

УДК 539.3

EDN YHRSZT (<https://elibrary.ru/yhrszt>)

DOI 10.33113/mkmk.ras.2025.31.01.03



СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ПО ТОЛЩИНЕ ПЯТИСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ

Старовойтов Э.И., Будникова Д.А.

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Беларусь

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена задача о собственных колебаниях пятислойного симметричного по толщине стержня с двумя заполнителями. Несущие слои предполагаются тонкими, высокопрочными. Для них приняты гипотезы Бернулли о поперечных сечениях плоских и перпендикулярных деформированной осевой линии, после приложения нагрузки. В относительно толстых легких заполнителях выполняется гипотеза Тимошенко, согласно которой поперечное сечение остается плоским и несжимаемым, но поворачивается на некоторый дополнительный угол. Толщина несущих слоев в десять раз меньше толщины заполнителей. Система дифференциальных уравнений, описывающая собственные колебания стержня, получена вариационным методом. Учтены возникающие поперечные силы инерции. Для симметричного по толщине стержня система сводится к двум уравнениям в частных производных относительно прогиба и относительного сдвига в заполнителях. Приведено алгебраическое уравнение для определения собственных чисел. Вычислены первые 14 из них и соответствующие собственные частоты колебаний для стержня с жестко заделанными торцами. Их значения сведены в таблицу. Аналитическое решение начально-краевой задачи о собственных колебаниях пятислойного симметричного по толщине стержня получено с помощью разложения искомых прогиба и относительного сдвига в ряд по построенной системе собственных функций. Численно исследована зависимость первых трех частот от толщины центрального несущего слоя. Приведены графики зависимости частоты основного тона от толщины и материалов внешних несущих слоев и заполнителей. В качестве материалов несущих слоев принимались дюралюминий, титановый сплав, кордиерит. Заполнители: фторопласт-4, пенополиуретан, пенопласт.

Ключевые слова: симметричный пятислойный стержень; собственные колебания; аналитическое решение; собственные числа и частоты; перемещения; численные результаты

NATURAL VIBRATIONS SYMMETRICAL IN THICKNESS A FIVE-LAYER ROD

Starovoitov E.I., Budnikova D.A.

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

ABSTRACT

The problem of natural vibrations of a five-layer symmetrical rod with two fillers is considered. The bearing layers are assumed to be thin, high-strength. Bernoulli's hypotheses on plane and perpendicular cross-sections of a deformed centerline after applying a load are accepted for them. In relatively thick, light aggregates, the Timoshenko hypothesis holds,

according to which the cross-section remains flat and incompressible, but rotates by some additional angle. The thickness of the bearing layers is ten times less than the thickness of the fillers. The system of differential equations describing the natural oscillations of the rod is obtained by the variational method. The resulting transverse inertia forces are taken into account. For a rod that is symmetrical in thickness, the system is reduced to two partial differential equations with respect to deflection and relative shear in the fillers. An algebraic equation for determining eigenvalues is given. The first 14 of them and the corresponding natural oscillation frequencies for a rod with rigidly sealed ends are calculated. Their values are summarized in a table. An analytical solution to the initial boundary value problem of the natural oscillations of a five-layer rod symmetrical in thickness is obtained by decomposing the desired deflection and relative displacement in a series according to the constructed system of eigenfunctions. The dependence of the first three frequencies on the thickness of the central carrier layer has been numerically investigated. Graphs of the dependence of the pitch frequency on the thickness and materials of the outer bearing layers and fillers are presented. Duralumin, titanium alloy, and cordierite were used as the materials of the bearing layers. Fillers: fluoroplast-4, polyurethane foam, foam.

Keywords: symmetrical five-layer rod; natural vibrations; analytical solution; natural numbers and frequencies; displacements; numerical results

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость создания расчетных моделей квазистатического и динамического деформирования композитных элементов конструкций обусловлена их повсеместным применением в технике и строительстве. В монографии [1] изложены методы расчета многослойных конструкций на статические, динамические и температурные воздействия и методы расчета на устойчивость; описаны методы определения эффективных физико-механических характеристик и оптимального выбора параметров слоистых композиционных материалов. Подходы к разработке методик постановки и решения краевых задач для тонкостенных элементов конструкций, учитывающие воздействие внешней среды, предложены в монографиях [2-7]. Кинематические гипотезы, как правило, учитывают относительный сдвиг и работу касательных напряжений в заполнителе, тонкость и жесткость несущих слоев, выполненных из упругих, упругопластических и вязкоупругих материалов. Книга [8] содержит полное и подробное описание различных теорий, аналитических решений и конечно-элементных моделей многослойных композитных пластин и оболочек. В ней отражены достижения в области моделирования материалов в целом и композитных материалов и конструкций в частности. Монографии [9-11] посвящены исследованию температурных напряжений и деформирования анизотропных пластин и оболочек, рассмотрению прикладных задач механики композитных цилиндрических оболочек.

Собственные колебания упругих слоистых балок, пластин и оболочек исследовались в статьях [12-16]. Приведены решения начально-краевых задач, исследована зависимость собственных частот колебаний от геометрических и механических характеристик материалов слоев. Колебания трехслойных и композитных оболочек под действием резонансных и нестационарных нагрузок рассматривались в работах [17-20].

