дисперсия каждой случайной величины могут быть получены на основании проведения физического или вычислительного экспериментов.

Вероятностное ограничение области поиска, являющееся вероятностным аналогом критерия наибольшим напряжений, имеет следующий вид

$$\begin{cases} g_s = \max_{i=1,3} \{P_\Psi - P_s^{(i)}\} \leq 0, \\ P_s^{(i)} = \min \{P(S_r^{(i)} > 0), P(S_z^{(i)} > 0), P(S_\theta^{(i)} > 0), P(S_{rz}^{(i)} > 0)\}. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь P_Ψ – заданное значение вероятности безотказной работы; P_s – минимальное расчётное значение вероятности безотказной работы; $S^{(i)}$ – резерв прочности [6,23] соответствующей компоненты напряжения для i -ого слоя

$$S_r = F_r - \sigma_r; \quad S_z = F_z - \sigma_z; \quad S_\theta = F_\theta - \sigma_\theta; \quad S_{rz} = F_{rz} - \tau_{rz}. \quad (13)$$

Таким образом, надёжность понимается как минимальная вероятность отсутствия превышения в каждой точке проектируемой конструкции какой-либо компонентой напряжения соответствующего предела прочности.

2. РАСЧЁТНЫЙ АЛГОРИТМ И ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ КОМПОЗИТНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Сформулированная стохастическая задача оптимального проектирования решается с использованием двойного вложенного цикла: для каждой i -ой итерации алгоритма оптимизации осуществляются вычисление вероятности безотказной работы P_s текущего проекта и построение детерминированного эквивалента исходной задачи. Данный подход позволяет решать задачу оптимального проектирования в детерминированной и стохастической постановках с применением единой расчётной схемы.

Детерминированная задача оптимального проектирования является общей задачей нелинейного программирования и при решении преобразуется с помощью метода внешних штрафных функций в последовательность задач безусловной минимизации [22]. Так как для неоднородной оболочечной конструкции прочностное ограничение может одновременно нарушаться в различных пространственных областях, то формальная запись штрафной функции $F_k(\mathbf{X})$ может быть выполнена различными способами:

- прочностное ограничение области поиска первого типа (maxgsi) учитывает наихудшую точку расчётной области

$$F_k(\mathbf{X}^{OPT}) = \min \left\{ M(\mathbf{X}) + r_k \cdot [g_{\Omega}^+(\mathbf{X})]^2 + r_k \cdot [g_T^+(\mathbf{X})]^2 + r_k \cdot [g_S^+(\mathbf{X})]^2 \right\}, \quad (14)$$

$$g_{\Omega}^+(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\delta_{ij} - h_{i\max} + |\delta_{ij} - h_{i\max}|}{2} + \frac{h_{i\min} - \delta_{ij} + |h_{i\min} - \delta_{ij}|}{2} \right), \quad (15)$$

$$g_T^+(\mathbf{X}) = \frac{g_T(\mathbf{X}) + |g_T(\mathbf{X})|}{2}, \quad (16)$$

$$g_S^+(\mathbf{X}) = \max_{i=1, NNODE} \left\{ \frac{g_S^{(i)}(\mathbf{X}) + |g_S^{(i)}(\mathbf{X})|}{2} \right\}, \quad (17)$$

где r_k – параметр штрафа; $NNODE$ – здесь и далее количество точек расчётной области, в частности, узлов сетки конечных элементов;

- прочностное ограничение области поиска второго типа (sumgsi) использует все точки расчётной области, в которых нарушается критерий прочности

$$F_k(\mathbf{X}^{OPT}) = \min \left\{ M(\mathbf{X}) + r_k \cdot [g_{\Omega}^+(\mathbf{X})]^2 + r_k \cdot [g_T^+(\mathbf{X})]^2 + r_k \cdot \sum_{i=1}^{NNODE} [g_S^{+(i)}(\mathbf{X})]^2 \right\}, \quad (18)$$

$$g_S^{+(i)}(\mathbf{X}) = \frac{g_S^{(i)}(\mathbf{X}) + |g_S^{(i)}(\mathbf{X})|}{2}. \quad (19)$$

Введённые штрафные функции будут задавать различные траектории поиска оптимального значения проекта, но при этом должны приводить к близким результатам. Каждая k -ая подзадача безусловной минимизации решается с помощью алгоритма Нелдера-Мида [22].

При анализе распределения температур в проектируемой многослойной оболочке, вычислении температурного ограничения g_T численно решается нестационарная осесимметричная задача теплопроводности с помощью метода конечных разностей. С целью определения напряжённо-деформированного состояния исследуемой конструкции и вычисления прочностного ограничения g_S численно решается осесимметричная задача теории упругости для многослойной оболочки с ортотропными в цилиндрической системе координат слоями с помощью метода конечных элементов. Построение разрешающих уравнений для определения неизвестных перемещений и напряжений осуществляется с использованием функционала Хеллингера-Рейсснера [30-32] с учётом отсутствия объёмных сил

