



К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СМЕШАННОЙ МОДЫ НАГРУЖЕНИЯ АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ КОМПОЗИТА

Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Лутхов А.И.

ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», г. Тула, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассмотрено предельное состояние смешанной моды нагружения трещиноподобного дефекта предельно тонкого адгезионного слоя композита. Задача нагружения трещиноподобного дефекта решалась численно при помощи метода конечных элементов, реализованного в программном комплексе Ansys, в рамках модели трещины в виде математического разреза, соответствующей нулевой толщине адгезионного слоя. Результатом моделирования является вычисление составляющих J -интеграла по модам I, II в вершине математического разреза.

Предлагается критерий разрушения, учитывающий разложение J -интеграла на слагаемые, отвечающие за удельные (к единице поверхности) энергии типа энергии изменения объема и формы. Предполагается, что при моде I разложение J -интеграла на аддитивные слагаемые определяется решением для предельно тонкого адгезионного слоя и связано с его механическими характеристиками, что задает определенный диапазон изменений удельных энергий. При моде II отсутствие диагональных компонент тензора напряжений ассоциирует J -интеграл с удельной энергией формоизменения. На основании экспериментальных данных по разрушению образца в рамках смешанной моды нагружения I+II и известных критических значений J -интегралов моды I и II найдены параметры критериальной зависимости при определенной комбинации разложения J -интеграла для моды I. Проведено сравнение результатов с известным критерием разрушения при изменении длины трещины.

Исследуется влияние представления J -интеграла посредством его составляющих моды I и моды II. Полагается, что слагаемое, определяющую моду I подлежит разложению с весовым коэффициентом, а слагаемое, отвечающее за моду II формирует удельную энергию формоизменения. Для ряда значений весового коэффициента разложения из анализа предельных состояний нормального разрыва и смешанного нагружения в рамках моды I+II при фиксированной длине трещины определяются параметры модели.

Ключевые слова: J -интеграл; коэффициент интенсивности напряжений; метод конечных элементов

TO DETERMINATION OF CRITICAL STATE OF MIXED MODE LOADING OF ADHESIVE LAYER OF COMPOSITE

Glagolev V.V., Glagolev L.V., Lutkhov A.I.

Tula State University, Tula, Russia

ABSTRACT

The limit state of the mixed mode loading of a crack-like defect in a thin adhesive layer of a composite is considered. The problem of loading of a crack-like defect was solved numerically using the finite element method implemented in the Ansys software package within the framework of the crack model in the form of a mathematical section corresponding to the zero thickness of the adhesive layer. The result of modeling is the calculation of J -integral components by modes I, II at the top of the mathematical section.

A fracture criterion is proposed, which takes into account the decomposition of the J -integral into summands responsible for energies density such as volume and shape change energies. It is assumed that at model I the decomposition of the J -integral into additive terms is determined by the solution for the extremely thin adhesive layer and is related to its mechanical characteristics, which sets a certain range of changes in energies density. At mode II, the absence of diagonal components of the stress tensor associates the J -integral with the shape change energy density. On the basis of experimental data on specimen fracture within the mixed loading mode I+II and known critical values of J -integrals of modes I and II, the parameters of the criterion dependence at a certain combination of J -integral expansion for mode I are found. The results are compared with the known fracture criterion for crack length variation.

The influence of the representation of the J -integral by means of its components mode I and mode II is investigated. It is assumed that the summand defining mode I is subject to decomposition with a weight coefficient, and the summand responsible for mode II forms the energy density of the shape change. Model parameters are determined for a number of values of the decomposition weight coefficient from the analysis of limit states of normal rupture and mixed loading within mode I+II at a fixed crack length.

Keywords: J -integral; stress intensity factor; finite element method

ВВЕДЕНИЕ

Изучение предельных состояний адгезионных слоев композитов в области их дефекта использует модель его представления в виде математического разреза [1,2]. В этом случае основу критериальной базы составляют характеристики механики квазихрупкого разрушения, в частности J -интеграл [1-7]. Для линейно упругой модели поведения композитов значение J -интеграла связывается с характеристикой сингулярного распределения поля напряжений в вершине трещины – коэффициентом интенсивности напряжений (КИН) и рассматривается в виде удельной (к единице поверхности) упругой энергии [8,9], которая в состоянии плоской деформации для нормального разрыва и поперечного сдвига принимает значение

$$J_k = (1 - \nu^2) \frac{K_k^2}{E}, \quad (1)$$

где $k = \text{I, II}$; K_k – КИН соответствующей моды нагружения.

Для смешенной моды нагружения I+II J -интеграл принимает вид

$$J_{\text{I+II}} = J_{\text{I}} + J_{\text{II}} = \frac{(1 - \nu^2)}{E} (K_{\text{I}}^2 + K_{\text{II}}^2). \quad (2)$$

Предельные значения (1) при моде нагружения I (J_{IC}) и моде нагружения II (J_{IIC}) в силу устойчивого роста трещины в направлении адгезионного слоя определяются экспериментально, согласно подходу Ирвина [10]. При этом расчетные значения критических внешних нагрузок могут быть найдены

посредством сопоставления КИН критическому значению (1). Отметим существенную разницу критических значений J -интегралов при моде I и моде II [4,11,12], которая может отличаться в разы. В этом случае определение критического состояния для смешанной моды нагружения I+II из связи J -интеграла с КИН (2) соответствующих мод нагружения не рассматривается.

В качестве критерия разрушения в случае смешанной моды нагружения математического разреза может использоваться следующая взаимосвязь между значениями J -интегралов [13]

$$\left(\frac{J_I}{J_{IC}}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{J_{II}}{J_{IIC}}\right)^{\alpha_2} = 1. \quad (3)$$

Постоянные α_1 , α_2 , следуя работе [14], полагаются равными: $\alpha_1 = \alpha_2$. Для нахождения постоянной α_1 строится набор кривых при различных значениях α_1 и проводится сравнение с тестируемым образцом [4,12,14]. Согласно данным работы [12] для адгезивов Araldite AV138 и Araldite 2015 $\alpha_1 = 1/2$, а для Sikaforce 7752 $\alpha_1 = 2$. При этом физического обоснования выбора коэффициентов не приводится. Отметим при $\alpha_1 = 1$ имеет место соответствие критерию, предложенному в [15] на основе отношений КИН: $\left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}}\right)^2 = 1$.

