



ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ В РАМКАХ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

Волков А.В.^{1,2}, Голубкин К.С.²

¹ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

²ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В статье рассмотрено решение задачи распределения касательных напряжений в стержне переменного поперечного сечения в рамках градиентной теории упругости. Под стержнем понимается тело, к которому приложены только растягивающие или сжимающие осевые нагрузки. Целью работы является уточнение распределения касательных напряжений по длине стержня. Касательные напряжения вдоль продольной оси стержня могут влиять на деламинацию слоёв в композитных конструкциях. Формулировка стержневой теории проводится на основе вариационного подхода. Из вариационной формулировки получаются уравнения равновесия для стержня и граничные условия. Интегрируя уравнения равновесия и используя получающиеся граничные условия, можно найти продольные перемещения. Из функции перемещений можно получить решения для нормальных и касательных напряжений. Рассмотрена общая постановка задачи для разных размеров поперечного сечения. Построено тестовое аналитическое решение для линейной функции изменения радиуса поперечного сечения стержня. Решение построено для стержня, состоящего из двух секций. У первой секции постоянное поперечное сечение. У второй секции радиус поперечного сечения линейно зависит от продольной координаты. Приведены графики нормальных и касательных напряжений для различных значений дополнительных неклассических констант при постоянном значении классического модуля Юнга. Показано сравнение с решением, построенным на основе классической линейной теории упругости и численным трёхмерным решением, построенным методом конечных элементов. Показано, что получившееся решение непрерывное. Оно лучше соответствует трёхмерному решению, полученному численно, и позволяет обеспечить непрерывность касательных напряжений вдоль оси стержня. Предложены рекомендации для выбора масштабного параметра теории.

Ключевые слова: градиентная теория упругости; стержни переменного сечения; касательные напряжения

ANALYSIS OF SHEAR STRESS DISTRIBUTION IN A ROD WITH TAPERED CROSS-SECTION IN GRADIENT ELASTICITY THEORY

Volkov A.V.^{1,2}, Golubkin K.S.²

¹Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

²Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

* Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда №23-79-01159, <https://rscf.ru/project/23-79-01159/>.

ABSTRACT

In this article a problem of shear stress distribution for a gradient linear elastic rod with non-constant cross-section is considered. Under a rod we mean a body with only tensile or compression axial loads applied. The article proposes to use methods of the gradient theory of elasticity to solve such problems. The main goal of the article is to find a shear stress distribution across the length of the rod. Shear stresses along the longitudinal axis of the rod can influence the delamination of layers in composite structures. The formulation of the rod theory is carried using a variational approach. From the variational formulation, equilibrium equations and boundary conditions for the rod are obtained. Integrating equilibrium equations and using the boundary conditions we can find the axial displacement function. From displacement function we can find normal and shear stress. We consider different cross section sizes. Test solution was built for the linear change of the cross section. The solution was built for rods with two sections. The first section has constant cross section. And the second section's normal cross section changes linearly dependent on the longitudinal coordinate. Graphs of normal and shear stresses are presented for various values of gradient elastic constants. Then we show a comparison between linear elastic, gradient and three-dimensional finite element solutions. Gradient solution is continuous. It is shown that the obtained solution has better correspondence with the numerical three-dimensional solution. We propose several recommendations for the choice of the scale parameter of the theory.

Keywords: gradient elasticity theory; tapered rods; shear stress

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы рассматриваем распределение касательных напряжений в стержнях переменного сечения. Стержнями мы называем тела, к которым приложены только растягивающие или сжимающие осевые нагрузки и оценку продольных нормальных напряжений можно проводить в рамках одномерной модели. Распределение касательных напряжений по поперечному сечению в стержнях при растяжении или сжатии исследуется реже, чем при решении задачи изгиба. Проблема распределения касательных напряжений обычно возникает в инженерных задачах в связи с решением задачи изгиба балки, когда на балку действует перерезывающая сила. Существуют, однако, много уточнённых моделей, где учитывается влияние на касательные напряжения и продольной силы, и изгибающего момента, и перерезывающей силы. Логично попытаться использовать ту часть из этих решений, которая отвечает за связь касательных напряжений и продольной силы. Поэтому интересно обсудить историю и текущее состояние исследований в этой области.

Известно, что под действием перерезывающей силы в балках возникают касательные напряжения. Формула для определения максимальных касательных напряжений при изгибе балки была выведена в работах русского инженера Дмитрия Ивановича Журавского, а потом доработана шотландским математиком и физиком Вильямом Ранкином, а также французским учёным Жаком Брессе. Исторические подробности вывода этого решения можно найти в работе [1]. Формула эта может быть найдена в любом учебнике по сопротивлению материалов и в отечественной литературе называется формулой Журавского. В этой формуле из всех внутренних силовых факторов остаётся только перерезывающая сила.

Тимошенко и Гудьер в [2] предложили аналитическое решение для бесконечного клина. Гере и Тимошенко [3] представили формулу для частного случая изгиба непрямоугольной балки прямоугольного сечения. Показано,

что распределение касательных напряжений в балке переменного сечения отличается от случая балки постоянного сечения.

Эта проблема также обсуждалась в [4,5], где были представлены усовершенствованные методы расчета касательных напряжений для двутавровых балок переменного сечения. В работах Бальдуцци [6-8] предложены формулы для расчета касательных напряжений для тонкостенных и многослойных непризматических балок. Отмечается, что распределение касательных напряжений зависит не только от поперечной силы, но и от внутренних нормальных сил и изгибающего момента. Границы применимости формулы Журавского подробно рассмотрены в статье Субботниченко [9]. В [10] выведена общая формула распределения сдвиговых напряжений в балках переменного сечения под действием осевой силы, поперечной силы и изгибающего момента. Показано, что применение формулы Журавского для таких балок приводит к существенным погрешностям.

В [11] было показано, что максимальные касательные напряжения в балках переменного сечения необязательно находятся в центре тяжести поперечного сечения. Оден и Риппегер [12] предложили новый подход к аналитическому определению касательных напряжений в балках переменного сечения, основанный на уравнениях равновесия классической теории упругости. В [13] на основе конечно-элементного решения сделан вывод о том, что в непризматических балках из-за неравномерного расположения центральных осей перерезывающая сила, нормальное усилие и изгибающий момент сильно влияют друг на друга.

В экспериментах над железобетонными балками [14] было показано, что некоторых технических требований для призматических балок может быть недостаточно для определения запаса прочности непризматических балок. В [15,16] было показано, что методы определения распределения касательных напряжений в призматических тонких стенках не подходят для определения напряжений в непризматических тонких стенках. В работах [17,18] сравниваются численное моделирование и аналитические решения для уточненного моделирования распределения напряжения сдвига.

Вариационные методы для непризматических балок обсуждались в [19-24]. Деформации непризматических балок, сделанных из функционально градиентных материалов, были рассмотрены в [25].

Также задача определения напряжённо-деформированного состояния балок переменного сечения изучалась в [26,27].