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_R = & \iiint_V \left[\sigma_z \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} + \sigma_r \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_{\theta} \cdot \frac{u_r}{r} + \tau_{rz} \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] dV - \iiint_V W(\sigma) dV - \\ & - \iint_{S_p} [p_z^* \cdot u_z + p_r^* \cdot u_r] dS - \iint_{S_u} [p_z \cdot (u_z - u_z^*) + p_r \cdot (u_r - u_r^*)] dS. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь и далее вводится матричная запись разрешающих уравнений: $\{\sigma\} = \{\sigma_z \sigma_r \sigma_{\theta} \tau_{rz}\}^T$ – вектор неизвестных напряжений; $\{u\} = \{u_z u_r\}^T$ – вектор

неизвестных перемещений; $\{p^*\} = \{p_z^* p_r^*\}^T$ – вектор заданных на поверхности S_p усилий; $\{u^*\} = \{u_z^* u_r^*\}^T$ – вектор заданных на поверхности S_U перемещений. Выражение для функции $W(\sigma)$ имеет следующий вид [30]

$$W(\sigma) = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \cdot [S] \cdot \{\sigma\} + \{\sigma\}^T \cdot \{\varepsilon_T\}, \quad (21)$$

где $[S]$ – матрица податливости материала; $\{\varepsilon_T\}$ – вектор температурных деформаций.

При решении сформулированной задачи применяется разработанный субпараметрический кольцевой конечный элемент. Для аппроксимации неизвестных перемещений $\{u\}$ используются квадратичные базисные функции N_i ($i = 1, \dots, 8$), для аппроксимации геометрии, температурного поля и неизвестных напряжений применяются линейные базисные функции N_i^* ($i = 1, \dots, 4$). Выбор данных интерполяционных функций позволяет при незначительном увеличении вычислительных трудозатрат повысить точность приближённого решения, обеспечивая выполнение условия согласованности [31] порядков аппроксимирующих функций для напряжений $\{\sigma\}$ и перемещений $\{u\}$

$$n_p \geq n_U - n_r \quad (n_p \rightarrow n_U - n_r), \quad (22)$$

где n_p и n_U – число параметров в аппроксимации напряжений $\{\sigma\}$ и число параметров в аппроксимации перемещений $\{u\}$, соответственно; n_r – число независимых перемещений конечного элемента как жёсткого тела.

Матричные записи аппроксимации неизвестных перемещений $\{u\}$, напряжений $\{\sigma\}$ и их вариаций $\{\delta u\}$, $\{\delta \sigma\}$ имеют вид

$$\{u\} = [N] \cdot \{U\}; \quad \{\sigma\} = [H] \cdot \{P\}; \quad [B] = [A] \cdot [N]; \quad (23)$$

$$\{\delta u\} = [N] \cdot \{\delta U\}; \quad \{\delta \sigma\} = [H] \cdot \{\delta P\}; \quad [A] \cdot \{\delta u\} = [B] \cdot \{\delta U\}. \quad (24)$$

Здесь $\{U\} = \{U_{z1} U_{r1} U_{z2} U_{r2} \dots U_{z8} U_{r8}\}^T$ – вектор неизвестных узловых перемещений; $\{P\} = \{\sigma_{z1} \sigma_{r1} \sigma_{\theta1} \tau_{rz1} \dots \sigma_{z4} \sigma_{r4} \sigma_{\theta4} \tau_{rz4}\}^T$ – вектор неизвестных узловых напряжений; $\{\delta U\}$, $\{\delta P\}$ – векторы вариаций узловых перемещений и напряжений; $[N]$, $[H]$ – матрицы, содержащие функции аппроксимаций полей перемещений N_i и напряжений N_i^* в конечном элементе; $[A]$ – матрица, связывающая деформации и перемещения

$$\{\varepsilon\} = [A] \cdot \{u\}. \quad (25)$$

Условие стационарности ($\delta \mathcal{E}_R = 0$) функционала (20) с учётом (21), (23), (24) после некоторых преобразований позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных узловых перемещений

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\}, \quad (26)$$

где

$[K]$ – матрица жёсткости конечного элемента

$$[K] = [\Omega_{12}] \cdot [\Omega_{22}]^{-1} \cdot [\Omega_{21}]; \quad (27)$$

$\{F\}$ – вектор узловых сил

$$\{F\} = \{F_P\} + [\Omega_{12}] \cdot [\Omega_{22}]^{-1} \cdot \{F_T\}. \quad (28)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$[\Omega_{12}] = \iiint_V [B]^T \cdot [H] dV = [\Omega_{21}]^T; \quad [\Omega_{22}] = \iiint_V [H]^T \cdot [S] \cdot [H] dV; \quad (29)$$

$$\{F_P\} = \iint_{S_P} [N]^T \cdot \{p^*\} dS; \quad \{F_T\} = \iiint_V [H]^T \cdot \{\varepsilon_T\} dV. \quad (30)$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (26) осуществляется с использованием метода сопряжённых градиентов [22]. Выражения для определения неизвестных узловых напряжений в i -ом конечном элементе имеют вид

$$\{P\} = [\Omega_{22}]^{-1} \cdot [\Omega_{21}] \cdot \{U\} - [\Omega_{22}]^{-1} \cdot \{F_T\}. \quad (31)$$

В рамках детерминированной постановки задачи оптимального проектирования после определения напряжённо-деформированного состояния выполняется проверка критерия прочности в каждой расчётной точке конструкции, вычисляется прочностное ограничение g_s . При решении стохастической задачи оптимизации определение распределений напряжений является вспомогательным этапом вычисления расчётного значения вероятности безотказной работы P_s

$$P_s = P(F - \sigma > 0) = 1 - P_F, \quad (32)$$

где P_F – вероятность отказа.