В случае идеально упругопластического материала распространение трещины смешанного типа нагружения I+II исследовано в работе [16].

Существенное превышение J_{IIC} над J_{IC} в работах [17] связывается с влиянием гидростатического давления и инвариантными слагаемыми плотности энергии деформаций, отвечающими за плотность энергий деформаций объема и формы. При этом в качестве величин, формирующих критериальную характеристику тонкого адгезионного слоя адгезива в области его дефекта, используются произведения инвариантных слагаемых на толщину слоя. Отсутствие сингулярности плотности энергии деформаций в торце трещиноподобного дефекта адгезионного слоя при конечном значении толщины слоя возможно для различных моделей деформирования слоистых композитов [18-21], в том числе и прямого моделирования методом конечных элементов с использованием подхода Нейбера-Новожилова [22-26]. Произведение плотности энергии деформаций и толщины слоя, определяемое в [27] как энергетическое произведение (ЭП) при обратимом деформировании формирует J -интеграл [20]. Стремление толщины слоя к нулевому значению приводит к сходимости ЭП к значению J -интеграла, найденного в рамках математического разреза посредством (1). Отсутствие сингулярности поля напряжений при малой, но конечной толщине слоя, дает возможность разложить плотность энергии деформаций и соответственно ЭП на инвариантные для фиксированной толщины слагаемые. Однако для сингулярной трещины Гриффитса разложение (1) в случае нормального разрыва или (2) на инвариантные слагаемые не очевидно. В настоящее время для нахождения КИН существуют методы и подходы [28-31] в том числе и реализуемые в рамках коммерческих МКЭ пакетов [32-34]. Выделение из (2) слагаемых, отвечающих за удельную энергию, идущую на формирование удельной энергии изменения объема и формы, дает

возможность использовать критерии разрушения, учитывающие соответствующие характеристики.

1. ФОРМИРОВАНИЕ КРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

При нахождении J -интеграла для случая нагружения трещиноподобного дефекта по моде I одним из вариантов экспериментального образца рассматривается двухконсольная балка (ДКБ-образец) [11]. При сопряжении консолей ДКБ-образца адгезионным слоем по длине l толщиной δ_0 с нулевым коэффициентом Пуассона, в работе [35] на основе деформации консолей расклинивающей силой интенсивности Q (на единицу длины в направлении ортогональном плоскости xOy) в рамках теории пластин Миндлина-Рейснера [36,37] было получено следующее выражение средних отрывных напряжений в адгезионном слое

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{2Q\sqrt{6(1+\nu)}}{\sqrt{\delta_0 h}} \sqrt{\frac{E_3}{E}} \left(\frac{a_0}{h} \sqrt{1-\nu} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \quad (4)$$

где a_0 , h – длина свободных консолей 1,2 и их толщина в ДКБ-образце; ν , E – коэффициент Пуассона и модуль упругости консолей; E_3 – модуль упругости адгезионного слоя 3.

Решение (4) получено при допущении $\delta_0/h \ll 1$ и приводит к следующему значению для J -интеграла при ограничении на модуль упругости адгезива $E_3/E \ll 1$

$$J_1 = \frac{\bar{\sigma}_{22}^2}{2E_3} \delta_0 = \frac{12Q^2(1-\nu^2)}{hE} \left(\frac{a_0}{h} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5(1-\nu)}} \left(\frac{h}{a_0} \right) \right)^2, \quad (5)$$

которое следует из результатов работ [38,39] и использовалось для сравнения полученных результатов в [40]. Выражение (5) предполагает существование относительно малого значения толщины слоя, при котором значение ЭП не зависит от толщины слоя. Для случая рассматриваемого диапазона малых значений относительных толщин слоя, напряжение на его торце в критическом состоянии при нормальном разрыве может быть найдено в виде

$$\bar{\sigma}_{22} = \sqrt{\frac{2J_1 E_3}{\delta_0}}. \quad (6)$$

Рассмотрим представление средней по толщине адгезива плотности упругой энергии деформаций $\bar{\varphi}$ через инвариантные составляющие плотности энергии изменения объема $\bar{\varphi}^\sigma$ и формоизменения $\bar{\varphi}^\tau$ при нулевом коэффициенте Пуассона [41]: $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^\sigma + \bar{\varphi}^\tau = (3\bar{\sigma}^2 + \bar{\tau}^2)/(2E_3)$, $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33})/3$ – гидростатическое напряжение; $\bar{\tau}^2 = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma}$ – свертка девиаторных составляющих тензора средних напряжений в слое. При наличии только одной диагональной компоненты тензора напряжений в слое для выражения (5) соответствующий шаровой тензор будет представлен диагональными компонентами со значениями $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{22}/3$, а девиатор будет иметь следующие три ненулевые компоненты: $\tilde{\sigma}_{11} = -\bar{\sigma}_{22}/3$, $\tilde{\sigma}_{22} = 2\bar{\sigma}_{22}/3$, $\tilde{\sigma}_{33} = -\bar{\sigma}_{22}/3$. Из найденных компонент шарового тензора и девиатора приходим

к следующим значениям компонент в выражении плотности упругой энергии: $\bar{\sigma}^2 = \bar{\sigma}_{22}^2/9$, $\bar{\tau}^2 = 2\bar{\sigma}_{22}^2/3$. Из последних представлений и связи (6) приходим к выражениям для плотности энергии изменения объема: $\bar{\varphi}^\sigma = J_I/(3\delta_0)$ и формы: $\bar{\varphi}^\tau = 2J_I/(3\delta_0)$ в случае нормального разрыва. Предполагаем, что J -интеграл (1) для нормального разрыва эквивалентен ЭП при стремлении толщины адгезионного слоя к нулевому значению [35]

$$J = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} (\delta_0 \bar{\varphi}). \quad (7)$$

J -интеграл для моды I представим в виде суммы слагаемых, отвечающих за удельную энергию изменения объема и формы

$$J_I = \delta_0 \bar{\varphi} = \delta_0 (\bar{\varphi}^\sigma + \bar{\varphi}^\tau) = J_I^\sigma + J_I^\tau, \quad (8)$$

где $J_I^\sigma = J_I/3$; $J_I^\tau = 2J_I/3$.

