

УДК 539.32

EDN RKNZKV (<https://elibrary.ru/rknzkv>)

DOI 10.33113/mkmk.ras.2025.31.02.07



АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛОКНИСТЫХ И ДИСПЕРСНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМ МЕЖФАЗНЫМ СЛОЕМ

Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В работе развивается аналитический подход к решению задачи на ячейке в методе асимптотического усреднения Бахвалова, позволяющий с высокой степенью точности определять эффективные характеристики композитных материалов. Метод асимптотического усреднения предоставляет строгий математический алгоритм вычисления как жесткостных, так и прочностных характеристик на основе решения ряда задач теории упругости на ячейке с периодическими условиями. В случае если структура композитного материала не удовлетворяет условиям периодичности, то в качестве ячейки периодичности следует брать представительный элемент объема. Для волокнистых и дисперсных материалов ячейка представляет собой параллелепипед с включением цилиндрической или сферической формы с промежуточным межфазным слоем, который может иметь сложную структуру с изменяющимися характеристиками (градиентный межфазный слой). В настоящей работе предполагается некоторая симметрия в расположении включений, которая соответствует ортотропному материалу. Это означает, что включение располагается необязательно в центре ячейки периодичности, но вся структура материала получается путем многократного отражения этого включения относительно всех граней параллелепипеда. В результате задача на ячейке с периодическими условиями сводится к краевой задаче с некоторыми условиями симметричного/антисимметричного отражения отдельных компонент перемещений, а эффективный тензор жесткости гарантировано имеет ортотропную структуру (9 независимых модулей жесткости). За счет смещения центра включений в ячейке можно эффективно смоделировать процесс агрегации частиц и возникающие при этом эффекты, а за счет изменения характеристик межфазного слоя – различные масштабные эффекты нанокомпозитов, в частности, аномальное упрочнение наноматериалов со сверхмалыми концентрациями включений. И вообще, точное решение задачи на ячейке позволяет не только точно определить все модули ортотропного материала, но и точно оценить концентрацию напряжений на локальном уровне вблизи включений, что очень важно для прочностных характеристик волокнистых и дисперсных материалов. Метод конечных элементов не подходит для решения этой задачи, поэтому в настоящей статье развивается специальный аналитический метод решения задачи на ячейке с периодическими или краевыми условиями на основе представления решения Т-полными системами функций, аналитически точно удовлетворяющими исходным уравнениям с точным учетом контактных условий на межфазных границах на основе представления Папковича-Нейбера. Решение представляется в виде ряда по этим системам функций, и периодические или граничные условия удовлетворяются с помощью прямого метода Треффтца, заключающегося в минимизации энергетической нормы отклонения аппроксимации в виде ряда от точного решения. Возникающая при этом система уравнений обладает рядом свойств, позволяющих сократить число решаемых задач, необходимых для полного определения ортотропной матрицы

жесткости, до минимума. Разработанная в данной статье аналитическая схема применяется для моделирования аномальных свойств полиметилметакрилата, наполненного многослойными углеродными нанотрубками.

Ключевые слова: асимптотическое усреднение; волокнистые и дисперсные композиты; представление Папковича-Нейбера; аналитические решения; градиентный межфазный слой; схема аппроксимации Треффтца; тензор концентрации напряжений; эффекты усиления при сверхмалых объемных долях наполнения; эффекты диспергирования и агрегации включений

ANALYTICAL-NUMERICAL METHOD OF DETERMINING EFFECTIVE CHARACTERISTICS OF FIBROUS AND DISPERSED MATERIALS WITH INTERPHASE LAYER

Vlasov A.N., Volkov-Bogorodsky D.B.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

ABSTRACT

The paper develops an analytical approach to solving the problem on a cell in the Bakhvalov asymptotic homogenization method, which allows determining the effective characteristics of the composite materials with high degree of accuracy. The asymptotic averaging method provides a rigorous mathematical algorithm for calculating both stiffness and strength characteristics based on solving a number of elasticity theory problems on a representative volume with periodic conditions. For fibrous and dispersed materials, the representative volume is reduced to parallelepiped with an inclusion of cylindrical or spherical shape with an intermediate interphase layer, which can have complex structure with changing characteristics (it is the gradient interphase layer). In this paper, some symmetry in the location of inclusions is assumed, which corresponds to the orthotropic material. This means that the inclusion is not necessarily located in the center of the periodicity cell, but the entire structure of the material is obtained by multiple reflections of this inclusion relative to the all faces of parallelepiped. As a result, the problem on a cell with periodic conditions is reduced to the boundary value problem with some conditions of symmetric/antisymmetric reflection of an individual displacement component, and the effective stiffness tensor is guaranteed to have the orthotropic structure (i.e. they are 9 independent stiffness moduli). By shifting the center of inclusions in the cell, it is possible to effectively model the aggregation process of particles with the effects that arise here, and by changing the characteristics of the interphase layer, to model various scale effects of nanocomposites, in particular, anomalous strengthening of nanomaterials with ultra-low inclusion concentration. In general, an accurate solution to the problem on the cell allows not only to accurately determine all the moduli of an orthotropic material, but also to accurately estimate the stress concentration at a local level near the inclusions, which is very important for accurate assessment of the strength characteristics of composites. The finite element method is not suitable for solving this problem, so in this paper we develop a special analytical method for solving the problem on the cell with periodic or boundary conditions based on the solution representation by the T-complete system of functions that analytically exactly satisfy the original equations with exact consideration of the contact conditions at the interphase boundaries based on the Papkovitch-Neuber representation. The solution is represented as a series in these systems, and the periodic or boundary conditions are satisfied using the direct Trefftz method, which consists in minimizing the energy norm of deviation of the approximation in the form of the series from the exact solution. The resulting system of equations has a number of positive properties that make it possible to reduce the number