Расчётное значение вероятности отказа P_F определяется с помощью метода Монте-Карло путём проведения M вычислительных экспериментов:

1. для каждого jj -ого ($jj = 1, \dots, M$) вычислительного эксперимента с помощью датчика псевдослучайных чисел выполняется разыгрывание N случайных векторов $\xi_R^{(+)}$ с равномерно распределёнными на интервале $(0;1)$ компонентами

$$\begin{cases} \xi_R^{(+)} = \{\xi_{R(1)}^{(+)}, \xi_{R(2)}^{(+)}, \dots, \xi_{R(k)}^{(+)}, \dots\}, \quad \xi_{R(k)}^{(+)} \in R(0;1), \\ \dim \xi_R^{(+)} = 12 \cdot \dim Y^{(E\alpha)}; \end{cases} \quad (33)$$

2. для каждого случайного вектора $\xi_R^{(+)}$ строится парный вектор $\xi_R^{(-)}$

$$\begin{cases} \xi_R^{(-)} = \{1 - \xi_{R(1)}^{(+)}, 1 - \xi_{R(2)}^{(+)}, \dots, 1 - \xi_{R(k)}^{(+)}, \dots\}, \\ \dim \xi_R^{(-)} = \dim \xi_R^{(+)}; \end{cases} \quad (34)$$

3. рассчитываются N пар случайных реализаций каждой k -ой компоненты вектора $Y^{(E\alpha)}$

$$\begin{cases} Y_{(k)}^{(E\alpha+)} = \bar{Y}_{(k)} + S_{Y(k)} \cdot (\xi_{R(1)}^{(+)} + \xi_{R(2)}^{(+)} + \dots + \xi_{R(12)}^{(+)} - 6), \\ Y_{(k)}^{(E\alpha-)} = \bar{Y}_{(k)} + S_{Y(k)} \cdot (\xi_{R(1)}^{(-)} + \xi_{R(2)}^{(-)} + \dots + \xi_{R(12)}^{(-)} - 6); \end{cases} \quad (35)$$

4. для каждой ii -ой ($ii = 1, \dots, 2N$) случайной реализации вектора $\mathbf{Y}^{(E\alpha)}$ проводится расчёт напряжённо-деформированного состояния;

5. для каждой расчётной точки конструкции вычисляются парные значения вероятности отказа $P_F^{(+)}$ и $P_F^{(-)}$

$$\begin{cases} P_F^{(+)} \approx \frac{1}{N} \sum_{ii=1}^N F_F(\sigma_{ii}^{(+)}), \sigma_{ii}^{(+)} = \varphi(\mathbf{Y}^{(E\alpha+)}) \\ P_F^{(-)} \approx \frac{1}{N} \sum_{ii=1}^N F_F(\sigma_{ii}^{(-)}), \sigma_{ii}^{(-)} = \varphi(\mathbf{Y}^{(E\alpha-)}) \end{cases} \quad (36)$$

где F_F – функция распределения предела прочности F ;

6. для каждой расчётной точки конструкции определяется jj -ая ($jj = 1, \dots, M$) случайная реализация вероятности отказа P_F как результат одного вычислительного эксперимента

$$P_F = \frac{1}{2} \cdot (P_F^{(+)} + P_F^{(-)}); \quad (37)$$

7. повторяется M раз вычислительный эксперимент, полученные результаты обрабатываются с нахождением следующих статистических оценок:

- математического ожидания

$$\bar{P}_F = \frac{1}{M} \sum_{jj=1}^M P_{F(jj)}; \quad (38)$$

- дисперсии

$$S^2(P_F) = \frac{1}{M-1} \sum_{jj=1}^M (P_{F(jj)} - \bar{P}_F)^2; \quad (39)$$

- доверительного интервала

$$\Delta(P_F) = \pm t_{(P;M)} \cdot \frac{S(P_F)}{\sqrt{M}}, \quad (40)$$

где $t_{(P;M)}$ – коэффициент Стьюдента, соответствующий заданной доверительной вероятности P и числу результатов экспериментов M .

Использование парных выборок случайных чисел с отрицательной корреляцией $\xi_R^{(+)}$ и $\xi_R^{(-)}$ при проведении компьютерного имитационного моделирования позволяет повысить точность расчёта вероятности отказа P_F . Уменьшение дисперсии моделируемой случайной величины обеспечивается выполнением условия отрицательной корреляции между функциями откликов от парных выборок $P_F(\xi_R^{(+)})$ и $P_F(\xi_R^{(-)})$

$$\text{cov}[P_F(\xi_R^{(+)}), P_F(\xi_R^{(-)})] < 0. \quad (41)$$

Результаты проверочных расчётов, подтверждающие наличие отрицательной корреляции между функциями откликов от парных выборок $P_S(\xi_R^{(+)})$ и $P_S(\xi_R^{(-)})$, для различных пространственных областей исследуемой конструкции (№1, №2 и №3) представлены на рис.2.