В случае нагружения трещины по моде II в ее вершине на основании асимптотических представлений [1-3] имеет место отсутствие диагональных компонент тензора напряжений. Следовательно, удельная энергия изменения объема тождественно равна нулю. J -интеграл для моды II определяется удельной энергией формоизменения

$$J_{II} = J_{II}^\tau. \quad (9)$$

В силу связи J -интеграла с плотностью упругой энергии (7) и возможностью разложения плотности упругой энергии на два инвариантных слагаемых: плотности энергии изменения объема и формы, для смешанной моды нагружения трещиноподобного дефекта в предельно тонком адгезионном слое, с учетом (1), (8), (9), принимаем следующее разделение J -интеграла (2)

$$J_{I+II} = \delta_0 (\bar{\varphi}^\sigma + \bar{\varphi}^\tau) = J_{I+II}^\sigma + J_{I+II}^\tau, \quad (10)$$

где $J_{I+II}^\sigma = J_I^\sigma = J_I/3$; $J_{I+II}^\tau = J_I^\tau + J_{II}^\tau = 2J_I/3 + J_{II}$.

С учетом представления (10) запишем критерий предельного состояния адгезионного слоя

$$(1+\beta)J_{I+II}^\sigma + J_{I+II}^\tau + \gamma J_{I+II}^\sigma J_{I+II}^\tau = J_{IIIC}, \quad (11)$$

где β , γ – параметры, определяющие наличие гидростатического напряжения в тонком адгезионном слое, формирующего удельную энергию изменения объема J -интеграла.

При нагружении по моде I и смешанной моде I+II имеют место равенства: $J_{IC}^\sigma + J_{IC}^\tau = J_{IC}$, $J_{I+IIIC}^\sigma + J_{I+IIIC}^\tau = J_{I+IIIC}$. С учетом последних равенств из (11) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров β , γ

$$\beta J_{IC}^\sigma + \gamma J_{IC}^\sigma J_{IC}^\tau = J_{IIIC} - J_{IC}, \quad (12)$$

$$\beta J_{I+IIIC}^\sigma + \gamma J_{I+IIIC}^\sigma J_{I+IIIC}^\tau = J_{IIIC} - J_{I+IIIC}. \quad (13)$$

Из решения системы (12) и (13) находим

$$\beta = \frac{J_{I+IIIC}^\sigma J_{I+IIIC}^\tau (J_{IIIC} - J_{IC}) - J_{IC}^\sigma J_{IC}^\tau (J_{IIIC} - J_{I+IIIC})}{J_{IC}^\sigma J_{I+IIIC}^\sigma (J_{I+IIIC}^\tau - J_{IC}^\tau)}, \quad (14)$$

$$\gamma = \frac{J_{IC}^\sigma (J_{IIIC} - J_{I+IIIC}) - J_{I+IIIC}^\sigma (J_{IIIC} - J_{IC})}{J_{IC}^\sigma J_{I+IIIC}^\sigma (J_{I+IIIC}^\tau - J_{IC}^\tau)}. \quad (15)$$

Таким образом (11), с определенными согласно (14) и (15) коэффициентами, предполагает тождественное равенство критического значения J -интеграла предельному значению для моды I, моды II и определенного нагружения смешанной моды I+II.

Использование (11), (14), (15) для нахождения предельных состояний адгезионных слоев в окрестности трещиноподобных дефектов подразумевает нахождение составляющих J -интегралов по модам I, II и экспериментальное определение трех критических значений J -интегралов J_{IC} , J_{IIC} , J_{I+IIIC} . Если критические состояния моды I и II связаны с определенным напряженно-деформируемым состоянием, то смешанная мода нагружения I+II допускает бесконечное множество соответствующих состояний. Исследуем в рамках критерия (11) поведение критического значения J_{I+IIIC} для определенного диапазона длин трещин SLB-образца [4].

2. ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕШАННОЙ МОДЫ НАГРУЖЕНИЯ

Рассмотрен SLB-образец (рис.1) для анализа моды нагружения I+II в котором ортотропные консоли 1 и 2 с одинаковыми механическими свойствами из Таблицы 1 сопряжены адгезионным слоем 3 с характеристиками из Таблицы 2 согласно работе [12], полученными экспериментально. Ось z образует с направляющими векторами осей x и y правую тройку.

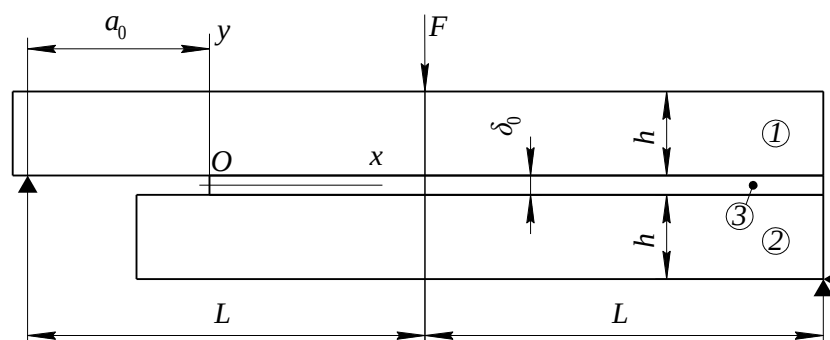


Рис.1. Схема нагружения адгезионного слоя модой нагружения I+II.

Таблица 1.

Механические свойства консолей.

Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Модуль сдвига, ГПа
$E_x = 109$	$\nu_{xy} = 0.342$	$G_{xy} = 4.315$
$E_y = 8.819$	$\nu_{xz} = 0.342$	$G_{xz} = 4.315$
$E_z = 8.819$	$\nu_{yz} = 0.380$	$G_{yz} = 3.200$

Таблица 2.

Критические значения J -интеграла адгезивов.

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
J_{IC} , Н/мм	0.14	0.540	3.786
J_{IIC} , Н/мм	0.352	2.958	5.552

Следуя работе [4] рассматриваются следующие геометрические характеристики SLB-образца: расстояние от воздействия нагрузки до опоры $L = 125$ мм, длина физического разреза $a_0 = 87.5$ мм, ширина консоли $h = 3$ мм, толщина образца $b = 15$ мм.

В Таблице 3 приведены экспериментальные значения критической нагрузки F_{exp} , полученные в рамках работы [4].

Таблица 3.

Критическая нагрузка.