of solving problems, necessary for the complete determination of the orthotropic stiffness matrix. The analytical scheme developed in this paper is used to model the anomalous properties of polymethyl-methacrylate filled with multilayer carbon nanotubes.

Keywords: asymptotic homogenization; fibrous and dispersed composites; Papkovitch-Neuber representation; analytical solutions; gradient interphase layer; Trefftz approximations; stress concentration tensor; non-classical strength effects at ultra-low volume fraction; effects of inclusion dispersion and aggregation

ВВЕДЕНИЕ

В литературе известны такие широко используемые инженерные методы оценки эффективных характеристик композитных материалов, как методы типа Мори-Танака [1] на основе результата Эшелби [2] об однородном поле во включении сфероидальной формы, Такаянаги [3], Халпина-Цая [4], Хашина-Штрикмана [5] на основе предельных оценок функционала энергии, Эшелби-Кристенсена [6] на основе точного аналитического решения задачи трех сферических тел. Однако, среди этих методов наиболее подходящим для моделирования эффективных жесткостных и прочностных характеристик является только метод Эшелби-Кристенсена, поскольку он основан на точном решении задачи о взаимодействии частиц с эффективной средой.

В отношении других методов следует отметить, что при наличии межфазного слоя нарушается однородность напряженного состояния внутри частицы, и сам межфазный слой никак не учитывается, а упрощенные и предельные оценки типа Такаянаги, Халпина-Цая и Хашина-Штрикмана не в состоянии учесть аномальные масштабные эффекты при сверхмалых объемных концентрациях.

Наиболее точным и математически обоснованным методом, основанным на решении достаточно сложной «задачи на ячейке», является метод асимптотического усреднения Бахвалова для уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами [7,8]. В рамках этого метода возможно осуществить точное моделирование динамики межфазного слоя, агрегации и масштабных эффектов, а также при необходимости учесть нелинейную зависимость материалов от внешних факторов и нерегулярного распределения частиц в материале [9-11].

Для решения задачи на ячейке в методе асимптотического усреднения обычно применяется метод конечных элементов, который является универсальным вычислительным методом и мощным инструментом для решения многих задач математической физики [12].

Однако, он предполагает ряд условий, которым должны удовлетворять функции формы, чтобы обеспечить сходимость конечно-элементного решения. Эти условия касаются как конечно-элементной сетки, так и самих аппроксимирующих функций, которые по необходимости должны быть непрерывными во всей области, чтобы обеспечить корректную минимизацию функционала энергии и непрерывность напряжений на границах элементов. Это накладывает ограничения на вариативные возможности функций формы, которые являются полиномами (обычно первого или второго порядка и изредка третьего порядка) и не могут аналитически точно удовлетворять исходным уравнениям.

С другой стороны, в уравнениях теории упругости существует аналитический аппарат, который позволяет довольно легко построить полные системы аппроксимирующих функций, аналитически точно удовлетворяющие исходным уравнениям, как для классических, так и градиентных [13,14] уравнений теории упругости. Это представление Папковича-Нейбера [15-17], выражающее перемещения через вспомогательные потенциалы, удовлетворяющие уравнениям Лапласа и Гельмгольца. В результате, функции формы и их аналитические свойства обеспечиваются гармоническими полиномами любого порядка и их аналогами для уравнений Гельмгольца, достигающими за счет полноты любой степени точности приближения к решению. Такой подход к конечно-элементному решению является, по сути, аналитическим. В нем элементы используются как подобласти-блоки, аналитически точно представляющие решение в локальной области и укладываемые в общее решение за счет минимизации функционала энергии, обеспечивающего одновременно сшивку элементов на границе с помощью метода Треффтца [18].