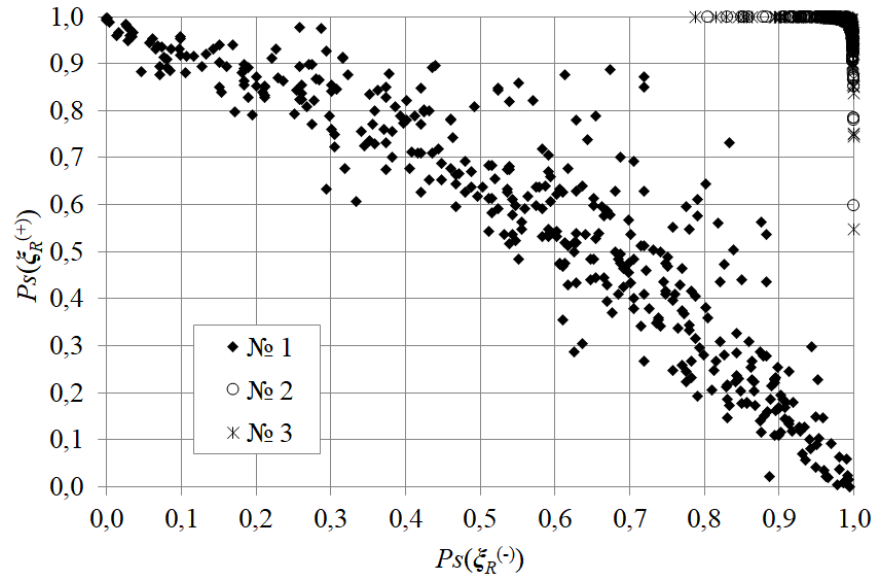


Рис.2. Проверка отрицательной корреляции между $P_S(\xi_R^{(+)})$ и $P_S(\xi_R^{(-)})$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ

При анализе и сравнении решений сформулированных детерминированной и стохастических задач оптимального проектирования многослойной композитной оболочки введено безразмерное оптимальное значение массы конструкции

$$\begin{cases} m^{OPT}(k_F) = \frac{M_{det}^{OPT}(k_F)}{M_{det}^{OPT}(1)}, & m^{OPT}(V_Y) = \frac{M_{stoch}^{OPT}(V_Y)}{M_{stoch}^{OPT}(0)}, \\ M_{det}^{OPT}(1) \equiv M_{stoch}^{OPT}(0), \end{cases} \quad (42)$$

где

k_F – детерминированный коэффициент запаса прочности

$$k_F = \frac{\bar{F}}{\bar{\sigma}}; \quad (43)$$

$V_{Y(k)}$ – коэффициент вариации физико-механической характеристики Y_k

$$V_{Y(k)} = \frac{S_{Y(k)}}{\bar{Y}_{(k)}} \cdot 100. \quad (44)$$

На рис.3 и в Таблице 1 приведены результаты решения задачи оптимизации в детерминированной постановке для различных значений коэффициента запаса прочности k_F .

Значения целевой функции, полученные при решении детерминированной задачи оптимизации с использованием различных типов штрафных функций, хорошо согласуются для всех k_F (см. рис.3). Это косвенно подтверждает корректность результатов решений сформулированной задачи. Данные, представленные в Таблице 1, показывают, что прочностное ограничение g_s

области поиска является активным, температурное ограничение g_T выполняется автоматически.

Таблица 1.

Результаты решения задачи оптимизации в детерминированной постановке.

Коэффициент запаса прочности k_F	Расчётные значения функций ограничений	
	g_T	g_s
1,00	-0,268	-0,00007
1,25	-0,271	-0,00116
1,50	-0,242	-0,00161
1,75	-0,284	-0,00046
2,00	-0,321	-0,00011

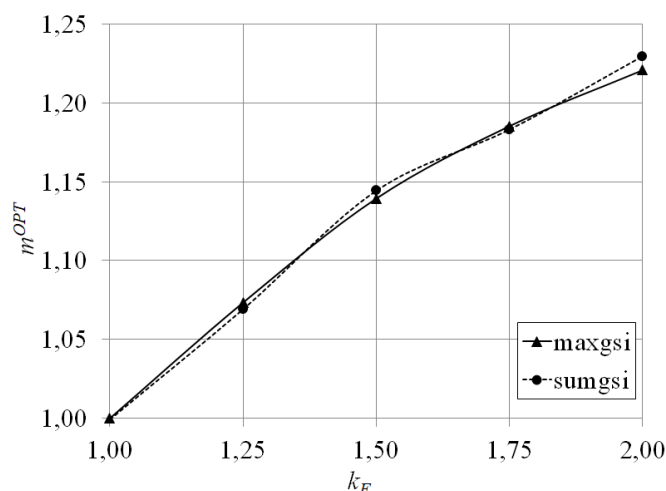


Рис.3. Зависимость безразмерного оптимального значения массы m^{OPT} проектируемой оболочки от коэффициента запаса прочности k_F .