Внешняя нагрузка	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
F_{exp} , Н	81.1	204.2	630.3

Численное моделирование нагружения SLB образца смешанной модой I+II проводилось МКЭ в комплексе Ansys в рамках модели трещины в виде математического разреза, соответствующей нулевой толщине слоя, согласно схеме, представленной на рис.1. Результатом моделирования является вычисление составляющих J -интеграла по модам I, II в вершине математического разреза методом VCCT [42], встроенным в стандартный графический интерфейс Ansys раздела Fracture. Используя связь (2), из найденных составляющих определяется итоговое значение J -интеграла.

Поскольку модель является двумерной, для конечно-элементной аппроксимации геометрии используются стандартные 4-узловые прямоугольные элементы Ansys с квазилинейными функциями формы (PLANE182). В Таблице 4 приведены значения составляющих J -интеграла по модам нагружения I, II для адгезива Araldite AV138 при варьировании размера элементов вблизи вершины трещины. Для адгезивов Araldite 2015 и Sikaforce 7752 характер сходимости аналогичен.

Таблица 4.

Значения составляющих J -интеграла мод нагружений I, II адгезива Araldite AV138.

Размеры элементов вблизи вершины трещины, мм	J_{IC} , Н/мм	J_{IIC} , Н/мм
1×1	0.0632	0.0436
0.1×0.1	0.0637	0.0442
0.01×0.01	0.0637	0.0440
0.001×0.001	0.0638	0.0439

Окончательная конечно-элементная аппроксимация исследуемой модели состоит из блочной сетки с общим количеством элементов 138550. В области вершины трещины используется регулярная сетка с размерами 0.001×0.001 мм, в переходной области используется сетка со сгущением к вершине трещины, в остальной области используется регулярная сетка с размерами 0.1×0.1 мм.

По найденным в работе [4] критическим внешним нагрузкам F_{exp} , см. Таблицу 3, численно определены критические значения J_{I+II} и их составляющие согласно разделению (10). Результаты представлены в Таблице 5.

Таблица 5.
Критические характеристики смешанной моды нагружения I+II.

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
J_{I+II}^{σ} , Н/мм	0.108	0.684	6.513
J_{I+II}^{σ} , Н/мм	0.021	0.135	1.290
J_{I+II}^{τ} , Н/мм	0.086	0.548	5.223

В силу разделения (8) значения J -интеграла моды I в Таблице 6 приведем его составляющие в критическом состоянии согласно Таблице 2.

Таблица 6.
Составляющие J -интеграла в критическом состоянии для нагружения по моде I.

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
J_{IC}^{σ} , Н/мм	0.047	0.180	1.262
J_{IC}^{τ} , Н/мм	0.093	0.360	2.524

Используя данные Таблиц 5 и 6, поместим в Таблицу 7 расчетные данные коэффициентов (14), (15) для рассматриваемых адгезивов.

Таблица 7.
Значения параметров β , γ .

Параметр	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
β	97.83	7	3.40
γ , мм/Н	-1000	18	-1

На рис.2 приведены сравнения критических сил, полученных для длин трещин $a_0 = [60, 70, 80, 87.5, 95, 100, 110, 120]$, отнесенных к критической силе, полученной экспериментально в рамках работы [4] для длины трещины $a_0 = 87.5$ мм, для рассматриваемых адгезивов. График 1 соответствует критической силе, удовлетворяющей критерию (3) для показателей степеней работы [12], график 2 – критерию (11).

Из рис.2 видно, что максимальная погрешность между критическими нагрузками составляет не более 3.11% для адгезива Araldite AV138, 14.79% – Araldite 2015, 6.3% – Sikaforce 7752. При этом критические силы при нагружении адгезивов, полученные по критерию (11), ближе к экспериментальным значениям, см. Таблицу 3, для длины трещины $a_0 = 87.5$ мм.

Отметим, что использование однопараметрического критерия типа (11), рассмотренного в [17,21], без учета критического значения смешанной моды нагружения для рассматриваемого диапазон длин трещин и адгезионных смол приводит в [21] к погрешностям до 25%.

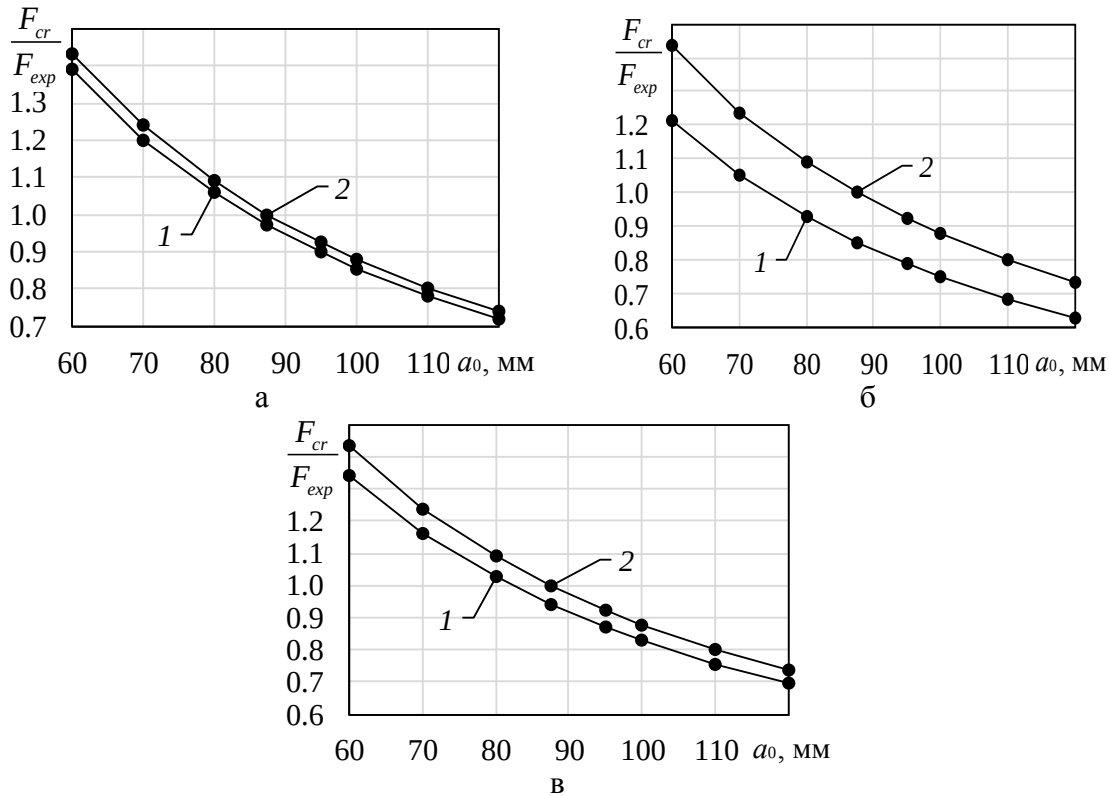


Рис.2. Зависимости безразмерных критических сил от длины трещины: а) Araldite AV138, б) Araldite 2015, в) Sikaforce 7752.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СЛАГАЕМЫХ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ J -ИНТЕГРАЛА