В этой статье мы предлагаем использовать модели градиентной теории упругости для уточненного описания напряженного состояния в стержнях переменного сечения при растяжении или сжатии. Больше всего нас интересует распределение касательных напряжений в поперечных сечениях. Решение этой задачи может быть полезно, например, для оценки расслоения композитных стержней.

Градиентная теория упругости, по-видимому, была впервые представлена в [28]. В недавней работе [29] было показано, что такие модели позволяют уточнить одномерное балочное решение по сравнению с трехмерным за счет учета непрерывного изменения нормальных напряжений в зонах с концентраторами (локальными зонами армирования, сосредоточенными силами).

Невозможность обеспечения непрерывных по длине решений для касательных напряжений (возникающих в трехмерном моделировании) в балках переменного сечения была показана недавно в работе [30] в применении

к оценке прочности ведущих устройств. При этом ошибки стандартных решений могут достигать сотен процентов, что не позволяет их применять для достоверной оценки прочности на сдвиг таких конструкций (при том, что это один из основных механизмов их разрушения). Вывод формулы для распределения касательных напряжений в классической линейной теории упругости можно найти в [31,32]. Предлагаемый подход направлен на устранение такого рода несогласованностей и несовершенств классических балочных моделей за счет использования исходного функционала теории, учитывающего зависимость энергии деформаций балки от деформаций и их градиентов по длине балки.

Аналитические и численные решения для градиентных балочных теорий обсуждались в [33-42]. В статьях [33,40] были рассмотрены конечные элементы, моделирующие непризматические стержни для решения статических и динамических задач градиентной теории упругости. Задачи потери устойчивости градиентных балок с переменным сечением исследовались в [41].

Проблема, рассмотренная в статье, изучалась авторами в [43] в значительно более сжатом виде, без многих подробностей вывода уравнений.

1. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА

Обозначения, выводы и ход рассуждений в этом разделе близки к [41,42]. Отметим также, что мы используем соглашение о суммировании Эйнштейна.

Рассмотрим тело B объёмом V и с площадью поверхности S . Вариационная постановка для линейно-упругого изотропного материала выглядит так

$$\delta \mathcal{L} = 0, \quad \mathcal{L} = U - W. \quad (1)$$

Здесь $\mathcal{L}$ – это Лагранжиан теории, U – энергия деформаций и W – это работа внешних сил. Энергия деформаций записывается так: $U = \frac{1}{2} \int_V \bar{U} dV$. Здесь $\bar{U}$ – это

плотность энергий деформаций. Работа внешних сил

$$W = \int f_i \delta u_i dV + \iint (t_i u_i + q_i \delta(u_{i,j} n_j)). \quad (2)$$

В этом уравнении f_i – объёмная сила, действующая в объёме V . На поверхности тела S с внешней нормалью n_j действуют t_i – вектор напряжений и q_i – так называемая градиентная сила (double-force). Плотность энергии деформации

$$\bar{U}(\varepsilon_{ij}, k_{ijk}) = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + A_{ijklmn} k_{ijk} k_{lmn}. \quad (3)$$

Здесь C_{ijkl} – это тензор жёсткости классической линейной теории упругости;

A_{ijklmn} – градиентный тензор жёсткости шестого ранга; $\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}$ – тензор

малых деформаций; $u_i(x_j)$ – вектор перемещений; $k_{ijk} = \varepsilon_{ij,k}$ – тензор градиентов деформаций. Используя формулу Грина, можно выписать тензор напряжений Коши σ_{ij} и тензор градиентных напряжений μ_{ijk}

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (4)$$

$$\mu_{ijk} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial k_{ijk}} = A_{ijklmn} k_{lmn}.$$

Здесь $\theta = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – объёмная деформация. Принцип Лагранжа используется для нахождения уравнений градиентной теории. $\delta \mathcal{L} = \delta U - \delta W = 0$.

$W = \int f_i \delta u_i dV + \iint (t_i u_i + q_i \delta(u_{i,j} n_j))$. Из вариационной формулировки получаем [28]

$$\begin{aligned} & - \int \left[(\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k})_{,j} + f_i \right] \delta u_i dV + \iint \left[(\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k}) N_j - (\mu_{ijk} n_k)_{,j} + \right. \\ & \left. + (\mu_{ijk} n_k n_p)_{,p} n_j - t_i \right] \delta u_i dS + \iint (\mu_{ijk} n_j n_k - q_i) n_i \delta u_{i,l} dS = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Обратите внимание на то, что в уравнении (5) мы имеем дело с так называемым полным напряжением $\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k}$. И тензор напряжений Коши σ_{ij} не обязательно равен нулю на поверхностях, свободных от нагрузки. На свободных от нагрузки t_i и моментной нагрузки q_i поверхностях (обозначим их S_0) выполняется другое граничное условие. На них (подробности можно посмотреть в работах [28,29,44]) должен быть равен нулю такой вектор

$$(\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k}) n_j + (\mu_{ijk} n_k)_{,i} + (\mu_{ijk} n_k n_p)_{,p} n_j = 0, S \in S_0. \quad (6)$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ СТЕРЖНЯ

Рассмотрим постановку задачи для стержня с распределённой продольной нагрузкой $F(x)$ [н/м]. Площадь поперечного сечения стержня изменяется по длине и обозначается $A(x)$. Модуль Юнга E остаётся постоянным.

Введём кинематические гипотезы $u_1 = u(x)$, $u_2 = u_3 = 0$. В этом случае у нас остаётся только одна компонента тензора деформаций $\varepsilon_{11} = u'$ и одна компонента тензора градиентов деформаций $k_{111} = u''$.

Тогда вариация лагранжиана $\delta \mathcal{L}$ получается из (5)

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & - \int_L (N'(x) - Q''(x) + F(x)) \delta u dx + \\ & + \left[(N(x) - Q'(x) - F(x)) \delta u + (Q'(x) - F_h(x)) \delta u' \right] \Big|_0^L = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь L – длина стержня, $N(x)$ – продольная нормальная сила, $Q(x)$ [н•м] – дополнительная градиентная продольная нормальная «сила», $F_h(x)$ – градиентная распределённая «нагрузка». Уравнение для нормальной силы

$$N(x) = EA(x) u'(x). \quad (8)$$

Уравнение для градиентной «силы»

$$Q(x) = l^2 EA(x) u''(x). \quad (9)$$

Здесь l – дополнительная константа градиентной теории, имеющая размерность длины. Из уравнения (7) получаем уравнение равновесия

$$N'(x) - Q''(x) + F(x) = 0. \quad (10)$$

На границах стержня длиной L мы можем записать граничные условия

$$x = 0, \quad x = L: \quad N - Q' = \bar{N} \quad \text{или} \quad u = \bar{u}, \quad Q = \bar{Q}, \quad u' = \bar{u}'. \quad (11)$$

Горизонтальная черта над $\bar{u}$, $\bar{Q}$, $\bar{u}'$ означает конкретное численное значение, которое может быть задано в качестве граничных условий.