Использование неусечённого нормального закона для описания распределения случайных физико-механических свойств Y_k материалов слоёв накладывает ограничение на выбор максимальных значений соответствующих коэффициентов вариаций $V_{Y(k)}$. Условие отсутствия реализаций в практических расчётах физически недопустимых отрицательных значений пределов прочности, модулей упругости и сдвига можно записать следующим образом

$$P(Y_k \geq 0) = 1 - P(Y_k < 0), \quad (45)$$

$$P(Y_k < 0) = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{\bar{Y}_{(k)}}{S_{Y(k)}}\right) = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{1}{V_{Y(k)}}\right), \quad (46)$$

где Φ_0 – интеграл Лапласа

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (47)$$

Подстановка (46) в (45) позволяет получить выражение

$$P(Y_k \geq 0) = 0,5 + \Phi_0\left(\frac{1}{V_{Y(k)}}\right). \quad (48)$$

Результаты вычисления вероятности разыгрывания неотрицательных значений случайных величин Y_k , подчиняющихся неусечённому нормальному закону распределения, для различных $V_{Y(k)}$ согласно (48) приведены в Таблице 2.

Таблица 2.

Результаты расчёта вероятности реализаций неотрицательных значений Y_k .

$V_{Y(k)}, \%$	$P(Y_k \geq 0)$	$V_{Y(k)}, \%$	$P(Y_k \geq 0)$
24	0,99999	29	0,99966
25	0,99997	31	0,99931
26	0,99993	33	0,99865
28	0,99984	34	0,99836

С учётом данных Таблицы 2 и малого размера применяемых для оценки вероятности безотказной работы расчётных выборок ($2N \cdot M < 1000$) при проведении качественных исследований решений стохастической задачи оптимального проектирования коэффициенты вариаций пределов прочностей V_F материалов слоёв варьировались от 5% до 30%, коэффициенты вариаций модулей упругости, модулей сдвига, коэффициентов Пуассона, технических констант линейного расширения всех материалов составляли 5%. На рис.4 приведены зависимости безразмерного оптимального значения массы m^{OPT} проектируемой оболочки от коэффициентов вариаций пределов прочностей V_F для различных уровней надёжности P_S . Для каждого найденного решения задачи стохастической оптимизации выполнялся проверочный прямой расчёт вероятности безотказной работы P_S на увеличенной выборке. Результаты вычислений представлены в Таблице 3. Доверительный интервал результатов вычислений P_S указан для вероятности 95%. Полученное решение принималось удовлетворительным, если заданное значение надёжности P_Ψ не выходило за границы доверительного интервала P_S .

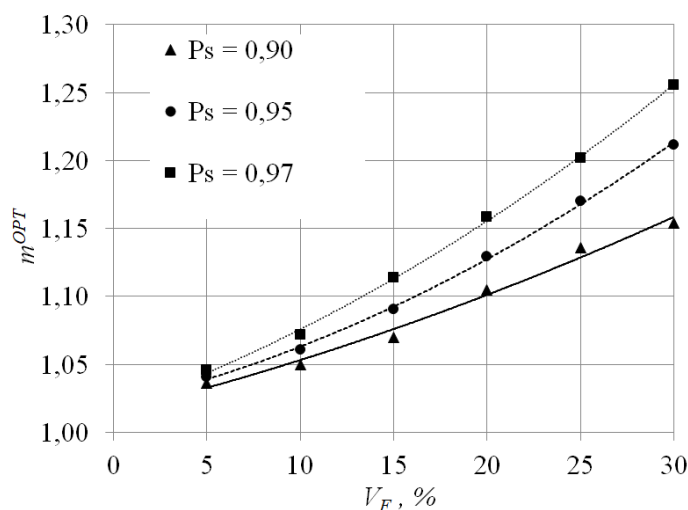


Рис.4. Зависимости безразмерного оптимального значения массы m^{OPT} оболочки от коэффициентов вариаций пределов прочностей V_F .

Таблица 3.

Результаты решения задачи оптимизации в стохастической постановке.

Заданное значение надёжности $P_\psi = 0,95$	
Коэффициент вариаций V_F , %	Расчётное значение надёжности P_s
5	$0,9526 \pm 0,0028$
10	$0,9506 \pm 0,0070$
15	$0,9491 \pm 0,0015$
20	$0,9498 \pm 0,0005$
25	$0,9499 \pm 0,0007$
30	$0,9501 \pm 0,0012$

При сопоставлении результатов решений детерминированной и стохастической задач оптимального проектирования многослойной оболочки было установлено соответствие между минимальным значением коэффициента запаса прочности k_F , коэффициентами вариаций физико-механических свойств материалов слоёв $V_{Y(k)}$ и вероятностью безотказной работы P_s . С этой целью для каждого найденного решения задачи стохастической оптимизации выполнялся прямой детерминированный расчёт с определением минимального значения коэффициента запаса прочности k_F . Также был применён и альтернативный подход, связанный с построением аппроксимации $k_F = f_1(m^{OPT})$

$$k_F = 56,089 \cdot (m^{OPT})^3 - 177,025 \cdot (m^{OPT})^2 + 189,515 \cdot m^{OPT} - 67,579. \quad (49)$$

Подстановка (49) в зависимость $m^{OPT} = f_2(V_F)$ позволяет получить $k_F = f_3(V_F)$. Построенные зависимости коэффициента запаса прочности k_F от коэффициентов вариаций пределов прочностей V_F для различных уровней надёжности P_s представлены на рис.5.