В работе [21] при исследовании значений произведений $\delta_0 \bar{\varphi}^\sigma$ и $\delta_0 \bar{\varphi}$ на торце трещиноподобного дефекта для критического состояния рассматриваемых адгезивов, с реальными механическими свойствами, при стремлении их толщины к нулевому значению при нормальном разрыве приходим к оценке: $0.41 \leq \bar{\varphi}^\sigma / \bar{\varphi} \leq 0.54$. Рассмотрим представление J -интеграла для моды I (8) в следующем виде

$$J_I = J_I^\sigma + J_I^\tau = zJ_I + (1-z)J_I, \quad (16)$$

где z – весовой коэффициент; $1/3 \leq z \leq 2/3$.

В этом случае для смешанной моды нагружения трещиноподобного дефекта в предельно тонком адгезионном слое разделение удельной энергии (2) принимает следующий вид

$$J_{I+II} = J_{I+II}^\sigma + J_{I+II}^\tau = \frac{(1-\nu^2)}{E} (zK_I^2) + \frac{(1-\nu^2)}{E} ((1-z)K_I^2 + K_{II}^2). \quad (17)$$

По найденным в работе [4] критическим внешним нагрузкам F_{exp} , см. Таблицу 3, определим критические составляющие удельной упругой энергии J_{I+IIc} согласно разделению (17) в комплексе Ansys в рамках модели трещины в виде математического разреза для $z = 1/2$ и $z = 2/3$. Результаты представлены в Таблице 8.

Таблица 8.
Критические составляющие J -интеграла для смешанной
моды нагружения I+II.

Механические свойства		Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$z = \frac{1}{2}$	J_{I+II}^{σ} , Н/мм	0.032	0.203	1.935
	J_{I+II}^{τ} , Н/мм	0.076	0.481	4.578
$z = \frac{2}{3}$	J_{I+II}^{σ} , Н/мм	0.043	0.271	2.580
	J_{I+II}^{τ} , Н/мм	0.065	0.413	3.933

В силу разделения (16) значения составляющих J -интеграла моды I в Таблице 9 приведем его составляющие в критическом состоянии согласно таблице 2 для $z = 1/2$ и $z = 2/3$.

Таблица 9.
Критические составляющие J -интеграла для нагружения по моде I.

Механические свойства		Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$z = \frac{1}{2}$	J_{IC}^{σ} , Н/мм	0.070	0.270	1.893
	J_{IC}^{τ} , Н/мм	0.070	0.270	1.893
$z = \frac{2}{3}$	J_{IC}^{σ} , Н/мм	0.093	0.360	2.524
	J_{IC}^{τ} , Н/мм	0.047	0.180	1.262

Используя данные Таблиц 8 и 9, поместим в Таблицу 10 расчетные данные коэффициентов (14), (15) для рассматриваемых адгезивов.

Таблица 10.
Значения параметров «разрыхления».

Параметр		Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$z = \frac{1}{2}$	β	-52.79	6.08	1.94
	γ , мм/Н	797	11	-1
$z = \frac{2}{3}$	β	-6.48	5.42	1.21
	γ , мм/Н	187	7	0

На рис.3 приведены сравнения критических сил, отнесенных к критической силе, полученной экспериментально в рамках работы [4] для длины трещины $a_0 = 87.5$ мм, от длины трещиноподобного дефекта для рассматриваемых адгезивов при $z = 2/3$. График 1 соответствует критерию (11) с распределением удельного потока для нагружения по моде I согласно (8), для смешанной моды нагружения согласно (10). График 2 соответствует критерию (11) с распределением удельного потока для нагружения по моде I согласно (16), для смешанной моды нагружения согласно (17).

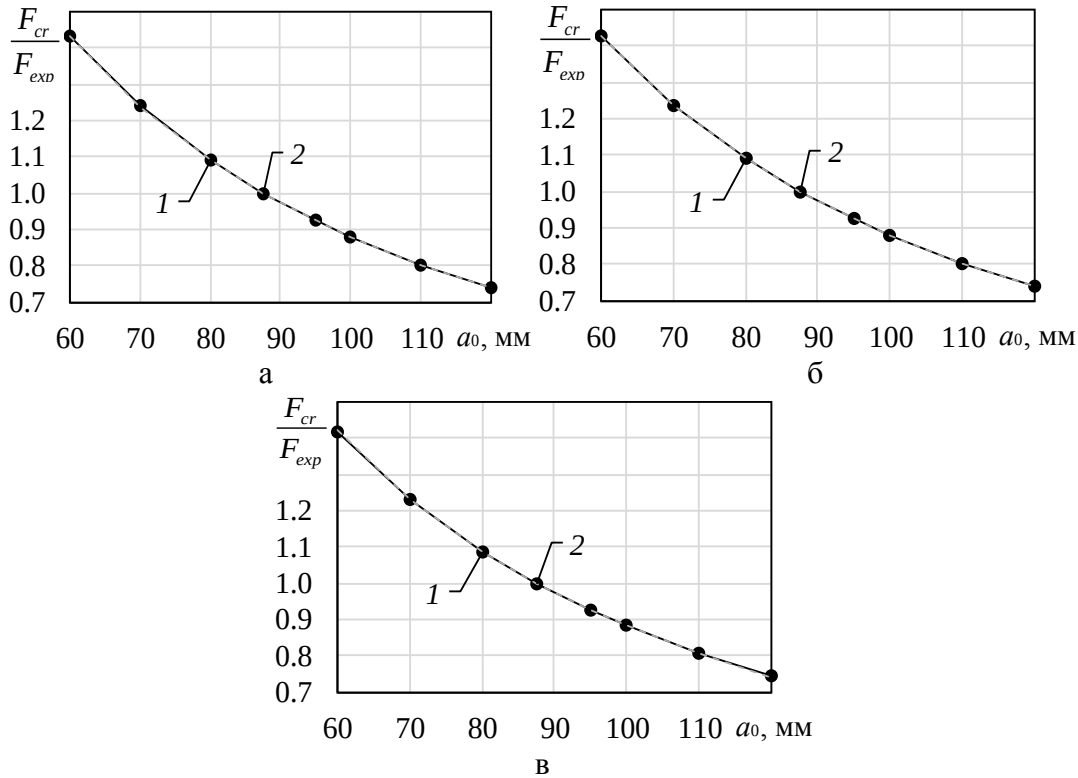


Рис.3. Зависимости безразмерных критических сил от длины трещины: а) Araldite AV138, б) Araldite 2015, в) Sikaforce 7752.