Используя уравнение (8) можно выразить первую производную от перемещений

$$u'(x) = \frac{N(x)}{EA(x)}. \quad (12)$$

И теперь можно найти $u''(x)$

$$u''(x) = \frac{1}{E} \left(\frac{N(x)}{A(x)} \right)' = \frac{1}{E} \frac{N'(x)A(x) - N(x)A'(x)}{A(x)^2}. \quad (13)$$

Подставим (13) в (9)

$$Q(x) = l^2 \left(N'(x) - \frac{N(x)A'(x)}{A(x)} \right). \quad (14)$$

Уравнение (14) можно подставить в (10). В итоге получаем

$$N'(x) - l^2 N'''(x) + l^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{N(x)A'(x)}{A(x)} \right) + F(x) = 0. \quad (15)$$

В случае если слагаемое $\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{N(x)A'(x)}{A(x)} \right)$ достаточно мало по сравнению с другими членами уравнения (14), то можно перейти к уравнению

$$N'(x) - l^2 N'''(x) + F(x) = 0. \quad (16)$$

Такое уравнение значительно проще интегрировать аналитически, чем уравнение (15). Далее, в четвертой главе, показано, что учёт этого слагаемого действительно слабо влияет на решение.

И в этом случае решение будет иметь вид

$$N(x) = lC_1 e^{\frac{x}{l}} - lC_2 e^{-\frac{x}{l}} + C_3 + \tilde{n}(x). \quad (17)$$

Здесь $\tilde{n}(x)$ – частное решение (16).

Далее в результатах расчётов мы покажем, что решение почти совпадает для уравнений (15) и (16).

Если мы задали определённое значение функции $A(x)$, то дифференциальное уравнение (15) можно пробовать интегрировать аналитически. Но, если не удастся получить решение уравнения (15) в прямом виде для какой-то определённой формы сечения $A(x)$, то удобно переписать это уравнение в перемещениях

$$u^{IV} A + 2u''' A' + u'' A'' - \frac{1}{l^2} u'' A - \frac{1}{l^2} u' A' - \frac{F}{l^2 E} = 0. \quad (18)$$

Дифференциальное уравнение (18) гораздо проще интегрировать численно. Его удобнее выписать для решения в системах компьютерной алгебры, чем уравнение (15).

Вывод выражения для касательных напряжений в стержне с круглым поперечным сечением с радиусом $r(x)$ можно найти в [31,32]. В нашей статье мы предполагаем, что для касательных напряжений справедлив вывод в рамках классической линейной теории упругости

$$\tau(x, r) = \frac{r}{2} (f(x) - \sigma'(x)) = \frac{r}{2} \left(f(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{N(x)}{A(x)} \right) \right). \quad (19)$$

В уравнении (19) $\tau(x)$ – касательные напряжения, $\sigma(x)$ – нормальные напряжения, $f(x)$ – объёмная сила.

Вспомнив уравнение (12), получаем

$$\begin{aligned} \tau(x, r) &= \frac{r}{2} \left(f(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{N(x)}{A(x)} \right) \right) = \frac{r}{2} \left(\frac{F(x)}{A(x)} - Eu''(x) \right) = \\ &= \frac{r}{2} \left(\frac{F(x)}{A(x)} - \frac{Q(x)}{l^2 A(x)} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнение (19) позволяет прямо выписать связь между градиентной «силой» Q и касательным напряжением τ

$$Q(x) = l^2 \left(F - 2A \frac{\tau}{r} \right). \quad (21)$$

Также можно переформулировать граничные условия (11) для касательных напряжений. На концах стержня вместо граничных условий для градиентной силы Q мы можем записать граничные условия для касательных напряжений τ

$$x = 0, \quad x = L : Q = Fl^2 \Leftrightarrow \tau = 0. \quad (22)$$

Если рассмотреть контакт между двумя частями стержня в некоторой точке $x = x_0$, то из (11) можно выписать уравнения непрерывности в форме

$$\begin{aligned} x = x_0 : \quad & N(x_{0-}) - Q'(x_{0-}) = N(x_{0+}) - Q'(x_{0+}), \\ & u(x_{0-}) = u(x_{0+}), \\ & Q(x_{0-}) = Q(x_{0+}), \\ & u'(x_{0-}) = u'(x_{0+}). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь x_{0-} , x_{0+} обозначают, что мы берём значения слева и справа на малом расстоянии от точки $x = x_0$.

Принимая во внимание (21) условие непрерывности для градиентной силы Q (23) можно переформулировать как условие непрерывности касательных напряжений

$$x = x_0 : Q(x_{0-}) = Q(x_{0+}) \Rightarrow \tau(x_{0-}) = \tau(x_{0+}). \quad (24)$$

В (24) мы подразумеваем непрерывность изменения поперечного сечения $A(x_{0-}) = A(x_{0+})$ и распределённой нагрузки $F(x_{0-}) = F(x_{0+})$, а также то, что дополнительный параметр теории l один и тот же в обоих сегментах.

3. ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим постановку граничных условий для стержня, состоящего из двух секций (см. рис.1). Первая секция длины L_1 имеет постоянное поперечное сечение. Длина второй секции равна L_2 и её поперечное сечение изменяется по линейному закону в зависимости от продольной координаты.

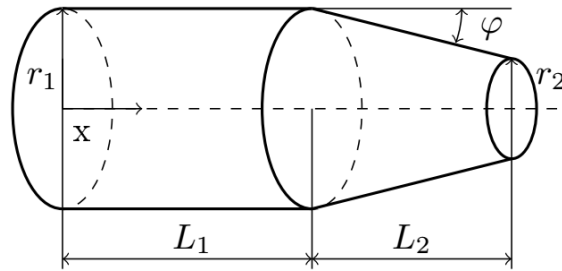


Рис.1. Стержень из двух участков длиной L_1 и L_2 , второй участок изменяется по линейному закону. Радиусы краевых сечений $r(0) = r_1$ и $r(L_1 + L_2) = r_2$. Угол конусности равен φ .

Для этого случая мы получаем систему из двух дифференциальных уравнений типа (15), (16) или (18). То есть, если мы хотим решить задачу, используя уравнения типа (16), мы записываем систему

$$\begin{cases} N_1(x) - l^2 N_1'''(x) + F_1(x) = 0, & x \in [0, L_1] \\ N_2(x) - l^2 N_2'''(x) + F_2(x) = 0, & x \in [L_1, L_1 + L_2] \end{cases} \quad (25)$$

Теперь перейдём к формулировке граничных условий. Мы предполагаем, что на левом краю $x = 0$ равны нулю перемещения и касательные напряжения. На правом краю $x = L_1 + L_2$ должны быть равны нулю касательные напряжения и величина $N - Q'$. На стыках отсеков должны быть равны перемещения и деформации для левого и правого отсеков, а также величины $N - Q'$ и Q . Из уравнения (20) получаем, что равенство нулю касательных напряжений равносильно равенству нулю величины $f(x) - \frac{Q(x)}{l^2 A(x)}$. В итоге граничные условия будут иметь вид

$$\begin{cases} N_1(0) - Q'_1(0) = \bar{N}; & Q_1(0) = Fl^2 \\ u_1(L_1) = u_2(L_1); & u'_1(L_1) = u'_2(L_1) \\ N_1(L_1) - Q'_1(L_1) = N_2(L_1) - Q'_2(L_1); & Q_1(L_1) = Q_2(L_1) \\ N_2(L_1 + L_2) - Q'_2(L_1 + L_2) = 0; & Q_2(L_1 + L_2) = Fl^2 \end{cases} \quad (26)$$