В настоящей статье эффективные жесткостные и прочностные характеристики волокнистых и дисперсных материалов определяются с помощью метода асимптотического усреднения Бахвалова [7], в соответствии с которым анизотропные модули жесткости и тензор концентрации напряжений определяются на основе строгого асимптотического анализа исходной системы уравнений теории упругости в перемещениях, представленной в периодической среде, моделирующей композит, в виде системы уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами (см. [8]). В результате эффективный тензор жесткости определяется по стандартной схеме (см. [7-10]) на основе решения последовательности вспомогательных задач на ячейке периодичности для так называемых периодических матриц-функций быстрых переменных $N_{i_1}(\xi)$, $i_1 = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{i_1}} \left(A_{ij}(\xi) \frac{\partial (N_{i_1} + \xi_{i_1} I)}{\partial \xi_j} \right) = 0, \quad \xi \notin \Sigma \quad (1)$$

с контактными условиями на границе Σ раздела фаз матрицы и включений

$$[N_{i_1}]_{\Sigma} = 0, \quad \left[A_{ij}(\xi) \frac{\partial (N_{i_1} + \xi_{i_1} I)}{\partial \xi_j} n_i \right]_{\Sigma} = 0 \quad (2)$$

и дополнительным условием, накладываемым на матрицы-функции быстрых переменных для обеспечения единственности в решении системы уравнений (1), (2)

$$\hat{N}_{i_1} = \langle N_{i_1}(\xi) \rangle = 0. \quad (3)$$

Здесь I – единичная матрица, $[\cdot]_{\Sigma}$ – скачок функции при переходе через межфазную поверхность, $\langle \cdot \rangle$ – среднее по объему ячейки периодичности, $A_{ij}(\xi) = \|c_{ijkl}(\xi)\|$ – матричные коэффициенты уравнения (1), составленные из элементов тензора жёсткости c_{ijkl} , принимающих разное значение в матрице, включении и межфазном слое (см. [7-10]). Ячейка периодичности может иметь произвольную параллелепипедную форму, а включение может быть произвольной формы, моделируя реальный образец композитного материала,

однако, в этой статье мы рассматриваем волокнистые и дисперсные материалы с включением цилиндрической или сферической формы с межфазным слоем, который может иметь произвольные переменные характеристики, т.е. с градиентным межфазным слоем.

Волокнистые и дисперсные материалы различаются только формой включений: для волокнистых мы считаем, что они представляют собой односвязные в плоскости (x, y) частицы, вытянутые вдоль оси z , а для дисперсных – частицы, односвязные во всем пространстве (x, y, z) .

Эффективные характеристики (компоненты эффективного тензора жёсткости $\hat{c}_{ijkl}$) определяются из решения трех задач (1)-(3) на ячейке периодичности с последующим усреднением по формуле

$$\hat{A}_{ij} = \left\langle A_{i_{i_2}}(\xi) \frac{\partial(N_j + \xi_j I)}{\partial \xi_{i_2}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(N_i + \xi_i I)}{\partial \xi_{i_1}} A_{i_{i_2}}(\xi) \frac{\partial(N_j + \xi_j I)}{\partial \xi_{i_2}} \right\rangle. \quad (4)$$

Тензор локальной жесткости и тензор концентрации напряжений, дающие связь между средними деформациями и напряжениями и локальными микронапряжениями, определяются непосредственно через функции быстрых переменных (см. [7-10])

$$\sigma_i = \tilde{A}_{ij} \hat{\epsilon}_j = \Xi_{ij} \hat{\sigma}_j, \quad \tilde{A}_{ij} = A_{i_{i_2}}(\xi) \frac{\partial(N_j + \xi_j I)}{\partial \xi_{i_2}}, \quad (5)$$

где $\hat{\epsilon}_j$, $\hat{\sigma}_j$ – вектор-столбцы средних по ячейке деформаций и напряжений, σ_i , соответственно, вектор-столбцы локального тензора напряжений с учётом микроструктуры, а $\Xi_{ij} = \|\xi_{ikjl}\|$ – матрицы, составленные из элементов тензора концентрации напряжений. Нетрудно видеть, что тензор концентрации напряжений находится из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\Xi_{ij} \hat{A}_{jk} = \tilde{A}_{ik} = \left(A_{i_{i_2}}(\xi) \frac{\partial(N_k + \xi_k I)}{\partial \xi_{i_2}} \right).$$

Будучи математически сформулированной в матричном виде, задача (1)-(4) имеет простой физический смысл и сводится к девяти независимым полноценным задачам теории упругости по определению напряженно-деформированного состояния в периодической среде при девяти типах нагружения. Эти типы нагружений являются однородными в среднем состояниями, соответствующими равенству нулю всех средних деформаций, кроме одной выделенной. Однако, в силу симметрии эффективного тензора жесткости $\hat{c}_{ijkl} = \hat{c}_{ijlk} = \hat{c}_{klij}$ (см. [7-11]), что доказывается математически строго и является физически корректным, число независимых задач теории упругости сокращается до шести. При этом первая формула (4) выражает принцип усреднения возникающих на микроуровне напряжений, а вторая, эквивалентная ей формула, выражает «принцип эквивалентности по энергии»: она соответствует работе, вычисляемых на напряжениях и деформациях девяти независимых состояний, и является билинейной формой исходной задачи.

В общем случае эффективный тензор жесткости определяет анизотропную упругую среду. Однако, если включение расположено в центре ячейки, и тем самым обладает симметрией относительно трех координатных плоскостей,

эффективный тензор жесткости определяется девятью независимыми константами и соответствует ортотропной упругой среде. То же самое относится ко всей периодической структуре, если она обладает симметрией относительно некоторых трех ортогональных плоскостей. Для того чтобы добиться этой симметрии в случае включений произвольной формы, или произвольным образом расположенных внутри ячейки, мы будем предполагать, что периодическая структура в целом образована путем многократного отражения исходной ячейки параллелепipedной формы с включением с размерами $L_1 \times L_2 \times L_3$ относительно всех своих граней (см. рис.1). При таком подходе можно легко смоделировать процесс агрегации частиц путем сдвижки центра включений к границе ячейки (см. рис.1б).