Публикации [21-25] посвящены анализу динамического поведения трехслойных и композитных пластин. Геометрические гипотезы соответствуют ломаной линии, заполнители приняты легкими, т.е. в них не учитывается работа

касательных напряжений. Аналитические решения, описывающие собственные и вынужденные колебания, отклик на нестационарные нагружения, получены в виде разложения искомых перемещений в ряд по системам собственных функций. В статьях [26,27] приведена вариационная постановка задачи термомеханики для слоистых структур, исследовано воздействие стационарного температурного поля на параметры колебаний трехслойной пластины при резонансе. В работах исследуется влияние упругого основания на динамическое и квазистатическое деформирование композитных балок и пластин. Используются модели основания Винклера и Пастернака. Получены аналитические решения указанных краевых задач при локальных и непрерывных нагрузках. Проведена их численная адаптация.

Анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) упругих и упругопластических трехслойных и композитных балок и пластин проводится в статьях [27-40]. Работы [41,42] посвящены исследованию деформирования трехслойной полосы с несущими слоями из сплава с памятью формы. Материал внутреннего слоя принят вязкоупругим.

Здесь приведена постановка и получено решение краевой задачи о собственных колебаниях симметричного по толщине пятислойного стержня.

1. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Декартова система координат в пятислойном стержне связана со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя (рис.1). В тонких несущих слоях выполняются гипотезы Бернулли, в соответствии с которыми поперечные сечения слоев 1, 2, 4 остаются плоскими и нормальными деформированной осевой линии после воздействия нагрузки. В сравнительно толстых заполнителях 3, 5 справедлива гипотеза Тимошенко: поперечные сечения после приложения нагрузки остаются плоскими, несжимаемыми по толщине, но поворачиваются на некоторый дополнительный угол $\psi(x,t)$. Искомыми функциями являются прогиб стержня $w(x,t)$ и относительный сдвиг $\psi(x,t)$. Нагрузка $q(x,t)$ предполагается распределенной по верхней плоскости стержня.

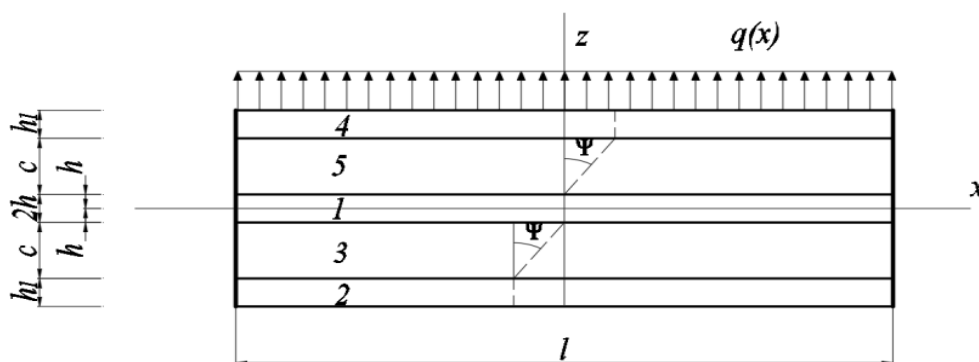


Рис.1. Расчетная схема пятислойного стержня.

Выражения для продольных перемещений $u_x^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$ – номер слоя) через искомые функции $w(x,t)$, $\psi(x,t)$ получим, исходя из принятых гипотез (нумерации в соответствии с расположением слоев на рис.1)

$$\begin{aligned}
u_x^{(4)} &= -zw_{,x} + c\psi, & (c + h \leq z \leq c + h + h_1), \\
u_x^{(5)} &= -zw_{,x} + (z - h)\psi, & (h \leq z \leq c + h), \\
u_x^{(1)} &= -zw_{,x}, & (-h \leq z \leq h), \\
u_x^{(3)} &= -zw_{,x} + (z + h)\psi, & (-h - c \leq z \leq -h), \\
u_x^{(2)} &= -zw_{,x} - c\psi, & (-h - h_1 - c \leq z \leq -h - c),
\end{aligned} \tag{1}$$

где z – координата рассматриваемой точки поперечного сечения; $c\psi$ – величины смещения внешних несущих слоев за счет сдвига в заполнителях; запятая в нижнем индексе обозначает производную по координате x .

Продольные деформации следуют из соотношений Коши [1] и перемещений в слоях стержня (1)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^{(4)} &= -zw_{,xx} + c\psi_{,x}, & \varepsilon_{xz}^{(4)} &= 0, \\
\varepsilon_x^{(5)} &= -zw_{,xx} + (z - h)\psi_{,x}, & \varepsilon_{xz}^{(5)} &= \frac{\Psi}{2}, \\
\varepsilon_x^{(1)} &= -zw_{,xx}, & \varepsilon_{xz}^{(1)} &= 0, \\
\varepsilon_x^{(3)} &= -zw_{,xx} + (z + h)\psi_{,x}, & \varepsilon_{xz}^{(3)} &= \frac{\Psi}{2}, \\
\varepsilon_x^{(2)} &= -zw_{,xx} - c\psi_{,x}, & \varepsilon_{xz}^{(2)} &= 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