Выразив N , Q , Q' и τ через перемещения мы можем переписать граничные условия (26) для уравнения (18).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ И ВЫВОДЫ

Давайте посмотрим на результаты расчётов. Мы берём конструкцию с рис.1 с $L_1 = L_2 = 0.1$ м. Радиус $r_1 = 0.05$ м. На графиках дано сравнение для классического решения, трёх различных значений неклассического параметра l и конечно-элементного решения. Значения параметра l мы берём равными $l_1 = 2r_2$, $l_2 = r_2$, $l_3 = 0.5r_2$, то есть мы связываем его значение со значением радиуса поперечного сечения на правом краю. Модуль Юнга для всех моделей берём равным $200 \text{E}9$ Паскалей. Коэффициент Пуассона для конечно-элементной модели

равен 0.3. Распределение касательных и нормальных напряжений на графике дано на расстояниях $r = 0.1r_1$ и $r = 0.2r_2$ от центра.

На графиках на рис.2 показано сравнение касательных напряжений, полученных на основе уравнения (16) с классической теорией и конечно-элементным расчётом, на рис.3 – сравнение касательных напряжений, полученных из аналитического решения (16) и численного решения уравнения (18). Можно видеть, что решения уравнения (16), полученные без добавки $\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{N(x)A'(x)}{A(x)} \right)$, не сильно отличаются от полного решения, заданного уравнениями (18).

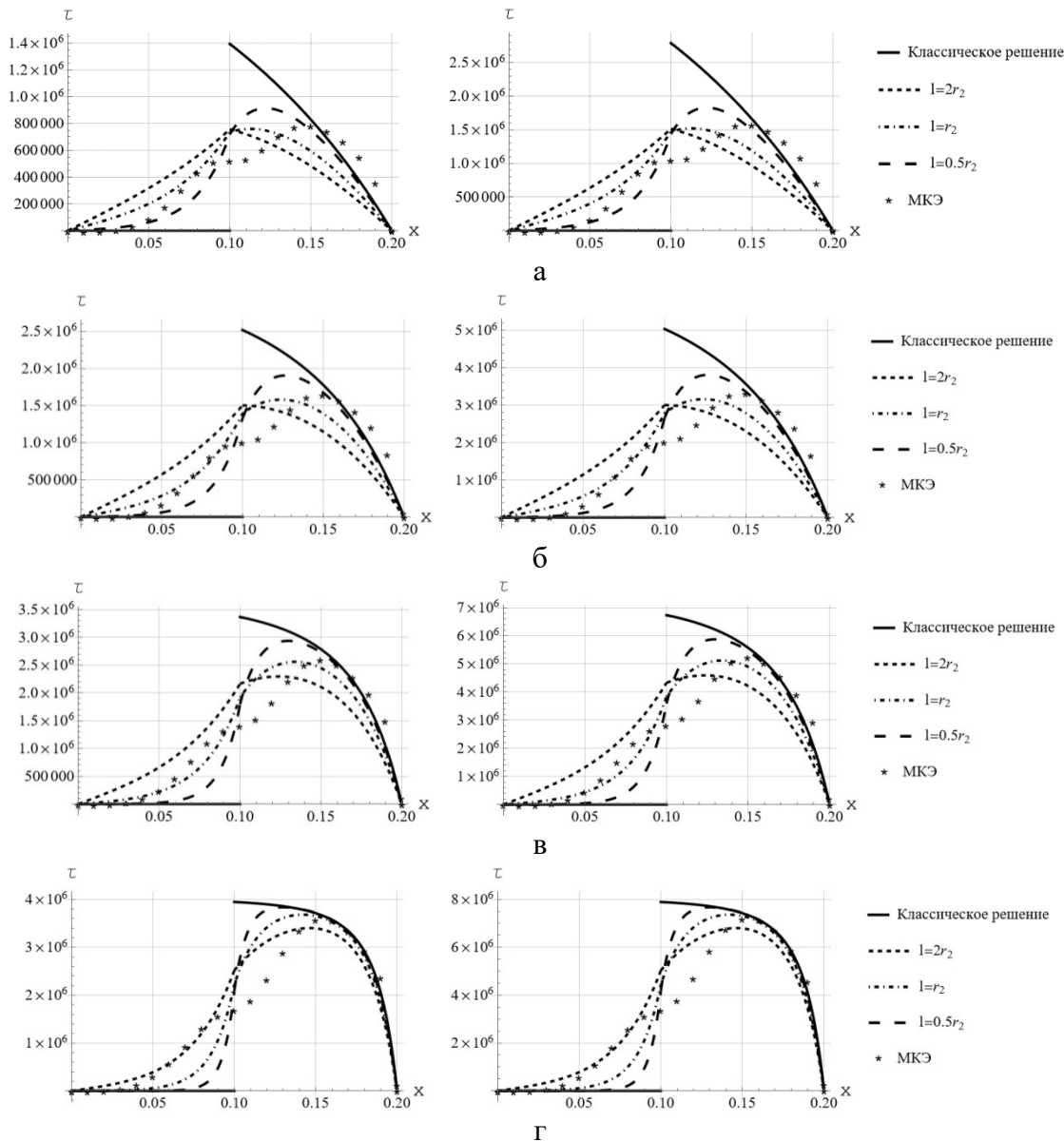


Рис.2. Графики касательных напряжений на расстоянии $0.1r_1$ (слева) и касательных на расстоянии $0.2r_1$ (справа) напряжений для углов конусности: а) $\varphi = 5^\circ$, б) $\varphi = 10^\circ$, в) $\varphi = 15^\circ$, г) $\varphi = 20^\circ$. Градиентное решение дано для уравнения (16).