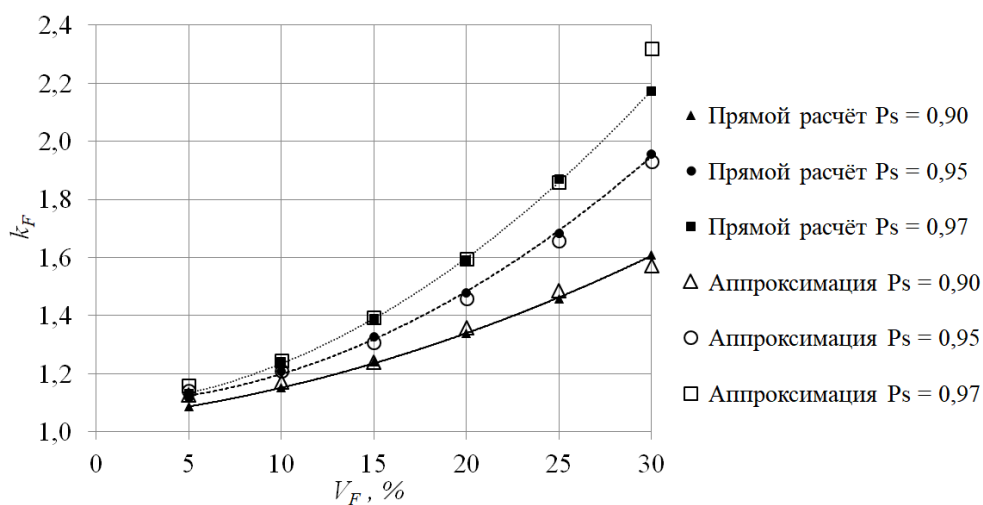


Рис.5. Зависимости коэффициента запаса прочности k_F оболочки от коэффициентов вариаций пределов прочностей V_F .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках настоящей работы сформулирована и численно решена задача оптимального проектирования модельной многослойной композитной оболочки, подверженной термосиловому воздействию, в детерминированной и стохастической постановках. Стохастическая постановка является обобщённой по отношению к традиционной детерминированной и позволяет учитывать более полную информацию о физико-механических свойствах применяемых материалов и нагрузках, действующих на конструкцию. Таким образом, учёт статистических разбросов физико-механических свойств материалов слоёв при высоких значениях требуемой вероятности безотказной работы P_s приводит к значительному увеличению весового критерия эффективности m^{OPT} .

Вместе с тем, результаты решения стохастической задачи оптимизации могут быть использованы при выборе и обосновании детерминированного значения коэффициента запаса прочности k_F проектируемой типовой конструкции.

Предложенный подход может эффективно применяться для оптимизации неоднородных конструкций с требуемой вероятностью безотказной работы P_s . При этом построенный вычислительный алгоритм позволяет использовать для описания случайных величин законы распределения, отличные от нормального.

ЛИТЕРАТУРА

1. Димитриенко Ю.И. *Технологические напряжения в углерод-углеродных композитных материалах* // Механика композитных материалов. – 1991. – №6. – С.1031-1042.
2. Соколкин Ю.В., Вотинов А.М., Ташкинов А.А., Постных А.М., Чекалкин А.А. *Технология и проектирование углерод-углеродных композитов и конструкций*. – М.: Наука. Физматлит, 1996. – 240 с.
3. Щурик А.Г. *Искусственные углеродные материалы*. – Пермь, 2009. – 342 с.
4. Жигун В.И., Плуме Э.З. *Зависимость упругих и прочностных свойств углерод-углеродных композитов от структуры армирования* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №3. – С.301-313.
5. Капур К., Ламберсон Л. *Надёжность и проектирование систем*. – М.: Издательство Мир, 1980. – 604 с.
6. Райзер В.Д. *Теория надёжности сооружений. Научное издание*. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 384 с.
7. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В., Рагнедда Ф. *Определение оптимальной формы штампа при наличии вероятностной информации о внешних воздействиях* // Проблемы прочности и пластичности. – 2009. – Вып.71 – С.52-60.
8. Почтман Ю.М., Деревянко Л.В., Мормуль Н.Ф. *Многокритериальная оптимизация гибридных композитных цилиндрических оболочек при действии стохастического комбинированного нагружения* // Механика композитных материалов. – 1990. – №6. – С.1094-1100.