После определения продольных перемещений и деформаций, напряжения в слоях определяются с помощью закона Гука

$$\begin{aligned}
s_{xx}^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_{xx}^{(k)}, & \sigma^{(k)} &= 3K_k \varepsilon^{(k)}, \\
s_{xz}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}, & s_{xz}^{(5)} &= 2G_5 \varepsilon_{xz}^{(5)},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $s_{xx}^{(k)}$, $s_{xz}^{(3)}$, $s_{xz}^{(5)}$ – компоненты девиатора тензора напряжений, $\sigma^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{xx}^{(k)}$; $\varepsilon_{xx}^{(k)}$, $\varepsilon_{xz}^{(3)}$, $\varepsilon_{xz}^{(5)}$ – компоненты девиатора тензора деформаций, $\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}\varepsilon_{xx}^{(k)}$; G_k , K_k – модули упругости материалов слоев (сдвига и объемного деформирования).

Для получения системы дифференциальных уравнений, описывающей поперечные колебания рассматриваемого стержня, используется вариационный принцип Лагранжа с добавлением сил инерции

$$\delta A = \delta W, \tag{4}$$

где δA – виртуальная работа внешней нагрузки, включая силы инерции; δW – вариация работы внутренних усилий

$$\begin{aligned}
\delta A &= \iint_S (q - M_0 \ddot{w}) \delta w dS = \int_0^l (b_0 q - M_0 \ddot{w}) \delta w dx, \\
\delta W &= \iint_S \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz dS,
\end{aligned} \tag{5}$$

$M_0 \ddot{w}$ – силы инерции в поперечном направлении, точка сверху обозначает производную по времени, $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5) b_0 l$, ρ_k – плотность материала, b_0 – ширина поперечного сечения; δ – оператор вариации.

Заметим, что работа касательных напряжений в легком заполнителе в (5) не учитывается в связи с их малостью.

Подставим работы (5) в уравнение (4) с учетом виртуальных деформаций,

следующих из (2). Выполнение уравнения (4) возможно только при равенстве нулю коэффициентов при вариациях искомых функций. Из этого условия следуют уравнения движения

$$\begin{aligned} H_{,x} &= 0, \\ M_{,xx} - M_0 \ddot{w} &= -b_0 q, \end{aligned} \quad (6)$$

где $H_{,x}$, $M_{,xx}$ – обобщенные (суммарные) внутренние усилия и моменты, определяемые формулами

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{k=1}^5 M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad N_x = \sum_{k=1}^5 N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \\ H &= \left(M_x^{(3)} + M_x^{(5)} \right) + c \left(N_x^{(4)} - N_x^{(2)} \right) + h \left(N_x^{(3)} - N_x^{(5)} \right). \end{aligned}$$

Чтобы получить уравнения колебаний пятислойного стержня в искомыми функциях, необходимо выразить обобщенные внутренние усилия через $w(x, t)$, $\psi(x, t)$. С помощью закона Гука (3) имеем

$$\begin{aligned} M_x &= -b_0 \left[\frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)) \right] w_{,xx} - \\ &\quad - b_0 \left[K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) + \frac{1}{3} K_2^+ c^2 (3h + 2c) \right] \psi_{,x}, \\ H &= b_0 \left[-\frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right] w_{,xx} + b_0 \left[c^2 \left(\frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right) \right] \psi_{,x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив выражения (7) в уравнения (6), получим искомые уравнения

$$\begin{aligned} a_1 \psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} &= 0, \\ a_2 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} - M_0 \ddot{w} &= -q, \end{aligned} \quad (8)$$

где a_i – коэффициенты

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[c^2 \left(\frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right) \right], \quad a_2 = \left[\frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right], \\ a_4 &= \left[\frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3h^2 + 3c^2 + 3h_1 h + 3h_1 c + 6ch) \right], \\ K_k + \frac{4}{3} G_k &\equiv K_k^+. \end{aligned}$$

В начальный момент времени прогиб $w_0(x)$ стержня и его производная $\dot{w}_0(x)$ по времени (скорость) считаются заданными

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x). \quad (9)$$

В качестве граничных принимаются условия жесткой заделки торцов стержня $x = 0; l$

$$\psi(x, t) = w(x, t) = w_{,x}(x, t) = 0. \quad (10)$$

2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Система дифференциальных уравнений, описывающая собственные

колебания пятислойного стержня, следует из (8) при отсутствии нагрузки $q = 0$. После некоторых преобразований имеем

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{a_2}{a_1} w_{,x} + C_5 x + C_6, \\ w_{,xxxx} - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \ddot{w} &= 0.\end{aligned}\tag{11}$$

Прогиб стержня принимаем в виде произведения неизвестной координатной функции $v(x)$ и гармонической функции времени

$$w = v(x) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)],\tag{12}$$

где A, B – константы интегрирования, следующие из начальных условий (9).

Вторая производная от прогиба (12) будет

$$\ddot{w} = -v(x) \omega^2 [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)].\tag{13}$$

Дифференциальное уравнение для определения координатной функции $v(x)$ получим, подставив (12) и (13) во второе уравнение системы (11), и приравняв коэффициенты перед функциями времени

$$v_{,xxxx} - \beta^4 v = 0,\tag{14}$$

где введено обозначение $\beta^4 = a_1 M_0 \omega^2 / (a_4 a_1 - a_2^2)$.