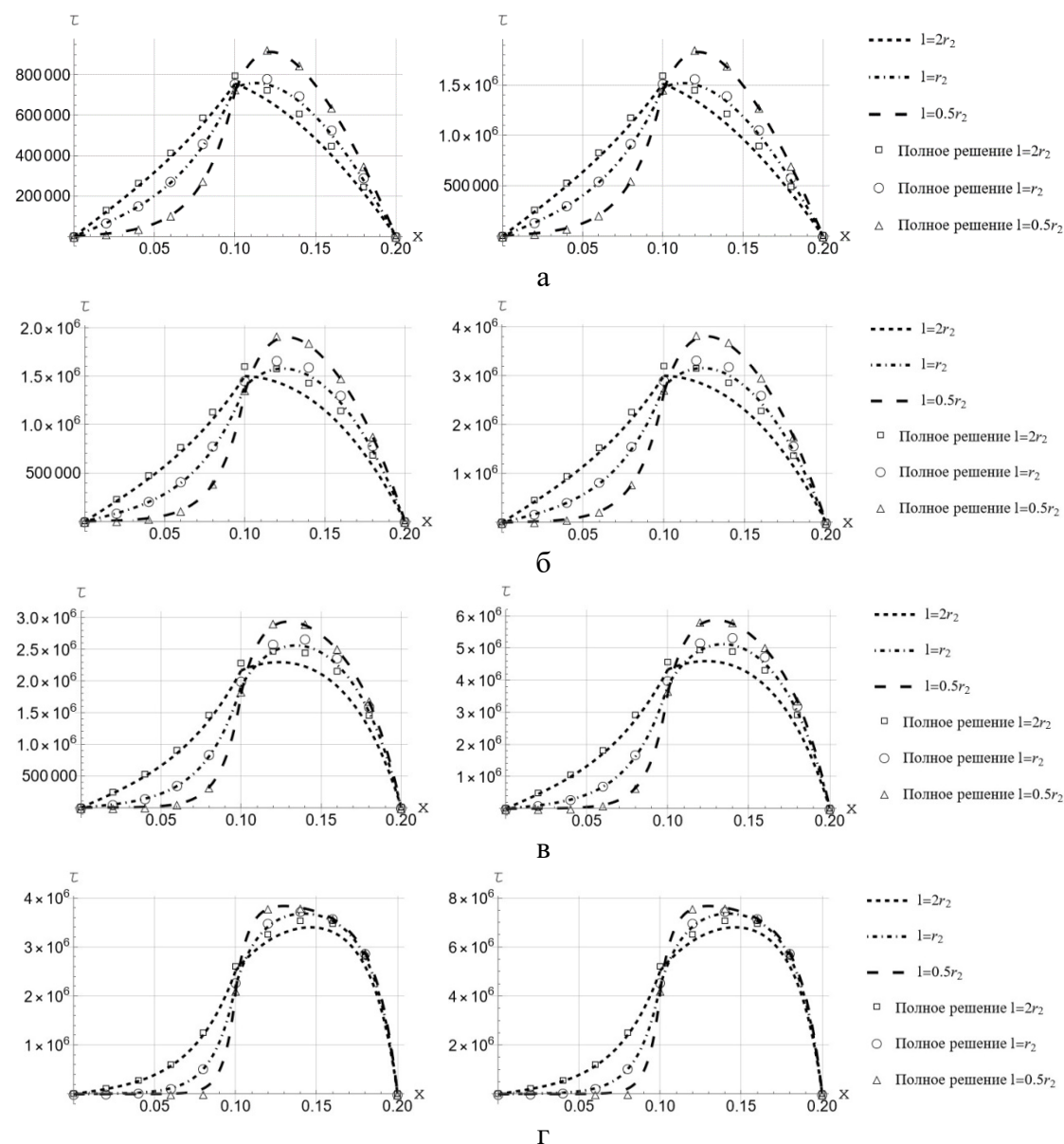
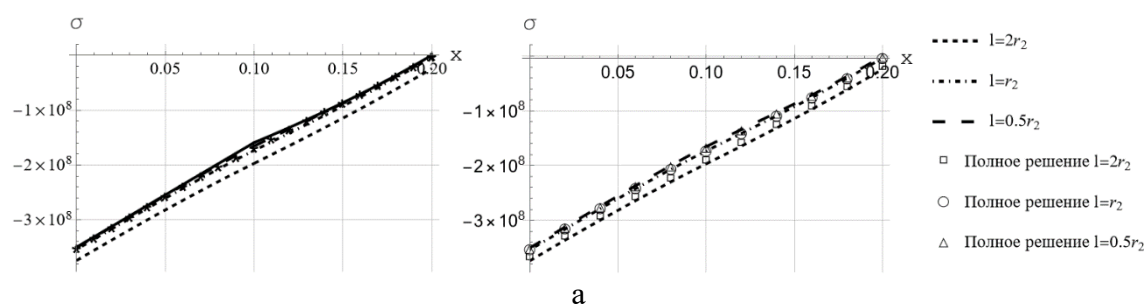


Рис.3. Графики касательных напряжений на расстоянии $0.1r_1$ (слева) и касательных напряжений на расстоянии $0.2r_1$ (справа) для углов конусности: а) $\varphi = 5^\circ$, б) $\varphi = 10^\circ$, в) $\varphi = 15^\circ$, г) $\varphi = 20^\circ$. Показано сравнение решения упрощённого уравнения (16), решённого аналитически с полным уравнением (18), решённым численно.

На рис.4 показано сравнение нормальных напряжений.