В случае ортотропной симметрии периодической структуры тензор жесткости также обладает необходимыми условиями симметрии

$$\|\hat{c}_{ijj}\| = \begin{Bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & \hat{C}_{13} \\ \hat{C}_{12} & \hat{C}_{22} & \hat{C}_{23} \\ \hat{C}_{13} & \hat{C}_{23} & \hat{C}_{33} \end{Bmatrix}, \quad \|\hat{c}_{ijj}\| = \begin{Bmatrix} \hat{G}_{12} & & \\ & \hat{G}_{13} & \\ & & \hat{G}_{23} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где $\hat{c}_{ijj} = \hat{C}_{ij}$, $\hat{c}_{ijj} = \hat{G}_{ij}$, остальные компоненты равны нулю. В этом случае задача на ячейке для функций быстрых переменных с периодическими условиями превращается в граничную задачу со смешанными краевыми условиями на гранях параллелепипеда (см. [9]).

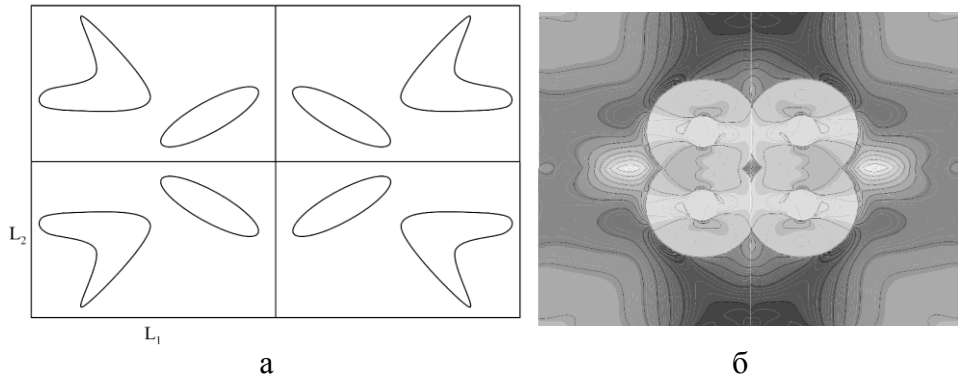


Рис.1. Условия симметрии для ортотропного тела (а), и модель агрегации частиц в условиях ортотропного тела (б).

Для вектор-функции $\mathbf{u}^{(i,i)}$, являющейся i -м столбцом матрицы $(N_i + \xi_i I)$, т.е. для псевдоперемещений имеем

$$u_n^{(i,i)} = \pm \frac{L_i}{2} \delta_{ij}, \quad \tau_s^{(i,i)} = 0, \quad \xi_j = \pm \frac{L_j}{2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где $u_n^{(i,i)}$ нормальная компонента вектора $\mathbf{u}^{(i,i)}$ на поверхности параллелепипеда, $\tau_s^{(i,i)}$ – касательная компонента поверхностных напряжений.

Для вектор-функции $\mathbf{u}^{(i,j)}$, $i \neq j$, являющейся i -м столбцом матрицы $(N_j + \xi_j I)$, имеем

$$u_i^{(i,j)} = \pm \frac{L_j}{2}, \quad \sigma_j^{(i,j)} = \sigma_k^{(i,j)} = 0, \quad \xi_j = \pm \frac{L_j}{2}, \quad (8)$$

$$u_j^{(i,j)} = \sigma_i^{(i,j)} = \sigma_k^{(i,j)} = 0, \quad \xi_i = \pm \frac{L_i}{2}, \quad u_k^{(i,j)} = \tau_s^{(i,j)} = 0, \quad \xi_k = \pm \frac{L_k}{2}, \quad (9)$$

где $u_k^{(i,j)}$ – соответствующая компонента вектора $\mathbf{u}^{(i,j)}$, $\sigma_k^{(i,j)}$ – компонента вектор-столбца тензора напряжений, $\tau_s^{(i,j)}$ – касательная компонента поверхностных напряжений.

Задача на ячейке с условиями (7) определяет главные компоненты $\hat{C}_{ij}$ тензора жесткости (6); остальные задачи с условиями (8), (9) определяют сдвиговые компоненты $\hat{G}_{ij}$.

В силу условий симметрии для полного определения эффективного тензора жесткости достаточно трех задач с условиями (8), (9), поскольку функции $\mathbf{u}^{(i,j)}$ и $\mathbf{u}^{(j,i)}$ дают одно и то же значение для компонент эффективного тензора жесткости.

Таким образом, для полного определения всех эффективных характеристик ортотропного тела необходимо решать всего шесть краевых задач, которые легко могут быть реализованы, например, методом конечных элементов. Однако, в данной статье для решения этих задач развивается специальный аналитико-численный метод для включений сферической и цилиндрической формы с промежуточным межфазным слоем с переменными характеристиками.