Следовательно, параметр β будет собственным числом оператора четвертой производной в (14), а $v(x)$ – его собственной функцией. В результате исследования было установлено, что знак перед параметром β^4 всегда положительный. Тогда решение дифференциального уравнения (14) будет

$$v(\beta x) = C_1 \operatorname{sh}(\beta x) + C_2 \operatorname{ch}(\beta x) + C_3 \sin(\beta x) + C_4 \cos(\beta x),\tag{15}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – искомые константы интегрирования.

Система уравнений для определения констант интегрирования в случае граничных условий заделки (9) сводится к системе двух алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2

$$\begin{aligned}C_1 (\operatorname{sh}(\beta l) - \sin(\beta l)) + C_2 (\operatorname{ch}(\beta l) - \cos(\beta l)) &= 0, \\ C_1 (\operatorname{ch}(\beta l) - \cos(\beta l)) + C_2 (\operatorname{sh}(\beta l) + \sin(\beta l)) &= 0,\end{aligned}\tag{16}$$

где использованы соотношения $C_3 = -C_1$, $C_4 = -C_2$, следующие из (15) при выполнении граничного условия $w(0, t) = 0$, $w_{,x}(0, t) = 0$ из (10).

Полученная однородная система (16), имеет ненулевое решение только при равенстве нулю ее определителя. Из этого условия получаем алгебраическое уравнение для определения собственных чисел

$$\operatorname{sh}^2(\beta l) - \sin^2(\beta l) - (\operatorname{ch}(\beta l) - \cos(\beta l))^2 = 0.$$

После элементарных преобразований это уравнение приводится к виду

$$\operatorname{ch}(\beta l) \cos(\beta l) = 1.\tag{17}$$

Решением уравнения (17) будет бесконечное счетное множество собственных чисел β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), после нахождения которых, частоты собственных колебаний можно определить из формулы, введенной в (14)

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4 (a_4 a_1 - a_2^2)}{a_1 M_0}. \quad (18)$$

Константы интегрирования будут зависеть от частоты собственных колебаний ω_n . Из первого уравнения (16) следует

$$C_{2n} = -C_{1n} \frac{\operatorname{sh}(\beta_n l) - \sin(\beta_n l)}{\operatorname{ch}(\beta_n l) - \cos(\beta_n l)}. \quad (19)$$

В общем случае для описания прогиба пятислойного стержня вводится система собственных ортонормированных функций $v_n \equiv v(\beta_n, x)$

$$v_n = \frac{1}{d_n} (\operatorname{sh}(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) - S_n (\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x))), \quad (20)$$

где S_n – коэффициент из (19), d_n – нормировочный коэффициент

$$S_n = \frac{\operatorname{sh}(\beta_n l) - \sin(\beta_n l)}{\operatorname{ch}(\beta_n l) - \cos(\beta_n l)},$$

$$d_n^2 = \int_0^l (\operatorname{sh}(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) - S_n (\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)))^2 dx.$$

В конечном виде искомый прогиб представляется с помощью разложения в ряд по полученной фундаментальной системе собственных функций (20)

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)). \quad (21)$$

Относительный сдвиг получим, используя первое уравнение из системы (11) и граничные условия на торцах $\psi(0, t) = \psi(1, t) = 0$. Из граничных условий (10) следуют константы интегрирования $C_5 = C_6 = 0$.

В результате относительный сдвиг получим в виде разложения в ряд

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \quad (22)$$

где система функций

$$\varphi_n = \frac{a_2 \beta_n}{a_1 d_n} (\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x) - S_n (\operatorname{sh}(\beta_n x) + \sin(\beta_n x))).$$

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Алгебраическое уравнение для собственных чисел (17) не зависит от упругих характеристик материалов слоев. Для стержня единичной длины ($l = 1$) его решения исследованы на интервале числовой оси 0-50. Найденные 14 собственных чисел β_n и соответствующие им частоты собственных колебаний ω_n пятислойного стержня ($b_0 = 0,1$), набранного из базовых материалов Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т, сведены в Таблицу 1. Упругие характеристики этих и других используемых материалов (МПа): Д16-Т – $K = 0,9214 \cdot 10^5$, $G = 0,2671 \cdot 10^5$; фторопласт-4 – $K = 4700$, $G = 90$; титановый сплав – $K = 1,04 \cdot 10^5$, $G = 0,41 \cdot 10^5$; кордиерит – $K = 5,58 \cdot 10^5$, $G = 2,58 \cdot 10^5$. Толщины слоев, если другое не указано, $h = h_1 = 0,01$, $c = 0,1$. Следует отметить,

что приведенные собственные числа распределены на отрезке числовой оси достаточно равномерно.

Таблица 1.

Собственные числа и частоты пятислойного стержня.