На рис.3 максимальная погрешность между критическими нагрузками 1 и 2 составляет не более 0.19% для адгезива Araldite AV138, 0.03% – Araldite 2015, 0.35% – Sikaforce 7752. Для $z=1/2$ максимальная погрешность между критическими нагрузками 1 и 2 составляет не более 0.09% для адгезива Araldite AV138, 0.01% – Araldite 2015, 0.03% – Sikaforce 7752.

Из полученных результатов видим, что разделение (17) в рассмотренном диапазоне не оказывает принципиального влияния на значение критической нагрузки при использовании критерия (11).

Подстановка (17) в (11) приводит к следующей критериальной зависимости относительно КИН

$$a_{11}^* K_I^2 + a_{12}^* K_I^2 K_{II}^2 + a_{22}^* K_{II}^2 + a_{33}^* K_I^4 = G_{IIc}, \quad (18)$$

$$\text{где } a_{11}^* = \frac{1-v^2}{E} (1+\beta z), \quad a_{12}^* = \left(\frac{1-v^2}{E} \right)^2 \gamma z, \quad a_{22}^* = \frac{1-v^2}{E}, \quad a_{33}^* = (1-z) \left(\frac{1-v^2}{E} \right)^2 \gamma z$$

являются функциями параметров z , β , γ , два из которых постулируются материальными постоянным, а параметр z , учитывающий разложение (16), может быть получен из решения задачи нормального разрыва тонкого адгезионного слоя.

Отметим, что формальное использование (18) для нахождения коэффициентов a_{11}^* , a_{12}^* , a_{22}^* , a_{33}^* требует знание двух экспериментов для смешанной моды нагружения при известных критических значениях J_{IC} и J_{IIc} , тогда как для (11) достаточно только одного.

В работе [43] был предложен следующий критерий разрушения для смешанного I+II нагружения трещины посредством фактора плотности

энергии деформаций S_{cr} , являющийся квадратичной формой коэффициентов интенсивности напряжений

$$a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_IK_{II} + a_{22}K_{II}^2 = S_{cr}. \quad (19)$$

При этом S_{cr} определяет энергию деформаций вблизи трещины и постулируется материальной постоянной, которая может быть определена при нагружении по моде I посредством K_{IC} . Коэффициенты квадратичной формы a_{11} , a_{12} , a_{22} определяются исходя из асимптотических формул линейной теории упругости при нахождении энергии деформаций на некотором малом расстоянии от вершины трещины смешанной моды нагружения. Критерий (19), как и критерий (1), не учитывает существенной разницы в критических состояниях при моде I и II.

ВЫВОДЫ

Предложен критерий разрушения предельно тонкого адгезионного слоя композита при его смешанной моде нагружения I+II. Критерий учитывает разделение J -интеграла на аддитивные слагаемые, определяющие удельную энергию изменения объема и формы. Для представления J -интеграла посредством его составляющих моды I и моды II полагается, что слагаемое, определяющее моду I, подлежит разложению с весовым коэффициентом, а слагаемое, отвечающее за моду II, формирует удельную энергию формоизменения. Для ряда значений весового коэффициента разложения из анализа предельных состояний нормального разрыва и смешанного нагружения в рамках моды I+II при фиксированной длине трещины определены параметры модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. *Механика разрушения композиционных материалов*. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
2. Фудзии Т., Дзако М. *Механика разрушения композиционных материалов*. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
3. Broberg K.B. *Cracks and fracture*. – London: Academic Press, 1999. – 752 p.
4. Neves L.F.R., Campilho R.D.S.G., Sanchez-Arce I.J., Madani K., Prakash C. *Numerical modelling and validation of mixed-mode fracture tests to adhesive joints using J-integral concepts* // Processes. – 2022. – Vol.10. – 2730.
5. Cherepanov G.P. *Some new applications of the invariant integrals of mechanics* // J. Appl. Math. Mech. – 2012. – Vol.76. – No.35. – Pp.519-536.
6. Rice J.R. *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks* // ASME J. Appl. Mech. – 1968. – Vol.35. – Pp.379-386.
7. Fraisse P., Schmit F. *Use of J-integral as fracture parameter in simplified analysis of bonded joints* // Int. J. Fract. – 1993. – Vol.63. – No.1. – Pp.59-73.
8. Sheinman I., Kardomateas G. *Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates* // Int. J. Solids Struct. – 1997. – Vol.34. – No.4. – Pp.451-459.
9. Williams J.G. *On the calculation of energy release rates for cracked laminates* // Int. J. Fract. – 1988. – Vol.36. – No.2. – Pp.101-119.