Переход к техническим модулям жесткости (модулям Юнга и коэффициентам Пуассона) осуществляется с помощью обращения главной части матрицы жесткости путем приведения ее к виду (см. [19])

$$\|\hat{C}_{ijj}\|^{-1} = \begin{vmatrix} 1/\hat{E}_1 & -\hat{\nu}_{12}/\hat{E}_1 & -\hat{\nu}_{13}/\hat{E}_1 \\ -\hat{\nu}_{21}/\hat{E}_2 & 1/\hat{E}_2 & -\hat{\nu}_{23}/\hat{E}_2 \\ -\hat{\nu}_{31}/\hat{E}_3 & -\hat{\nu}_{32}/\hat{E}_3 & 1/\hat{E}_3 \end{vmatrix}, \quad (10)$$

что может быть выполнено по правилу Крамера (см. [20]), и приводит к следующим простым формулам для вычисления технических модулей жесткости $\hat{E}_i$ и коэффициентов Пуассона $\hat{\nu}_{ij}$ на основе матрицы жесткости (6)

$$\hat{E}_1 = \hat{C}_{11} - \hat{\nu}_{12}\hat{C}_{12} - \hat{\nu}_{13}\hat{C}_{13}, \quad \hat{E}_2 = \hat{C}_{22} - \hat{\nu}_{21}\hat{C}_{12} - \hat{\nu}_{23}\hat{C}_{23}, \quad \hat{E}_3 = \hat{C}_{33} - \hat{\nu}_{31}\hat{C}_{13} - \hat{\nu}_{32}\hat{C}_{23},$$

где

$$\hat{\nu}_{12} = \frac{\hat{C}_{12}\hat{C}_{33} - \hat{C}_{13}\hat{C}_{23}}{\hat{C}_{22}\hat{C}_{33} - \hat{C}_{23}^2}, \quad \hat{\nu}_{13} = \frac{\hat{C}_{13}\hat{C}_{22} - \hat{C}_{12}\hat{C}_{23}}{\hat{C}_{22}\hat{C}_{33} - \hat{C}_{23}^2}, \quad \hat{\nu}_{23} = \frac{\hat{C}_{23}\hat{C}_{11} - \hat{C}_{13}\hat{C}_{12}}{\hat{C}_{11}\hat{C}_{33} - \hat{C}_{13}^2},$$

$$\hat{\nu}_{21} = \frac{\hat{C}_{12}\hat{C}_{33} - \hat{C}_{13}\hat{C}_{23}}{\hat{C}_{11}\hat{C}_{33} - \hat{C}_{13}^2}, \quad \hat{\nu}_{31} = \frac{\hat{C}_{13}\hat{C}_{22} - \hat{C}_{12}\hat{C}_{23}}{\hat{C}_{11}\hat{C}_{22} - \hat{C}_{12}^2}, \quad \hat{\nu}_{32} = \frac{\hat{C}_{23}\hat{C}_{11} - \hat{C}_{13}\hat{C}_{12}}{\hat{C}_{11}\hat{C}_{22} - \hat{C}_{12}^2}.$$

1. МЕТОД РАДИАЛЬНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ДЛЯ ВКЛЮЧЕНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ИЛИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Для эффективного и точного решения задачи на ячейке (1)-(3) с краевыми условиями (7)-(9) развивается аналитико-численный метод [21], использующий аппроксимации Треффтца на основе базисных функций, являющихся решениями обобщенной задачи Эшелби [6,22-24]. Для этого были разработаны специальные представления для аппроксимирующих функций на основе метода радиальных

множителей [25], аналитически точно учитывающим контактные условия на межфазных границах. Развиваемый метод основан на представлении Папковича-Нейбера [26,27] для вектор-функции перемещений $\mathbf{u}(P)$ в изотропной теории упругости через вспомогательные гармонические потенциалы $\mathbf{f}(P)$ и $\phi(P)$

$$\mathbf{u}(P) = \frac{\mathbf{f}}{\mu} + \frac{\nabla(\phi - \mathbf{r} \cdot \mathbf{f})}{4(1-\nu)\mu}, \quad \nabla^2 \mathbf{f} = \nabla^2 \phi = 0, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}. \quad (11)$$

Здесь μ и λ – параметры Ламе, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Рассматривается уединенное многослойное включение сферической (3D случай) или цилиндрической (2D случай) формы в пространстве с полиномиальной асимптотикой на бесконечности, задаваемой произвольным векторным гармоническим полином $\mathbf{f}_n^{(0)}$ степени n в представлении Папковича-Нейбера

$$\mathbf{u}(P) \rightarrow \mathbf{U}_n^{(0)}, \quad \mathbf{U}_n^{(0)} = \frac{\mathbf{f}_n^{(0)}}{\mu} - \frac{\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_n^{(0)})}{4\mu(1-\nu)}, \quad P \rightarrow \infty \quad (12)$$

с «идеальными» контактными условиями $[\mathbf{u}] = 0$ и $[\mathbf{p}(\mathbf{u})] = 0$ (скачок функции равен нулю) на межфазных границах, где $\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \|\sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j\|$ – поверхностные напряжения на границе контакта, n_j – компоненты вектора внешней нормали. По аналогии с методом Эшелби-Кристенсена, где задача (11), (12) рассматривается с асимптотикой первого порядка (однородное поле деформации), назовем эту задачу при произвольном $n \geq 1$ обобщенной задачей Эшелби.