9. Рикардс Р.Б. *Модели оптимизации оболочек из композиционных материалов с учётом статистических факторов* // Механика полимеров. – 1976. – №6. – С.1048-1058.
10. Голованов В.А., Жук Ю.Н. *Применение эвристических методов для оптимизации трёхслойной металлокомпозитной оболочки с учётом стохастических свойств композита* // Механика полимеров. – 1978. – №4. – С.683-689.
11. Гурвич М.Р. *Оптимальное проектирование хордовых маховиков из армированных пластиков при ограничении на надёжность* // Механика композитных материалов. – 1988. – №5. – С.908-914.
12. Лукошевичус Р.С., Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. *Вероятностный анализ устойчивости и минимизация массы цилиндрических оболочек из композитного материала со случайными начальными несовершенствами* // Механика полимеров. – 1977. – №1. – С.80-89.
13. Chiralaksanakul A., Mahadevan S. *First-order approximation methods in reliability-based design optimization* // Journal of Mechanical Design. – 2005. – Vol.127. – Pp.851-857.
14. Ермольев Ю.М. *Методы стохастического программирования*. – М.: Наука, 1976. – 240 с.
15. Кибзун А.И., Кан Ю.С. *Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 372 с.
16. Урясьев С.П. *Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр*. – М.: Наука, 1990. – 184 с.
17. Юдин Д.Б. *Математические методы управления в условиях неполной информации*. – М.: Советское радио, 1974. – 400 с.
18. Кнопов П.С., Норкин В.И. *Об условиях сходимости метода эмпирических средних в стохастическом программировании* // Кибернетика и системный анализ. – 2018. – Т.54. – №1. – С.51-66.
19. Лю Б. *Теория и практика неопределённого программирования*. – М.: Издательство БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 416 с.
20. Birge J., Louveau F. *Introduction to stochastic programming*. – New York: Springer, 2011. – 485 p.
21. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*. – Philadelphia: MPS-SIAM, 2009. – 436 p.
22. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. *Методы оптимизации*. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.
23. Ржаницын А.Р. *Теория расчёта строительных конструкций на надёжность*. – М.: Стройиздат, 1978. – 239 с.
24. Болотин В.В. *Применение методов теории вероятностей и теории надёжности в расчётах сооружений*. – М.: Стройиздат, 1971. – 256 с.
25. Болотин В.В. *Прогнозирование ресурса машин и конструкций*. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
26. Светлицкий В.А. *Статистическая механика и теория надёжности*. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 504 с.
27. Протасов В.Д., Ермоленко А.Ф., Филипенко А.А., Димитриенко И.П. *Прочность и надёжность цилиндрических оболочек, полученных методом непрерывной нитяной намотки* // Механика полимеров. – 1978. – №3. – С.443-451.

28. Резников Б.С. *Расчёт на прочность конструкций из армированных материалов методом Монте-Карло* // Механика композитных материалов. – 1986. – №6. – С.1059-1063.
29. Du X., Sudjianto A. *First-order saddlepoint approximation for reliability analysis* // AIAA Journal. – 2004. – Vol.42. – No.6. – Pp.1199-1207.
30. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
31. Рикардс Р.Б. *Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин*. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
32. Усюкин В.И. *Строительная механика конструкций космической техники*. – М.: Машиностроение, 1988. – 392 с.

REFERENCES

1. Dimitrienko Yu.I. *Tekhnologicheskie napryazheniya v uglerod-uglerodnykh kompozitnykh materialakh* [Technological stresses in carbon-carbon composite materials]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1991, No.6, Pp.1031-1042.
2. Sokolkin Yu.V., Votinov A.M., Tashkinov A.A., Postnykh A.M., Chekalkin A.A. *Tekhnologiya i projektirovanie uglerod-uglerodnykh kompozitov i konstruktsij* [Technology and design of carbon-carbon composites and structures]. Moskva, Nauka, Fizmatlit, 1996, 240 p.
3. Shhurik A.G. *Iskusstvennye uglerodnye materialy* [Artificial carbon materials]. Perm', 2009, 342 p.
4. Zhigun V.I., Plume E.Z. *Zavisimost' uprugikh i prochnostnykh svoystv uglerod-uglerodnykh kompozitov ot struktury armirovaniya* [The dependence of the elastic and strength properties of carbon-carbon composites from the reinforcement structure]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2015, Vol.21, No.3, Pp.301-313.
5. Kapur K., Lamberson L. *Nadyozhnost' i projektirovanie sistem* [Reliability in engineering design]. Moskva, Izdatel'stvo Mir, 1980, 604 p.
6. Rajzer V.D. *Teoriya nadyozhnosti sooruzhenij. Nauchnoe izdanie* [The theory of reliability of structures. Scientific publication]. Moskva, Izdatel'stvo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2010, 384 p.
7. Banichuk N.V., Ivanova S. Yu., Makeev E.V., Ragnedda F. *Opredelenie optimal'noj formy shtampa pri nalichii veroyatnostnoj informatsii o vneshnikh vozejstviyakh* [Optimal stamp shape under probabilistic data concerning external loading]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2009, Iss.71, Pp.52-60.
8. Pochtman Yu.M., Derevyanko L.V., Mormul' N.F. *Mnogokriterial'naya optimizatsiya gibridnykh kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek pri dejstvii stokhasticheskogo kombinirovannogo nagruzheniya* [Multicriterion optimization of hybrid composite cylindrical shells under stochastic combined loads]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1990, No.6, Pp.1094-1100.
9. Rikards R.B. *Modeli optimizatsii obolochek iz kompozitsionnykh materialov s uchyotom statisticheskikh faktorov* [Optimization models including statistical parameters for shells of composite materials]. *Mekhanika polimerov*, 1976, No.6, Pp.1048-1058.
10. Golovanov V.A., Zhuk Yu.N. *Primenenie ehvristicheskikh metodov dlya optimizatsii tryokhslojnoj metallokompozitnoj obolochki s uchyotom stokhasticheskikh svoystv kompozita* [Optimization of a three-layer metal – composite shell with

stochastic properties of the composite by heuristic methods]. Mekhanika polimerov, 1978, No.4, Pp.683-689.