10. Irwin G.R., Kies J.A. *Critical energy rate analysis of fracture strength* // Welding J. Res. Suppl. – 1954. – Vol.33. – Pp.193-198.
11. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. *Comparative evaluation of the double-cantilever beam and tapered double-cantilever beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints* // Int. J. Adhes. Adhes. – 2016. – Vol.67. – Pp.103-111.
12. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. *Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility* // Int. J. Fract. – 2017. – Vol.207. – Pp.55-71.
13. Wu E.M., Reuter R.C.J. *Crack extension in fiberglass reinforced plastics* // University of Illinois. – 1965. – TAM Report No.275.
14. Alfano G., Crisfield M.A. *Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: Mechanical and computational issues* // Int. J. Numer. Methods Eng. – 2001. – Vol.50. – No.7. – Pp.1701-1736.
15. Mall S., Murphy J.F., Shottafer J.E. *Criterion for mixed mode fracture in wood* // J. Eng. Mech. – 1983. – Vol.109. – No.3. – Pp.680-690.
16. Кургузов В.Д. *Моделирование расслоения стальных труб при сложном нагружении* // ПМТФ. – 2023. – №6. – С.155-167.
17. Глаголев В.В., Маркин А.А. *Предельные состояния адгезионных слоев при комбинированном нагружении* // Изв. РАН. МТТ. – 2023. – №6. – С.39-46.
18. Goland M., Reissner E. *The stresses in cemented joints* // J. Appl. Mech. – 1944. – Vol.11. – №1. – Pp.17-27.
19. Adams R.D., Peppiatt N.A. *Stress analysis of adhesive-bonded lap joints* // J. Strain Anal. – 1974. – Vol.9. – No.3. – Pp.185-196.
20. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. *Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite* // Int. J. Fract. – 2020. – Vol.224. – No.2. – Pp.277-284.
21. Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Лутхов А.И. *Конечно-элементное исследование влияния гидростатического давления в тонком адгезионном слое на его разрушение при смешанной моде нагружения* // Проблемы прочности и пластичности. – 2024. – Т.86. – №1. – С.36-46.
22. Novozhilov V.V. *On a necessary and sufficient criterion for brittle strength* // Appl. Math. Mech. – 1969. – Vol.33. – No.2. – Pp.212-222.
23. Neuber H. *Theory of notch stresses: principles for exact calculation of strength with reference to structural form and material.* – Berlin: Springer-Verlag, 1958. – 293 p.
24. Корнев В.М. *Модификация критерия разрушения Нейбера – Новожилова для угловых вырезов (антиплоская задача)* // ПМТФ. – 2002. – Т.43. – №1. – С.153-159.
25. Lazzarin P., Berto F. *Some expressions for the strain energy in a finite volume surrounding the root of blunt V-notches* // Int. J. Fract. – 2005. – Vol.135. – №1-4. – Pp.161-185.
26. Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н. *Применение критерия хрупкого разрушения В.В. Новожилова при определении разрушающих нагрузок для угловых вырезов в условиях сложного напряженного состояния* // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – №1. – С.122-126.
27. Glagolev V.V., Markin A.A. *Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter* // Int. J. Solids Struct. – 2019. – Vol.158. – Pp.141-149.

28. Малик А.В., Лавит И.М. *Метод расчета коэффициента интенсивности напряжений для неподвижной трещины нормального разрыва при динамическом нагружении* // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2018. – №54. – С.88-102.
29. Murakami Y. *A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method* // Eng. Fract. Mech. – 1976. – Vol.8. – No.4. – Pp.643-655.
30. Rybicki E.F., Kanninen M.F. *A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral* // Eng. Fract. Mech. – 1977. – Vol.9. – No.4. – Pp.931-938.
31. Caicedo J., Portela A. *Direct computation of stress intensity factors in finite element method* // Eur. J. Comput. Mech. – 2017. – Vol.26. – No.3. – Pp.309-335.
32. Морозов Е.М. *ANSYS в руках инженера: механика разрушения*. – М.: Ленанд, 2010. – 453 с.
33. *ANSYS. User's Guide. Release 11.0.* – Pennsylvania: ANSYS Inc, 2006.
34. *ABAQUS HTML Documentation. Dassault Systemes.* – Velizy-Villacoublay, 2009.
35. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. *О влиянии механических характеристик тонкого адгезионного слоя на прочность композита. Часть 1. Упругое деформирование* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – №3. – С.116-124.
36. Mindlin R.D. *Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates* // ASME J. Appl. Mech. – 1951. – Vol.18. – Pp.31-38.
37. Reissner E. *Reflections on the theory of elastic plates* // Appl. Mech. Rev. – 1985. – Vol.38. – No.11. – Pp.1453-1464.
38. Bruno D., Greco F. *Mixed-mode delamination in plates: a refined approach* // Int. J. Solids Struct. – 2001. – Vol.38. – No.50-51. – Pp.9149-9177.
39. Bruno D., Greco F., Lonetti P. *Computation of energy release rate and mode separation in delaminated composite plates by using plate and interface variables* // Mech. Adv. Mater. Struct. – 2005. – Vol.12. – No.4. – Pp.285-304.
40. Andrews M.G., Massabo R. *The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers* // Eng. Fract. Mech. – 2007. – Vol.74. – Pp.2700-2720.
41. Хан Х. *Теория упругости. Основы линейной теории*. – М.: Мир, 1988. – 343 с.
42. Ismail A.E., Jamian S., Kamarudin K., Nor M.K.M., Ibrahim M.N., Choiron M.A. *An overview of fracture mechanics with ANSYS* // Int. J. Integr. Eng. – 2018. – Vol.10. – No.5. – Pp.59-67.
43. Sih G.C. *Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems* // Int. J. Fract. – 1974. – Vol.10. – No.3. – Pp.305-321.

REFERENCES

1. Cherepanov G.P. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Fracture mechanics of composite materials]*. Moskva, Nauka, 1983, 296 p.
2. Fudzii T., Dzako M. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Fracture Mechanics of Composite Materials]*. Moskva, Mir, 1982, 232 p.
3. Broberg K.B. *Cracks and fracture*. London, Academic Press, 1999, 752 p.