Развивается подход к построению базисных систем функций, основанный на структурном анализе уравнения Лапласа с помощью системы однородных гармонических полиномов, которые модифицируются с помощью радиальных множителей. Эти функции выступают в качестве множителя, превращая исходный гармонический полином во второе линейно независимое сингулярное фундаментальное решение уравнения Лапласа (см. [25]).

С помощью системы радиальных множителей эффективно строится решение обобщенной задачи Эшелби о деформировании уединенного многослойного включения сферической или цилиндрической формы, помещенного в матрицу, занимающую все пространство. Структурный анализ представления Папковича-Нейбера на системе гармонических полиномов с радиальными множителями позволяет определить структуру потенциалов Папковича-Нейбера таким образом, чтобы привести контактные условия на межфазных границах цилиндрической или сферической формы к алгебраическому виду, устанавливающему связи между значениями базисных гармонических полиномов из примыкающих областей. Тогда с каждым слоем, включением и матрицей связывается достаточное число гармонических полиномов по числу условий сопряжения на межфазных границах, и все эти полиномы определяются одной и той же гармонической функцией, задающей асимптотику перемещений на бесконечности.

Чтобы определить эти базисные гармонические полиномы, введем пять дифференциальных операторов над векторным полем $\mathbf{f}$, возникающих в контактных условиях на межфазных границах при определении решения с помощью представления (11), (12)

$$D_1(f) = \nabla \operatorname{div} f, \quad D_2(f) = f, \quad (13)$$

$$D_3(f) = r \operatorname{div} f, \quad D_4(f) = \nabla(rf), \quad D_5(f) = r(rf). \quad (14)$$

Здесь f имеет вид произведения $h_n(r)f_n^{(0)}$, где $f_n^{(0)}$ – однородный гармонический полином степени n , задающий асимптотику на бесконечности, а $h_n(r)$ – функция радиального множителя, зависящая от радиуса в пространстве размерности m , $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$. Нас интересует действие операторов (13), (14) на произведение полинома и радиальной функции, и поиск линейно-независимых полиномов, инвариантных относительно этого действия, т.е. переходящих в линейную комбинацию этих же полиномов.

При подстановке потенциалов в форме $h(r)f$ в соотношения (13), (14) произведение радиального множителя и функции преобразуется в сумму таких же операторов (13), (14), действующих на функцию f . Таким образом, получаем дифференциальные соотношения следующего вида, используемые при выводе контактных уравнений на межфазных границах

$$D_1(hf) = hD_1(f) + \frac{h'}{r}(D_3(f) + D_4(f)) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{h'}{r} \right) D_5(f), \quad (15)$$

$$D_2(hf) = hD_2(f), \quad D_3(hf) = hD_3(f) + \frac{h'}{r} D_5(f), \quad (16)$$

$$D_4(hf) = hD_4(f) + \frac{h'}{r} D_5(f), \quad D_5(hf) = hD_5(f). \quad (17)$$

Из этих соотношений следует, что в качестве линейно-независимых полиномов инвариантных относительно действия операторов (13), (14) могут быть взяты функции вида

$$\phi_k = D_k(f_n^{(0)}), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (18)$$

Действительно, непосредственно проверяется, что

$$D_k(\phi_k) = \phi_k, \quad D_2(\phi_k) = \phi_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5,$$

$$D_1(\phi_1) = D_3(\phi_1) = 0, \quad D_4(\phi_1) = (n-1)\phi_1, \quad D_5(\phi_1) = (n-1)\phi_3,$$

$$D_1(\phi_4) = 2\phi_1, \quad D_3(\phi_4) = 2\phi_3, \quad D_4(\phi_4) = (n+1)\phi_4, \quad D_5(\phi_4) = (n+1)\phi_5,$$

$$D_1(\phi_3) = (n+m-1)\phi_1, \quad D_3(\phi_3) = (n+m-1)\phi_3, \quad D_4(\phi_3) = r^2\phi_1 + 2\phi_3, \quad D_5(\phi_3) = r^2\phi_3,$$

$$D_1(\phi_5) = (n+m+1)\phi_4, \quad D_3(\phi_5) = (n+m+1)\phi_5, \quad D_4(\phi_5) = r^2\phi_4 + 2\phi_5, \quad D_5(\phi_5) = r^2\phi_5,$$

где m – размерность пространства ($m=2$ – для цилиндрических включений, $m=3$ – для сферических включений). При выводе этих соотношений мы использовали свойство однородности полиномов ϕ_k , из которого следует

$$r \frac{\partial \phi}{\partial r} = \max(0, n-2)\phi, \quad r \frac{\partial \phi_k}{\partial r} = n\phi_k, \quad k = 2, 3, 4, \quad r \frac{\partial \phi_5}{\partial r} = (n+2)\phi_5.$$

Здесь ϕ_1 – полином степени $(n-2)$, ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 – полиномы степени n , ϕ_5 – полином степени $(n+2)$. Также здесь мы использовали гармоничность функции $f_n^{(0)}$.