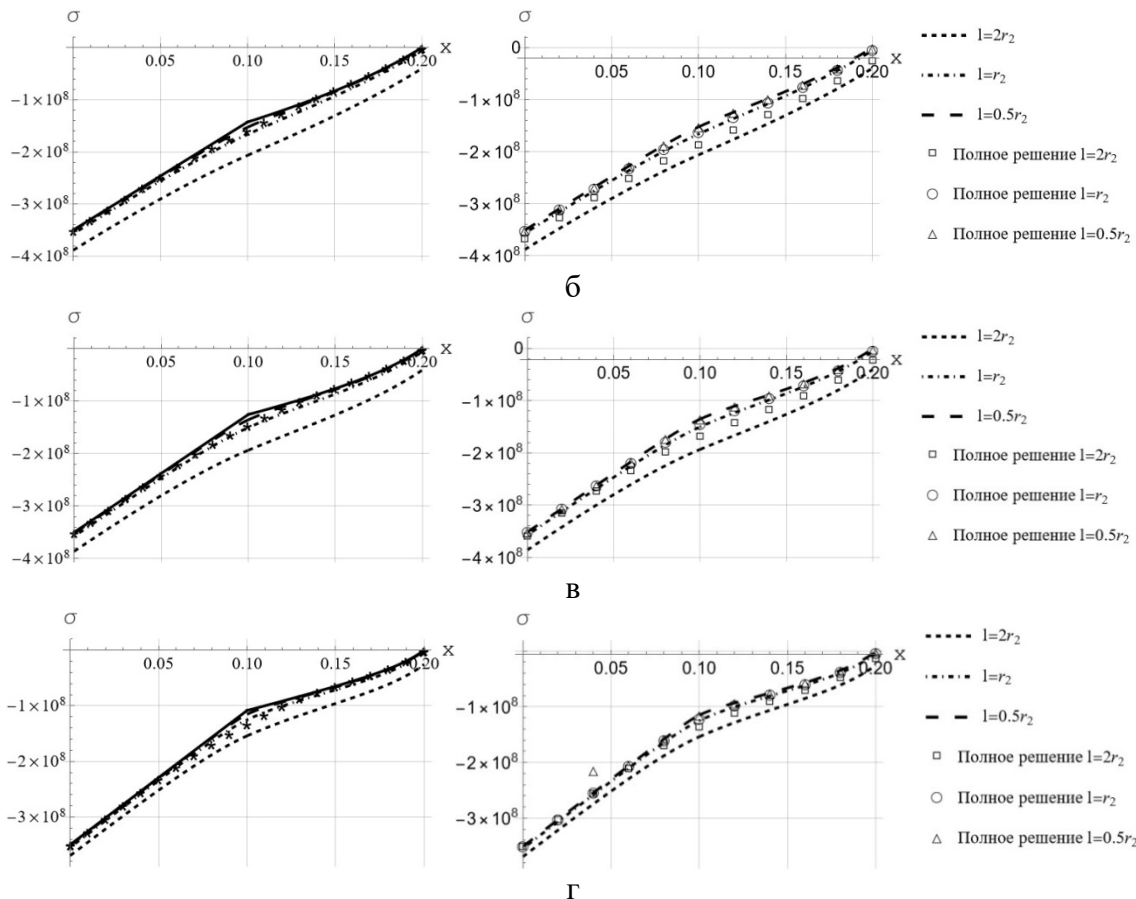


Рис.4. Графики нормальных напряжений для углов конусности: а) $\varphi = 5^\circ$, б) $\varphi = 10^\circ$, в) $\varphi = 15^\circ$, г) $\varphi = 20^\circ$. В левом столбце даны сравнения с классическим решением (классическое решение показано сплошной линией). В правом столбце дано сравнение решения упрощённого уравнения (16), решённого аналитически с полным уравнением (18), решённым численно.

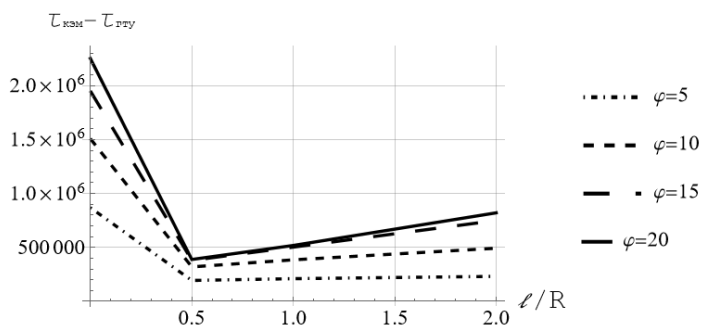


Рис.5. По оси абсцисс дано отношение градиентного модуля l к радиусу R . По оси ординат – модуль разницы касательных напряжений, полученных конечно-элементным расчётом, и касательных напряжений в градиентном одномерном решении, найденных из уравнения (18). Результаты взяты на расстоянии $0.1r_1$ от центра и 0.1 м от левого края. Каждая ломаная строится по 5 точкам – l/R равно 0 (классическое решение), 0.5 , 1 , 1.5 , 2 .

Разница касательных напряжений, полученных конечно-элементным расчётом, и касательных напряжений в градиентном одномерном решении, найденных из уравнения (18), представлена на рис.5. Результаты взяты на расстоянии от центра и 0.1 м от левого края. Каждая ломаная строится по 5 точкам – l/R равно 0 (классическое решение), 0.5, 1, 1.5, 2. Ближе всего к конечно элементному решению приближается график с параметром $l/R = 0.5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каган-Розенцвейг Л.М. *К истории создания технической теории касательных напряжений в балке* // Вестник гражданских инженеров. – 2018. – №6. – С.250-258.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Д. *Теория упругости*. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
3. Тимошенко С.П., Gere Д. *Механика материалов. Учебник для вузов. 2-е изд., стер.* – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 672 с.
4. Trahair N.S., Ansourian P. *In-plane behaviour of web-tapered beams* // Engineering Structures. – 2016. – Vol.108. – Pp.47-52.
5. Trahair N. S., Ansourian P. *In-plane behaviour of mono-symmetric tapered beams* // Engineering Structures. – 2016. – Vol.108. – Pp.53-58.
6. Balduzzi G. et al. *Planar Timoshenko-like model for multilayer non-prismatic beams* // International Journal of Mechanics and Materials in Design. – 2018. – Vol.14. – Pp.51-70.
7. Balduzzi G. et al. *Non-prismatic beams: a simple and effective Timoshenko-like model* // International Journal of Solids and Structures. – 2016. – Vol.90. – Pp.236-250.
8. Balduzzi G., Hochreiner G., Füssl J. *Stress recovery from one dimensional models for tapered bi-symmetric thin-walled I beams: Deficiencies in modern engineering tools and procedures* // Thin-walled structures. – 2017. – Vol.119. – Pp.934-945.
9. Субботнический В.В. *Анализ ошибок определения касательного напряжения при изгибе* // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. – 2018. – №2(35). – С.3-20.
10. Bertolini P. et al. *Stresses in constant tapered beams with thin-walled rectangular and circular cross sections* // Thin-Walled Structures. – 2019. – Vol.137. – Pp.527-540.
11. Paglietti A., Carta G. *Remarks on the current theory of shear strength of variable depth beams* // The open civil engineering journal. – 2009. – Vol.3. – No.1. – Pp.28-33
12. Oden J.T., Ripperger E.A. *Mechanics of elastic structures*. – Cambridge etc.: Hemisphere Publishing Corp., 1981. – 460 p.
13. El-Mezaini N., Balkaya C., Çitipitigil E. *Analysis of frames with nonprismatic members* // Journal of Structural Engineering. – 1991. – Vol.117. – No.6. – Pp.1573-1592.
14. Orr J.J. et al. *Shear behaviour of non-prismatic steel reinforced concrete beams* // Engineering Structures. – 2014. – Vol.71. – Pp.48-59.
15. Hassanein M.F., Kharoob O.F. *Shear buckling behavior of tapered bridge girders with steel corrugated webs* // Engineering Structures. – 2014. – Vol.74. – Pp.157-169.
16. Hassanein M.F., Kharoob O.F. *Linearly tapered bridge girder panels with steel corrugated webs near intermediate supports of continuous bridges* // Thin-Walled Structures. – 2015. – Vol.88. – Pp.119-128.