Номер n	β_n	$\omega_n, \text{с}^{-1}$	Номер n	β_n	$\omega_n, \text{с}^{-1}$
0	4,730	3198,5	7	26,704	101943,7
1	7,853	8816,9	8	29,845	127341,5
2	10,995	17284,7	9	32,987	155561,2
3	14,137	28572,5	10	36,128	186602,9
4	17,279	42682,3	11	42,412	257152,2
5	20,420	59614,1	12	45,553	296659,8
6	23,562	79368,0	13	48,695	338989,4

На рис.2 показана зависимость первых трех частот собственных колебаний (18) пятислойного базового стержня от толщин: a – внутреннего несущего слоя h ; b – внешних несущих слоев h_1 . С увеличением номера частоты ее зависимость от толщины внутреннего несущего слоя становится более нелинейной.

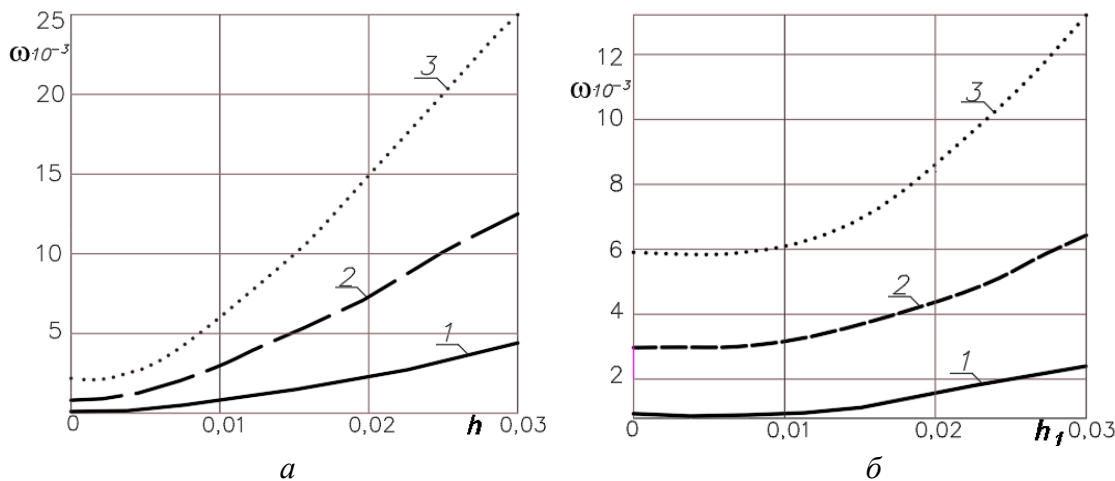


Рис.2. Зависимость частот ω_n от толщины: а) центрального слоя h ; б) внешних несущих слоев h_1 . 1 – ω_0 ; 2 – ω_1 ; 3 – ω_2 .

На рис.3 приведены графики изменения первой частоты ω_0 в зависимости от толщины h центрального слоя – а, а также внешних слоев h_1 – б, при различных материалах внешних несущих слоев: Существенное различие наблюдается при достаточно тонком центральном слое, далее кривые на рис.3а сближаются. При изменении толщины внешних слоев – б графики ω_0 для слоев из дюралюминия и титанового сплава практически неразличимы. Если несущие слои из кордиерита, то на принятом интервале частота увеличивается в 2,15 раза.

Рис.4 отражает зависимость частоты ω_0 от материала заполнителей при изменении толщины центрального слоя h – а. Несущие слои приняты из дюралюминия. Использование более легких полимерных материалов в качестве заполнителя приводит к увеличению собственной частоты колебаний стержня почти в 2 раза. Увеличение толщины заполнителей – б вызывает падение

частоты у базового пакета и относительно небольшое уменьшение при использовании пеноматериалов.

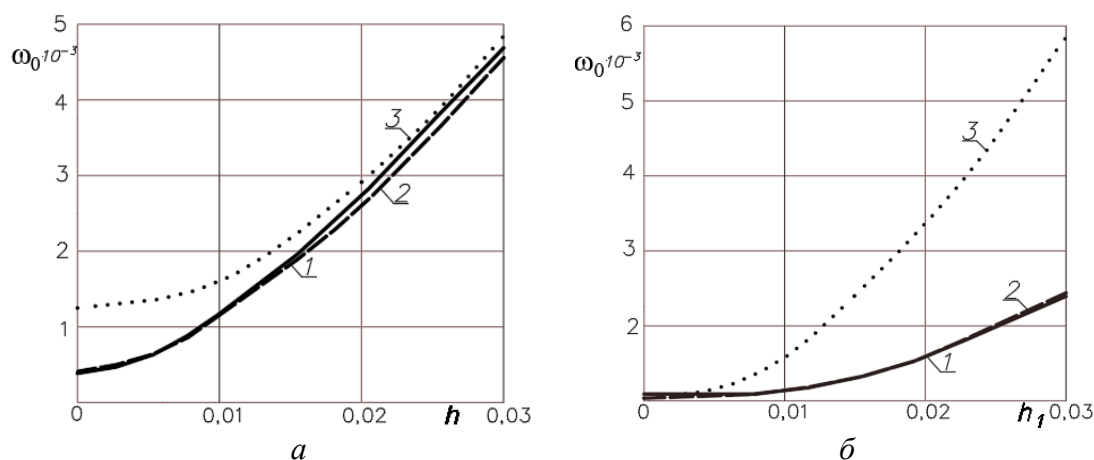


Рис.3. Зависимость частоты ω_0 от толщины: а) центрального слоя h ; б) внешних несущих слоев h_1 . 1 – Д16Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16Т, 2 – титан – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан, 3 – кордиерит – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – кордиерит.