Поскольку в представлении Папковича-Нейбера в качестве базиса для радиальных множителей могут использоваться только гармонические

функции, то нам необходимо перейти от полиномов ϕ_k , которые в общем случае не являются гармоническими, к эквивалентным им однородным гармоническим полиномам ψ_k .

Это делается с помощью представления Гаусса (см. [28]) для однородных полиномов $\phi^{(n)}(P)$ степени n

$$\phi^{(n)}(P) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} r^{2k} \psi^{(n-2k)}(P), \quad \nabla^2 \psi^{(n-2k)}(P) = 0, \quad (19)$$

$$r = |P| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2},$$

где m – размерность пространства, а $\psi^{(n)}$ – гармонический полином степени n . Для бигармонической функции ряд (19) содержит только два члена, для гармонической функции совпадает с самой этой функцией. Полином $\psi^{(n)}$, стоящий при свободном члене, вычисляется в явном виде

$$\psi^{(n)} = \sum_k \alpha_k r^{2k} \nabla^{2k} \phi^{(n)}, \quad \alpha_k = -\alpha_{k-1} / (2k(2n+m-2k-2)), \quad \alpha_0 = 1. \quad (20)$$

Заметим, что среди функций (18) полиномы ϕ_1, ϕ_2 – гармонические, ϕ_3, ϕ_4 – бигармонические, а ϕ_5 – полигармонический. Анализируя эти функции с помощью разложений (19), (20), находим, что их можно заменить на межфазных границах на следующие пять базисных гармонических полиномов, с помощью которых и будут конструироваться потенциалы Папковича-Нейбера

$$\psi_1 = \phi_1 = \nabla \operatorname{div} f_n^{(0)}, \quad \psi_2 = \phi_2 = f_n^{(0)}, \quad (21)$$

$$\psi_3 = \phi_3 - \frac{r^2 \phi_1}{2n+m-4} = -r^{2n+m-2} \nabla \left(r^{-2n-m+4} \operatorname{div} f_n^{(0)} \right), \quad (22)$$

$$\psi_4 = \phi_4 - \phi_3 = r^{2n+m-2} \left[\nabla \left(r \left(r^{-2n-m+2} f_n^{(0)} \right) \right) - r \operatorname{div} \left(r^{-2n-m+2} f_n^{(0)} \right) \right], \quad (23)$$

$$\psi_5 = \phi_5 - \frac{r^2 (\phi_3 + \phi_4)}{2n+m} + \frac{r^4 \phi_1}{(2n+m)(2n+m-2)} = r^{2n+m+2} \nabla \operatorname{div} \left(r^{-2n-m+2} f_n^{(0)} \right), \quad (24)$$

где $r^{-2n-m+2}$ – сингулярный радиальный множитель, m – размерность пространства. Эти функции являются гармоническими полиномами соответствующей степени и выражаются в виде линейной комбинации функций (18). Следовательно, они не нарушают принципа инвариантности относительно действия операторов (13), (14).

Таким образом, мы располагаем пятью гармоническими полиномами (21)-(24), над каждым из которых может быть образован независимый параллельный сингулярный квазиполином с помощью радиальных множителей. Эти потенциалы удовлетворяют необходимому уравнению Лапласа и используются для аппроксимации решений, заданных представлением Папковича-Нейбера (11), (12). При этом форма этих потенциалов такова, что любой из операторов (13), (14) над функцией $h\psi_j$, где $h=1$, или $h=r^{-2n-m+6}$ при $j=1$, $h=r^{-2n-m+2}$ при $j=2,3,4$, $h=r^{-2n-m-2}$ при $j=5$ – регулярный или сингулярный радиальный множитель из уравнений (11), (12) – представляется в виде линейной комбинации полиномов $\phi_k(P)$ с некоторыми радиальными

функциями $h_k^{(ij)}(r)$, принимающими постоянное значение на поверхности цилиндра или сферы

$$D_i(h\psi_j) = \sum_{k=1}^5 h_k^{(ij)}(r) \phi_k(P). \quad (25)$$

Контактные уравнения на межфазных границах помимо самих операторов (13), (14) включают в себя еще и нормальные производные от этих операторов, которые на поверхностях цилиндрической и сферической формы превращаются в производные по радиусу, поэтому необходимо рассмотреть еще и действие производной по радиусу на соотношения (25). Однако, очевидно, что это действие не меняет формы этих соотношений. Действительно, дифференцируя (25) и учитывая однородность полиномов $\phi_k(P)$, получаем

$$\frac{\partial D_i(h\psi_j)}{\partial r} = \sum_{k=1}^5 \frac{h_k'^{(ij)} + (n + \alpha_k) h_k^{(ij)}}{r} \phi_k(P), \quad \alpha_1 = -2, \quad \alpha_{2,3,4} = 0, \quad \alpha_5 = 2. \quad (26)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. Рассмотрим дифференциальный оператор общего вида, действующий на границе цилиндрической или сферической формы и составленный из базисных операторов (13), (14) и их производных по направлению радиуса

$$F(f) = \sum_{i=1}^5 \left(a_i D_i(f) + b_i \frac{\partial D_i(f)}{\partial r} \right). \quad (27)$$