11. Gurvich M.R. *Optimal'noe proektirovanie chordovykh machovikov iz armirovannykh plastikov pri ogranichenii na nadyozhnost'* [Optimal design of reinforced-plastic chord flywheels under reliability limitations]. Mekhanika kompozitnykh materialov, 1988, No.5, Pp.908-914.
12. Lukoshevichyus R.S., Rikards R.B., Teters G.A. *Veroyatnostnyj analiz ustojchivosti i minimizatsiya massy tsilindricheskikh obolochek iz kompozitnogo materiala so sluchajnymi nachal'nymi nesovershenstvami* [Probability analysis of the stability and minimization of the mass of cylindrical shells made of a composite material having random initial imperfections]. Mekhanika polimerov, 1977, No.1, Pp.80-89.
13. Chiralaksanakul A., Mahadevan S. *First-order approximation methods in reliability-based design optimization*. Journal of Mechanical Design, 2005, Vol.127, Pp.851-857.
14. Ermol'ev Yu.M. *Metody stokhasticheskogo programmirovaniya* [Stochastic programming methods]. Moskva, Nauka, 1976, 240 p.
15. Kibzun A.I., Kan Yu.S. *Zadachi stokhasticheskogo programmirovaniya s veroyatnostnymi kriteriyami* [Stochastic programming problems with probabilistic criteria]. Moskva, FIZMATLIT, 2009, 372 p.
16. Uryas'ev S.P. *Adaptivnye algoritmy stokhasticheskoy optimizatsii i teorii igr* [Adaptive algorithms of stochastic optimization and game theory]. Moskva, Nauka, 1990, 184 p.
17. Yudin D.B. *Matematicheskie metody upravleniya v usloviyakh nepolnoj informatsii* [Mathematical methods of management under conditions of incomplete information]. Moskva, Sovetskoe radio, 1974, 400 p.
18. Knopov P.S., Norkin V.I. *Ob usloviyakh skhodimosti metoda ehmpiricheskikh srednikh v stokhasticheskom programmirovanii* [About convergence conditions for the empirical mean method of stochastic programming]. Kibernetika i sistemnyj analiz, 2018, Vol.54, No.1, Pp.51-66.
19. Liu B. *Teoriya i praktika neopredelyonnogo programmirovaniya* [Theory and practice of uncertain programming]. Moskva, Izdatel'stvo Binom. Laboratoriya znaniy, 2005, 416 p.
20. Birge J., Louveaux F. *Introduction to stochastic programming*. New York, Springer, 2011, 485 p.
21. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*. Philadelphia, MPS-SIAM, 2009, 436 p.
22. Attekov A.V., Galkin S.V., Zarubin V.S. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moskva, Izdatel'stvo MGTU im. N.Eh. Bauman, 2003, 440 p.
23. Rzhantsyn A.R. *Teoriya raschyota stroitel'nykh konstruksij na nadyozhnost'* [The theory of calculating building structures for reliability]. Moskva, Strojizdat, 1978, 239 p.
24. Bolotin V.V. *Primenenie metodov teorii veroyatnostej i teorii nadyozhnosti v raschyotakh sooruzhenij* [Application of methods of probability theory and reliability theory in calculations of structures]. Moskva, Strojizdat, 1971, 256 p.
25. Bolotin V.V. *Prognozirovanie resursa mashin i konstruksij* [Forecasting the resource of machines and structures]. Moskva, Mashinostroenie, 1984, 312 p.

26. Svetlitskij V.A. *Statisticheskaya mekhanika i teoriya nadyozhnosti* [Statistical mechanics and reliability theory]. Moskva, Izdatel'stvo MGTU im. N.Eh. Baumana, 2004, 504 p.
27. Protasov V.D., Ermolenko A.F., Filipenko A.A., Dimitrienko I.P. *Prochnost' i nadyozhnost' tsilindricheskikh obolochek, poluchennykh metodom nepreryvnoj nityanoj namotki* [Strength and reliability of cylindrical shells prepared by the method of continuous filament winding]. Mekhanika polimerov, 1978, No.3, Pp.443-451.
28. Reznikov B.S. *Raschyot na prochnost' konstruksij iz armirovannykh materialov metodom Monte-Karlo* [Calculation of the strength of structures of reinforced materials by the Monte Carlo method]. Mekhanika kompozitnykh materialov, 1986, No.6, Pp.1059-1063.
29. Du X., Sudjianto A. *First-order saddlepoint approximation for reliability analysis*. AIAA Journal, 2004, Vol.42, No.6, Pp.1199-1207.
30. Washizu K. *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Variational methods in elasticity and plasticity]. Moskva, Mir, 1987, 542 p.
31. Rikards R.B. *Metod konechnykh ehlementov v teorii obolochek i plastin* [The finite element method in the theory of shells and plates]. Riga, Zinatne, 1988, 284 p.
32. Usyukin V.I. *Stroitel'naya mekhanika konstruksij kosmicheskoy tekhniki* [Construction mechanics of space technology structures]. Moskva, Mashinostroenie, 1988, 392 p.

Поступила в редакцию 28 февраля 2025 года.

Сведения об авторе:

Миронихин Андрей Николаевич – нач.сектора, АО «Композит», г. Королёв, Россия;
e-mail: oismv@kompozit-mv.ru