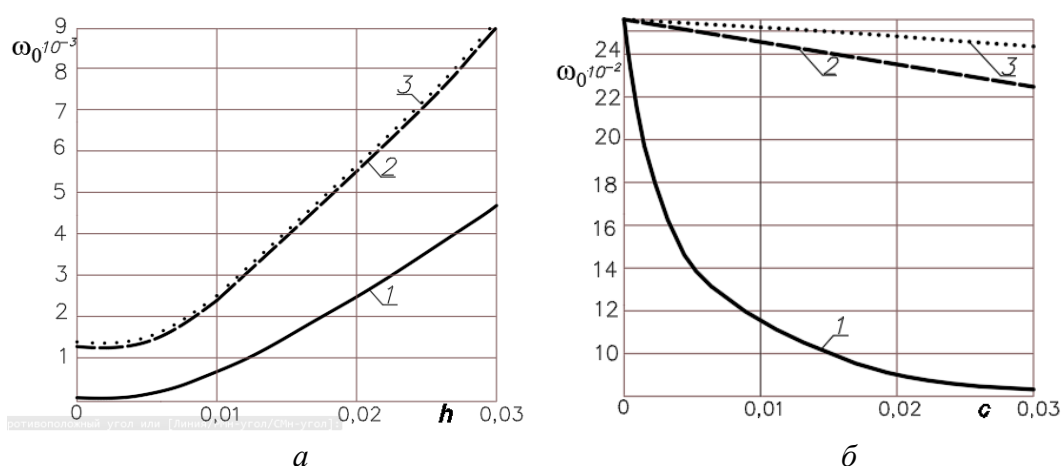


Рис.4. Зависимость ω_0 от материала заполнителя при росте толщины центрального слоя h – а; б – толщины заполнителей c . 1 – фторопласт; 2 – пенопласт; 3 – пенополиуретан.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в работе постановка и решение начально-краевой задачи, полученные формулы и вычисленные значения собственных чисел позволяют проводить численный анализ зависимости частот собственных колебаний симметричного по толщине пятислойного стержня от геометрических и механических характеристик материалов слоев. Построенную систему собственных функций можно использовать для исследования вынужденных колебаний указанного стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций*. – М.: Физматлит, 2005. – 576 с.
3. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. *Математические модели механики твердого тела*. – Минск: БГУ, 2021. – 535 с.
4. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, Starovoitov E.I. *Mechanics of solid deformable body*. – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.
5. Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б. *Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузениях*. – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.
6. Старовойтов Э.И., Шафиев Ю.В., Нестерович А.В., Козел А.Г. *Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках*. – Гомель: Белорусский государственный университет транспорта, 2024. – 395 с.
7. Starovoitov E.I., Zhuravkov M.A., Leonenko D.V., Lyu Yongtao. *Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields*. – Springer Nature Singapore, Pte Ltd., 2024. – 384 p.
8. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*. 2nd ed. – Boca Raton: CRC Press, 2003. – 858 p.
9. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications*. – Academic Press, 2016. – 410 p.
10. Aghalovyan L., Prikazchikov D. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. – Singapore: World Scientific Publishing Co., 2015. – 360 p.
11. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 408 с.
12. Mikhasev G.I., Altenbach H. *Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells* / In book: *Thin-walled laminated structures*. – Cham: Springer, 2019. – Pp.157-198.
13. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №2. – С.162-169.
14. Паймушин В.Н., Иванов В.И., Хусаинов В.Р. *Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т.8. – №4. – С.543-554.
15. Лачугина Е.А. *Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями* // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып.15. – С.212-219.
16. Лачугина Е.А. *Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями* // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – №16. – С.111-116.
17. Bakulin V.N., Boitsova D.A., Nedbai A.Ya. *Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell* // *Mechanics of composite materials*. – 2021. – Vol.57. – No.5. – Pp.623-634.

18. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells* // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol.43. – No.2. – Pp.145-152.
19. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol.40. – No.4. – Pp.439-447.
20. Suvorov Ye.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium* // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2012. – Vol.76. – No.5. – Pp.511-518.
21. Paimushin V.N., Gazizullin R.K. *Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate* // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol.53. – No.3. – Pp.407-436.
22. Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A. *Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate* // International Journal of Solids and Structures. – 2017. – Vol.113-114. – Pp.169-179.
23. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates* // Composite Structures. – 2015. – No.133. – Pp.1127-1136.
24. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates* // Aerospace Science and Technology. – 2016. – No.52. – Pp.41-51.
25. Леоненко Д.В., Маркова М.В. *Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки* // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – №1. – С.49-63.
26. Белов П.А., Лурье С.А. *Вариационная постановка задач обратимой термомеханики для слоистых структур* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2024. – Т.30. – №1. – С.101-117.
27. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Колебания сэндвич-пластины в температурном поле при кольцевой резонансной нагрузке* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2024. – Т.30. – №3. – С.323-337.
28. Pradhan M., Dash P.R., Pradhan P.K. *Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient* // Meccanica. – 2016. – Vol.51. – No.3. – Pp.725-739.
29. Леоненко Д.В. *Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака* // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – №1. – С.59-63.
30. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. *Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2014. – №1. – С.3-11.
31. Трацевская Е.Ю. *Динамическая неустойчивость квазитиксотропных моренных грунтов* // Литосфера. – 2017. – Т.46. – №1. – С.107-112.
32. Трацевская Е.Ю. *Демпфирующие свойства слабосвязных трехфазных грунтов* // Литосфера. – 2019. – Т.51. – №2. – С.115-121.
33. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Сулейман М. *Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании* // Механика композитных материалов. – 2007. – Т.43. – №1. – С.109-120.
34. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. *Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.2. – №3. – С.392-406.

35. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. *Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании* // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – Т.2. – №1. – С.16-19.
36. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Сулейман М. *Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании* // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – Т.3. – №4. – С.55-62.
37. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection* // Acta Mechanica. – 2014. – Vol.225. – No.2. – Pp.523-541.
38. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of bending properties for cellular core sandwich panels* // Materials Sciences and Applications. – 2013. – Vol.4. – No.8. – Pp.471-477.
39. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Деформирование трехслойного стержня в температурном поле* // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – Т.22. – №1. – С.31-35.
40. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Абдусаттаров А. *Изгиб трехслойной пластины в температурном поле знакопеременной кольцевой нагрузкой* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №3. – С.339-358.
41. Захарчук Ю.В. *Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем* // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – №12. – С.66-75.
42. Мовчан А.А. *Учет нелинейности диаграммы перехода и изменения упругого модуля во внешних слоях трехслойной полосы из сплава с памятью формы и вязкоупругим внутренним слоем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т.29. – №2. – С.272-292.

REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. *Mekhanika mnogoslojnykh konstruksij [Mechanics of laminated constructions]*. Moskva, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
2. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistykh vyazkouprugoplasticheskikh ehlementov konstruksij [Mechanics of layered viscoelastic-plastic structural elements]*. Moskva, FIZMATLIT, 2005, 576 p.
3. Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. *Matematicheskie modeli mekhaniki tverdogo tela [Mathematical models of solid mechanics]*. Minsk, BGU, 2021, 535 p.
4. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, Starovoitov E.I. *Mechanics of Solid Deformable Body*. Singapore, Springer, 2022, 317 p.
5. Abdusattarov A., Starovoitov E.I., Ruzieva N.B. *Deformirovanie i povrezhdaemost' uprugoplasticheskikh ehlementov konstruksij pri tsiklicheskikh nagruzheniyakh [Deformation and damage of elastoplastic structural elements under cyclic loading]*. Tashkent, IDEAL PRESS, 2023, 381 p.
6. Starovoitov E.I., Shafieva Y.V., Nesterovich A.V., Kozel A.G. *Deformirovanie trekhslonnykh plastin pri termosilovykh nagruzskakh [Deformation of three-layer plates under thermal force loads]*. Belorusskij gosudarstvennyj universitet transporta, 2024, 395 p.

7. Starovoitov E.I., Zhuravkov M.A., Leonenko D.V., Lyu Yongtao. *Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields*. Springer Nature Singapore, Pte Ltd., 2024, 384 p.
8. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*. 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2003, 858 p.
9. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications*. Academic Press, 2016, 410 p.
10. Aghalovyan L., Prikazchikov D. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Singapore, World Scientific Publishing Co., 2015, 360 p.
11. Solomonov Y.S., Georgievsky V.P., Nedbai A.Ya., Andryushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]*. Moskva, FIZMATLIT, 2014, 408 p.
12. Mikhasev G.I., Altenbach H. *Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells*. In book: *Thin-walled laminated structures*. Cham, Springer, 2019, Pp.157-198.
13. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Issledovanie spektra chastot trekhslojnoj tsilindricheskoj obolochki s uprugim napolnitelem [Investigation of the frequency spectrum of a three-layer cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.2, Pp.162-169.
14. Paimushin V.N., Ivanov V.I., Khusainov V.R. *Analiz svobodnykh i sobstvennykh kolebaniy trekhslojnoj plastiny na osnove uravnenij utochnennoj teorii [Study of free and eigen vibrations of a three-layer plate on the bases of equations of a refined theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2002, Vol.8, No.4, Pp.543-554.
15. Lachugina E.A. *Poperechnye kolebaniya pyatislojnoj uprugoy krugovoj plastiny s zhestkimi zapolnitelyami [Transverse vibrations of a five-layer elastic circular plate with rigid fillers]*. Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii, 2022, Iss.15, Pp.212-219.
16. Lachugina E. A. *Svobodnye kolebaniya pyatislojnoj krugovoj plastiny s legkimi zapolnitelyami [Free vibrations of a five-layer circular plate with light fillers]*. Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii, 2023, Iss.16, Pp.111-116.
17. Bakulin V.N., Boitsova D.A., Nedbai Ya.A. *Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell*. Mechanics of composite materials, 2021, Vol.57, No.5, Pp.623-634.
18. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells*. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, Vol.43, No.2, Pp.145-152.
19. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, Vol.40, No.4, Pp.439-447.
20. Suvorov Ye.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2012, Vol.76, No.5, Pp.511-518.
21. Paimushin V.N., Gazizullin R.K. *Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate*. Mechanics of Composite Materials, 2017, Vol.53, No.3, Pp.407-436.