17. Zhou M. et al. *Stress analysis of linear elastic nonprismatic concrete-encased beams with corrugated steel webs* // Journal of Bridge Engineering. – 2017. – Vol.22. – No.6. – 04017012.
18. Zhou M., Fu H., An L. *Distribution and properties of shear stress in elastic beams with variable cross section: theoretical analysis and finite element modelling* // KSCE Journal of Civil Engineering. – 2020. – Vol.24. – Pp.1240-1254.
19. Hodges D., Ho J., Yu W. *The effect of taper on section constants for in-plane deformation of an isotropic strip* // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2008. – Vol.3. – No.3. – Pp.425-440.
20. Hodges D. et al. *Stress and strain recovery for the in-plane deformation of an isotropic tapered strip-beam* // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2011. – Vol.5. – No.6. – Pp.963-975.
21. Rajagopal A., Hodges D. H. *Variational asymptotic analysis for plates of variable thickness* // International Journal of Solids and Structures. – 2015. – Vol.75. – Pp.81-87.
22. Rajagopal A., Hodges D.H., Yu W. *Asymptotic beam theory for planar deformation of initially curved isotropic strips* // Thin-walled structures. – 2012. – Vol.50. – No.1. – Pp.106-115.
23. Auricchio F., Balduzzi G., Lovadina C. *The dimensional reduction approach for 2D non-prismatic beam modelling: a solution based on Hellinger-Reissner principle* // International Journal of Solids and Structures. – 2015. – Vol.63. – Pp.264-276.
24. Beltempo A. et al. *Analytical derivation of a general 2D non-prismatic beam model based on the Hellinger-Reissner principle* // Engineering Structures. – 2015. – Vol.101. – Pp.88-98.
25. Rezaiee-Pajand M., Masoodi A.R., Mokhtari M. *Static analysis of functionally graded non-prismatic sandwich beams* // Adv. Comput. Des. – 2018. – Vol.3. – No.2. – Pp.165-190.
26. Фирсанов В.В. *Математическая модель напряжённо-деформированного состояния балки переменного сечения с учётом «Пограничного слоя»* // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – №6. – С.63-69.
27. Фирсанов В.В. *Гипотезы Бернулли в задаче изгиба механически несжимаемой балки* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – №4. – С.121-129.
28. Mindlin R.D. *Micro-structure in linear elasticity* // Archive for rational mechanics and analysis. – 1964. – Vol.16. – Pp.51-78.
29. Lomakin E.V. et al. *Refined stress analysis in applied elasticity problems accounting for gradient effects* // Doklady Physics. – 2019. – Vol.64. – Pp.482-486.
30. Бабайцев А.В., Бурцев А.Ю., Рабинский Л.Н., Соляев Ю.О. *Методика приближенной оценки напряжений в толстостенной осесимметричной композитной конструкции* // Труды МАИ. – 2019. – №107.
31. Бабайцев А.В. *Моделирование напряженно-деформированного состояния толстостенных композитных конструкций, работающих в условиях динамического нагружения: дисс. канд. техн. наук.* – М.: ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский институт)», 2019. – 129 с.
32. Drysdale W.H. *Design of kinetic energy projectiles for structural integrity* // US Army Ballistic Research Laboratory technical report ARBRL-TR-02365, Aberdeen, Maryland. – 1981.

33. Rajasekaran S., Bakhshi Khaniki H. *Finite element static and dynamic analysis of axially functionally graded nonuniform small-scale beams based on nonlocal strain gradient theory* // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2019. – Vol.26. – No.14. – Pp.1245-1259.
34. Lurie S.A. et al. *Dilatation gradient elasticity theory* // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2021. – Vol.88. – 104258.
35. Lurie S., Solyaev Y. *Revisiting bending theories of elastic gradient beams* // International Journal of Engineering Science. – 2018. – Vol.126. – Pp.1-21.
36. Lurie S., Solyaev Y. *On the formulation of elastic and electroelastic gradient beam theories* // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2019. – Vol.31. – Pp.1601-1613.
37. Balobanov V., Niiranen J. *Locking-free variational formulations and isogeometric analysis for the Timoshenko beam models of strain gradient and classical elasticity* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2018. – Vol.339. – Pp.137-159.
38. Abali B.E., Müller W.H., Dell’Isola F. *Theory and computation of higher gradient elasticity theories based on action principles* // Archive of Applied Mechanics. – 2017. – Vol.87. – No.9. – Pp.1495-1510.
39. Yang Z. et al. *Beam buckling analysis in peridynamic framework* // Archive of Applied Mechanics. – 2022. – Vol.92. – No.12. – Pp.3503-3514.
40. Yayli M.Ö. et al. *Free vibration behavior of a gradient elastic beam with varying cross section* // Shock and Vibration. – 2014. – Vol.2014 – 801696.
41. Khaniki H.B., Hosseini-Hashemi S. *Buckling analysis of tapered nanobeams using nonlocal strain gradient theory and a generalized differential quadrature method* // Materials Research Express. – 2017. – Vol.4. – No.6. – 065003.
42. Lomakin E.V. et al. *Semi-inverse solution of a pure beam bending problem in gradient elasticity theory: The absence of scale effects* // Doklady Physics. – 2018. – Vol.63. – Pp.161-164.
43. Volkov A.V., Golubkin K.S., Solyaev Y.O. *Refined Analysis of Shear Stress Distribution in Tapered Rods Accounting for Gradient Effects* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol.45. – No.5. – Pp.2421-2428.
44. Gao X.L., Park S.K. *Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem* // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol.44. – No.22-23. – Pp.7486-7499.

REFERENCES

1. Kagan-Rozentsveig L.M. *K istorii sozdaniya tekhnicheskoy teorii kasatel'nykh napryazhenij v balke [About a history of engineering theories for a shear stress distribution in beams]*. Vestnik grazhdanskikh inzhenerov, 2018, No.6, Pp.250-258.
2. Timoshenko S.P., Goodier T.N. *Theory of elasticity*. New York, USA, McGraw-Hill book company, inc., 1970, 567 p.
3. Gere J.M., Timoshenko S.P. *Mechanics of Materials. 4 ed.* Boston, PWS Pub Co., 1997.
4. Trahair N.S., Ansourian P. *In-plane behaviour of web-tapered beams*. Engineering Structures, 2016, Vol.108, Pp.47-52.
5. Trahair N.S., Ansourian P. *In-plane behaviour of mono-symmetric tapered beams*. Engineering Structures, 2016, Vol.108, Pp.53-58.