4. Neves L.F.R., Campilho R.D.S.G., Sanchez-Arce I.J., Madani K., Prakash C. *Numerical modelling and validation of mixed-mode fracture tests to adhesive joints using J-integral concepts*. Processes, 2022, Vol.10, 2730.
5. Cherepanov G.P. *Some new applications of the invariant integrals of mechanics*. J. Appl. Math. Mech., 2012, Vol.76, No.35, Pp.519-536.
6. Rice J.R. *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*. ASME J. Appl. Mech., 1968, Vol.35, Pp.379-386.
7. Fraisse P., Schmit F. *Use of J-integral as fracture parameter in simplified analysis of bonded joints*. Int. J. Fract., 1993, Vol.63, No.1, Pp.59-73.
8. Sheinman I., Kardomateas G. *Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates*. Int. J. Solids Struct., 1997, Vol.34, No.4, Pp.451-459.
9. Williams J.G. *On the calculation of energy release rates for cracked laminates*. Int. J. Fract., 1988, Vol.36, No.2, Pp.101-119.
10. Irwin G.R., Kies J.A. *Critical energy rate analysis of fracture strength*. Welding J. Res. Suppl., 1954, Vol.33, Pp.193-198.
11. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. *Comparative evaluation of the double-cantilever beam and tapered double-cantilever beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints*. Int. J. Adhes. Adhes., 2016, Vol.67, Pp.103-111.
12. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. *Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility*. Int. J. Fract., 2017, Vol.207, Pp.55-71.
13. Wu E.M., Reuter R.C.J. *Crack extension in fiberglass reinforced plastics*. University of Illinois, 1965, TAM Report No.275.
14. Alfano G., Crisfield M.A. *Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: Mechanical and computational issues*. Int. J. Numer. Methods Eng., 2001, Vol.50, No.7, Pp.1701-1736.
15. Mall S., Murphy J.F., Shottafer J.E. *Criterion for mixed mode fracture in wood*. J. Eng. Mech., 1983, Vol.109, No.3, Pp.680-690.
16. Kurguzov V.D. *Modelirovanie rassloeniya stal'nykh trub pri slozhnom nagruzhenii [Modeling of delamination of steel pipes under complex loading]*. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2023, No.6, Pp.155-167.
17. Glagolev V.V., Markin A.A. *Limit states of adhesive layer under combined loading*. Mechanics of Solids, 2023, Vol.58, Pp.1960-1966.
18. Goland M., Reissner E. *The stresses in cemented joints*. J. Appl. Mech., 1944, Vol.11, No.1, Pp.17-27.
19. Adams R.D., Peppiatt N.A. *Stress analysis of adhesive-bonded lap joints*. J. Strain Anal., 1974, Vol.9, No.3, Pp.185-196.
20. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. *Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite*. Int. J. Fract., 2020, Vol.224, No.2, Pp.277-284.
21. Glagolev V.V., Glagolev L.V., Lutkhov A.I. *A finite element analyses of the effect of hydrostatic pressure in a thin adhesive layer on its fracture under mixed-mode loading*. Problems of strength and plasticity, 2024, Vol.86, No.1, Pp.36-46.
22. Novozhilov V.V. *On a necessary and sufficient criterion for brittle strength*. Appl. Math. Mech., 1969, Vol.33, No.2, Pp.212-222.

23. Neuber H. *Theory of notch stresses: principles for exact calculation of strength with reference to structural form and material*. Berlin, Springer-Verlag, 1958, 293 p.
24. Kornev V.M. *Modified Neuber – Novozhilov criterion of rupture for V-shaped cuts (antiplane problem)*. J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2002, Vol.43, No.12, Pp.128-132.
25. Lazzarin P., Berto F. *Some expressions for the strain energy in a finite volume surrounding the root of blunt V-notches*. Int. J. Fract., 2005, Vol.135, No.1-4, Pp.161-185.
26. Morozov N.F., Semenov B.N. *Primenenie kriteriya khrupkogo razrusheniya V.V. Novozhilova pri opredelenii razrushayushchikh nagрузок dlya uglovyykh vrezov v usloviyakh slozhnogo napryazhennogo sostoyaniya* [Application of V.V. Novozhilov's brittle fracture criterion in determining breaking loads for corner notches under conditions of complex stress state]. Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela, 1986, No.1, Pp.122-126.
27. Glagolev V.V., Markin A.A. *Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter*. Int. J. Solids Struct., 2019, Vol.158, Pp.141-149.
28. Malik A.V., Lavit I.M. *On the computation method for the stress intensity factor of a stationary crack in mode I under dynamic loading*. Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics, 2018, No.54, Pp.88-102.
29. Murakami Y. *A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method*. Eng. Fract. Mech., 1976, Vol.8, No.4, Pp.643-655.
30. Rybicki E.F., Kanninen M.F. *A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral*. Eng. Fract. Mech., 1977, Vol.9, No.4, Pp.931-938.
31. Caicedo J., Portela A. *Direct computation of stress intensity factors in finite element method*. Eur. J. Comput. Mech., 2017, Vol.26, No.3, Pp.309-335.
32. Morozov E.M. *ANSYS v rukakh inzhenera: mekhanika razrusheniya* [ANSYS in the hands of an engineer: fracture mechanics]. Moskva, Lenand, 2010, 456 p.
33. *ANSYS. User's Guide. Release 11.0*. Pennsylvania, ANSYS Inc, 2006.
34. *ABAQUS HTML Documentation*. Dassault Systemes. Velizy-Villacoublay, 2009.
35. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. *On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 1. Elastic deformation*. PNRPU Mech. Bull., 2022, No.3, Pp.116-124.
36. Mindlin R.D. *Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*. ASME J. Appl. Mech., 1951, Vol.18, Pp.31-38.
37. Reissner E. *Reflections on the theory of elastic plates*. Appl. Mech. Rev., 1985, Vol.38, No.11, Pp.1453-1464.
38. Bruno D., Greco F. *Mixed-mode delamination in plates: a refined approach*. Int. J. Solids Struct., 2001, Vol.38, No.50-51, Pp.9149-9177.
39. Bruno D., Greco F., Lonetti P. *Computation of energy release rate and mode separation in delaminated composite plates by using plate and interface variables*. Mech. Adv. Mater. Struct., 2005, Vol.12, No.4, Pp.285-304.
40. Andrews M.G., Massabo R. *The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers*. Eng. Fract. Mech., 2007, Vol.74, Pp.2700-2720.
41. Hahn H. *Teoriya uprugosti. Osnovy lineynoy teorii* [Elasticity theory: fundamentals of linear theory and application]. Moskva, Mir, 1985, 343 p.
42. Ismail A.E., Jamian S., Kamarudin K., Nor M.K.M., Ibrahim M.N., Choiron M.A. *An overview of fracture mechanics with ANSYS*. Int. J. Integr. Eng., 2018, Vol.10, No.5, Pp.59-67.

43. Sih G.C. *Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems*. Int. J. Fract., 1974, Vol.10, No.3, Pp.305-321.

Поступила в редакцию 14 марта 2025 года.

Сведения об авторах:

Глаголев Вадим Вадимович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., Кафедра «Вычислительная механика и математика», ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», г. Тула, Россия; e-mail: vadim@tsu.tula.ru

Глаголев Леонид Вадимович – к.ф.-м.н., с.н.с., Кафедра «Вычислительная механика и математика», ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», г. Тула, Россия; e-mail: len4ic92@gmail.com

Лутхов Андрей Игоревич – асп., Кафедра «Вычислительная механика и математика», ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», г. Тула, Россия; e-mail: tip460@mail.ru