22. Kaplunov J., Prikazchikov DA., Prikazchikova LA. *Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate*. International Journal of Solids and Structures, 2017, Vol.113-114, Pp.169-179.
23. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates*. Composite Structures, 2015, No.133, Pp.1127-1136.
24. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates*. Aerospace Science and Technology, 2016, No.52, Pp.41-51.
25. Leonenko D.V., Markova M.V. *Kolebaniya krugovoj trekhslojnoj plastiny pod dejstviem vneshnej nagruzki [Vibrations of a three-layer circular step plate under periodic impact]*. Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika, 2023, Vol.1, Pp.49-63.
26. Belov P.A., Lurie S.A. *Variatsionnaya postanovka zadach obratimoy termomekhaniki dlya sloistyx struktur [Variational formulation of reversible thermomechanics problems for layered structures]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2024, Vol.30, No.1, Pp.101-117.
27. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Kolebaniya sekhndvich-plastiny v temperaturnom pole pri kol'tsevoj rezonansnoj nagruzke [Fluctuations of a sandwich plate in a temperature field under an annular resonant load]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2024, Vol.30, No.3, Pp.323-337.
28. Pradhan M., Dash P.R., Pradhan P.K. *Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient*. Meccanica, 2016, Vol.51, No.3, Pp.725-739.
29. Leonenko D.V. *Kolebaniya krugovoykh trekhslojnykh plastin na uprugom osnovanii Pasternaka [Vibrations of circular three-layer plates on an Pasternak elastic foundation]*. Ehkologicheskij vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ehkonomicheskogo sotrudnichestva, 2014, Iss.1, Pp.59-63.
30. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. *Vibrations of the walls of a slot channel with a viscous fluid formed by three-layer and solid disks*. Journal of machinery manufacture and reliability, 2014, No.1, Pp.1-8.
31. Tratsevskaya E. *Dinamicheskaya neustojchivost' kvazitiksotropnykh morennykh gruntov [Dynamic instability quasi tiksotropnyh moraine soil]*. Litosfera, 2017, No.1(46), Pp.107-112.
32. Tratsevskaya E. *Dempfiruyushhie svoystva slabosvyaznykh trekhfaznykh gruntov [Damping properties of loosely-bound three-phase soils]*. Litosfera, 2019, No.2(51), Pp.115-121.
33. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Suleyman M. *Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads*. Mechanics of Composite Materials, 2007, Vol.43, No.1, Pp.75-84.
34. Starovoitov E.I., Kozel A.G. *Izgib uprugoj krugovoj trekhslojnoj plastiny na osnovanii Pasternaka [The bending of an elastic circular sandwich plate on the Pasternak foundation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.3, Pp.392-406.
35. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V., Leonenko D.V. *Deformirovanie krugovoj trekhslojnoj plastiny na uprugom osnovanii [Deformation of a circular three-layer plate on an elastic base]*. Ehkologicheskij vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ehkonomicheskogo sotrudnichestva, 2005, Vol.2, No.1, Pp.16-19.

36. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Suleiman M. *Termouprugij izgib kol'tsevoj trekhslojnoj plastiny na uprugom osnovanii [Thermoelastic bending of an annular three-layer plate on an elastic base]*. Ehkologicheskij vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ehkonomicheskogo sotrudnichestva, 2006, Vol.3, No.4, Pp.55-62.
37. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection*. Acta Mechanica, 2014, Vol.225, No.2, Pp.523-541.
38. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of bending properties for cellular core sandwich panels*. Materials Sciences and Applications, 2013, Vol.4, No.8, Pp.471-477.
39. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Deformirovanie trekhslojnogo sterzhnya v temperaturnom pole [Deformation of three-layer beam in a temperature field]*. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov, 2013, Vol.22, No.1, Pp.31-35.
40. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Abdusattarov A. *Izgib trekhslojnoj plastiny v temperaturnom pole znakoperemennoj kol'tsevoj nagruzkoy [Bending of a three-layer plate in a temperature field alternating ring load]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2022, Vol.28, No.3, Pp.339-358.
41. Zakharchuk Y.V. *Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie krugovoj trekhslojnoj plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Stress-strain state of circular three-layer plate with compressible filler]*. Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii, 2019, No.12, Pp.66-75.
42. Movchan A.A. *Uchet nelinejnosti diagrammy perekhoda i izmeneniya uprugogo modulya vo vneshnikh sloyakh trekhslojnoj polosy iz splava s pamyat'yu formy i vyazkouprugim vnutrennim sloem [Taking into account the nonlinearity of the transition diagram and changes in the elastic modulus in the outer layers of a three-layer strip with shape memory alloy outer layers and a viscoelastic inner layer]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2023, Vol.29, No.2, Pp.272-292.

Поступила в редакцию 17 января 2025 года.

Сведения об авторах:

Старовойтов Эдуард Иванович – д.ф.-м.н., проф., Кафедра «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: edstar0@yandex.by

Будникова Дарья Андреевна – магистрант, Кафедра «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции», Белорусский государственный университет транспорта; e-mail: d_oshik@mail.ru