6. Balduzzi G., Aminbaghai M., Auricchio F., Füssl J. *Planar Timoshenko-like model for multilayer non-prismatic beams*. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2018, Vol.14, Pp.51-70.
7. Balduzzi G. et al. *Non-prismatic beams: a simple and effective Timoshenko-like model*. International Journal of Solids and Structures, 2016, Vol.90, Pp.236-250.
8. Balduzzi G., Hochreiner G., Füssl J. *Stress recovery from one dimensional models for tapered bi-symmetric thin-walled I beams: Deficiencies in modern engineering tools and procedures*. Thin-walled structures, 2017, Vol.119, Pp.934-945.
9. Subbotnitskij V.V. *Analiz oshibok opredeleniya kasatel'nogo napryazheniya pri izgibe [Analysis of errors in the process of estimation of shear stress in bending problems]*. Vestnik Inzhenernoj shkoly Dal'nevostochnogo federal'nogo universiteta, 2018, No.2(35), Pp.3-20.
10. Bertolini P. et al. *Stresses in constant tapered beams with thin-walled rectangular and circular cross sections*. Thin-Walled Structures, 2019, Vol.137, Pp.527-540.
11. Paglietti A., Carta G. *Remarks on the current theory of shear strength of variable depth beams*. The open civil engineering journal, 2009, Vol.3, No.1, Pp.28-33.
12. Oden J.T., Ripperger E.A. *Mechanics of elastic structures*. Cambridge etc., Hemisphere Publishing Corp., 1981, 460 p.
13. El-Mezaini N., Balkaya C., Çitipitio ğ ~ lu E. *Analysis of frames with nonprismatic members*. Journal of Structural Engineering, 1991, Vol.117, No.6, Pp.1573-1592.
14. Orr J.J. et al. *Shear behaviour of non-prismatic steel reinforced concrete beams*. Engineering Structures, 2014, Vol.71, Pp.48-59.
15. Hassanein M.F., Kharoob O.F. *Shear buckling behavior of tapered bridge girders with steel corrugated webs*. Engineering Structures, 2014, Vol.74, Pp.157-169.
16. Hassanein M.F., Kharoob O.F. *Linearly tapered bridge girder panels with steel corrugated webs near intermediate supports of continuous bridges*. Thin-Walled Structures, 2015, Vol.88, Pp.119-128.
17. Zhou M. et al. *Stress analysis of linear elastic nonprismatic concrete-encased beams with corrugated steel webs*. Journal of Bridge Engineering, 2017, Vol.22, No.6, 04017012.
18. Zhou M., Fu H., An L. *Distribution and properties of shear stress in elastic beams with variable cross section: theoretical analysis and finite element modelling*. KSCE Journal of Civil Engineering, 2020, Vol.24, Pp.1240-1254.
19. Hodges D., Ho J., Yu W. *The effect of taper on section constants for in-plane deformation of an isotropic strip*. Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2008, Vol.3, No.3, Pp.425-440.
20. Hodges D. et al. *Stress and strain recovery for the in-plane deformation of an isotropic tapered strip-beam*. Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2011, Vol.5, No.6, Pp.963-975.
21. Rajagopal A., Hodges D.H. *Variational asymptotic analysis for plates of variable thickness*. International Journal of Solids and Structures, 2015, Vol.75, Pp.81-87.
22. Rajagopal A., Hodges D.H., Yu W. *Asymptotic beam theory for planar deformation of initially curved isotropic strips*. Thin-walled structures, 2012, Vol.50, No.1, Pp.106-115.
23. Auricchio F., Balduzzi G., Lovadina C. *The dimensional reduction approach for 2D non-prismatic beam modelling: a solution based on Hellinger-Reissner principle*. International Journal of Solids and Structures, 2015, Vol.63, Pp.264-276.

24. Beltempo A. et al. *Analytical derivation of a general 2D non-prismatic beam model based on the Hellinger-Reissner principle*. Engineering Structures, 2015, Vol.101, Pp.88-98.
25. Rezaiee-Pajand M., Masoodi A.R., Mokhtari M. *Static analysis of functionally graded non-prismatic sandwich beams*. Adv. Comput. Des., 2018, Vol.3, No.2, Pp.165-190.
26. Firsanov V.V. *Mathematical model of the stress-strain state of a beam with a variable section with an effect of "boundary layer"*. Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings, 2015, No.6, Pp.63-69.
27. Firsanov V.V. *Bernoulli hypotheses in the problem of bending a mechanically incompressible beam*. PNRPU Mechanics Bulletin, 2023, No.4, Pp.121-129.
28. Mindlin R.D. *Micro-structure in linear elasticity*. Archive for rational mechanics and analysis, 1964, Vol.16, Pp.51-78.
29. Lomakin E.V. et al. *Refined stress analysis in applied elasticity problems accounting for gradient effects*. Doklady Physics, 2019, Vol.64, Pp.482-486.
30. Babajtsev A.V., Burtsev A.Yu., Rabinskij L.N., Solyaev Yu.O. *Metodika priblizhennoj otsenki napryazhenij v tolstostennoj osesimmetrichnoj kompozitnoj konstruktsii [A method of approximate solution for the stress distribution problem in an axisymmetric composite structure]*. Trudy MAI, 2019, No.107.
31. Babajcev A.V. *Modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya tolstostennykh kompozitnykh konstruktsij, rabotayushchikh v usloviyakh dinamicheskogo nagruzheniya: diss. kand. tekhn. nauk [Modeling of stress-strain state of thick-walled composite structures operating under dynamic loading conditions]*. Moskva, FGBOU VO "Moskovskij aviatsionnyj institut (natsional'nyj issledovatel'skij institut)", 2019 129 p.
32. Drysdale W.H. *Design of kinetic energy projectiles for structural integrity*. US Army Ballistic Research Laboratory technical report ARBRL-TR-02365, Aberdeen, Maryland, 1981.
33. Rajasekaran S., Bakhshi Khaniki H. *Finite element static and dynamic analysis of axially functionally graded nonuniform small-scale beams based on nonlocal strain gradient theory*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2019, Vol.26, No.14, Pp.1245-1259.
34. Lurie S.A. et al. *Dilatation gradient elasticity theory*. European Journal of Mechanics – A/Solids, 2021, Vol.88, 104258.
35. Lurie S., Solyaev Y. *Revisiting bending theories of elastic gradient beams*. International Journal of Engineering Science, 2018, Vol.126, Pp.1-21.
36. Lurie S., Solyaev Y. *On the formulation of elastic and electroelastic gradient beam theories*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2019, Vol.31, Pp.1601-1613.
37. Balobanov V., Niiranen J. *Locking-free variational formulations and isogeometric analysis for the Timoshenko beam models of strain gradient and classical elasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, Vol.339, Pp.137-159.
38. Abali B.E., Müller W.H., Dell'Isola F. *Theory and computation of higher gradient elasticity theories based on action principles*. Archive of Applied Mechanics, 2017, Vol.87, No.9, Pp.1495-1510.
39. Yang Z. et al. *Beam buckling analysis in peridynamic framework*. Archive of Applied Mechanics, 2022, Vol.92, No.12, Pp.3503-3514.
40. Yayli M.Ö. et al. *Free vibration behavior of a gradient elastic beam with varying cross section*. Shock and Vibration, 2014, Vol.2014, 801696.

41. Khaniki H.B., Hosseini-Hashemi S. *Buckling analysis of tapered nanobeams using nonlocal strain gradient theory and a generalized differential quadrature method*. Materials Research Express, 2017, Vol.4, No.6, 065003.
42. Lomakin E.V. et al. *Semi-inverse solution of a pure beam bending problem in gradient elasticity theory: The absence of scale effects*. Doklady Physics, 2018, Vol.63, Pp.161-164.
43. Volkov A.V., Golubkin K.S., Solyaev Yu.O. *Refined Analysis of Shear Stress Distribution in Tapered Rods Accounting for Gradient Effects*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol.45, No.5, Pp.2421-2428.
44. Gao X.L., Park S.K. *Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem*. International Journal of Solids and Structures, 2007, Vol.44, No.22-23, Pp.7486-7499.

Поступила в редакцию 16 сентября 2024 года.

Сведения об авторах:

Волков Александр Владимирович – к.ф.-м.н., н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: volkov.9291@mail.ru

Голубкин Константин Сергеевич – асп., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: golubkink@mail.ru