Тогда действие этого оператора на потенциал f , имеющий вид произведения полиномиального базиса (21)-(26) и сингулярных радиальных множителей $\hat{h}_n(r) = r^{-2n-m+2}$

$$f(P) = \sum_{j=1}^5 (A_j + \hat{A}_j \hat{h}_{n+\alpha_j}(r)) \psi_j(P), \quad (28)$$

можно представить в виде линейной комбинации пяти канонических операторов над функцией $f_n^{(0)}$ следующего вида

$$F(f) = H_1 r^2 \nabla \operatorname{div} f_n^{(0)} + H_2 f_n^{(0)} + H_3 \nabla(r f_n^{(0)}) + \\ + H_4 r \operatorname{div} f_n^{(0)} + H_5 r^{-2} r(r f_n^{(0)}), \quad (29)$$

с радиальными функциями $H_k(r)$, которые определяются коэффициентами A_k , $\hat{A}_k$ и регулярными или сингулярными радиальными функциями $h_k^{(ij)}$, $\hat{h}_k^{(ij)}$, принимающими постоянное значение на границе цилиндрической или сферической формы

$$H_k = \sum_{i,j=1}^5 r^{-\alpha_k} \left[\left(a_i h_k^{(ij)} + b_i \frac{h_k'^{(ij)} + (n + \alpha_k) h_k^{(ij)}}{r} \right) A_j + \right. \\ \left. + \left(a_i \hat{h}_k^{(ij)} + b_i \frac{\hat{h}_k'^{(ij)} + (n + \alpha_k) \hat{h}_k^{(ij)}}{r} \right) \hat{A}_j \right]. \quad (30)$$

Из этой теоремы следует метод сведения контактных уравнений к алгебраическим соотношениям относительно неизвестных коэффициентов

в представлении (28) для потенциала. Поскольку радиальные функции $h_k^{(ij)}(r)$ из представлений (25), (26) принимают постоянное значение на поверхностях цилиндрической или сферической формы, то, приравнявая между собой функции $H_k(r)$ из уравнений (30) для примыкающих к межфазной границе двух областей, получаем равенство необходимых контактных условий (27), записанных на межфазной границе сферической или цилиндрической формы в виде соотношений (30) над одним и тем же однородным гармоническим полиномом $f_n^{(0)}(P)$. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_j и $\hat{A}_j$.

Таким образом, задача решается в конечном аналитическом виде с помощью явного представления потенциала f из (11) (ϕ полагаем нулю) в каждой фазе упругого пространства через систему из пяти гармонических полиномов, построенных на основе асимптотики (12)

$$f = (A_j + \hat{A}_j r^{-2n-m})\psi_1 + (B_j + \hat{B}_j r^{-2n-m})\psi_2 + (C_j + \hat{C}_j r^{-2n-m})\psi_3 + \\ + (D_j + \hat{D}_j r^{-2n-m-4})\psi_4 + (E_j + \hat{E}_j r^{-2n+m+2})\psi_0, \quad (31)$$

где $m=2$ – для цилиндрических включений, $m=3$ – для сферических включений, и гармонические полиномы: ψ_0 степени $n-2$, $\psi_{1,2,3}$ степени n , ψ_4 степени $n+2$, определяются через исходный гармонический полином $f_n^{(0)}$ по формулам (21)-(24).

Поскольку для уравнений второго порядка требуется два контактных условия на каждой межфазной границе, то число неизвестных и число алгебраических уравнений в системе, определяющей коэффициенты в (31), совпадает. После разрешения этой системы уравнений получаем значения коэффициентов в представлении (28) соответствующих точному выполнению необходимых контактных условий на всех межфазных границах.

Выражение (31) является точной аппроксимацией потенциала f из представления (11) в обобщенной задаче Эшелби регулярными и сингулярными системами гармонических функций. Варьируя исходный полином $f_n^{(0)}$ в асимптотике (12) мы получаем полную систему функций $u_k(P)$, соответствующую потенциалу (31) в представлении (11), которая аналитически точно удовлетворяет контактным условиям на межфазных границах для многослойных включений сферической и цилиндрической формы. Количество степеней свободы совпадает с числом независимых гармонических полиномов максимальной степени N . Для плоских задач оно равно $2(2N+1)$, для пространственных – $3(N+1)^2$. Эта система функций была реализована в программном пакете UWay [29], используется для точного решения задачи на ячейке (1)-(3) с краевыми условиями (7)-(9), и позволяет с высокой степенью точности аппроксимировать локальные поля напряжений в окрестности включений и эффективно вычислять ортотропные характеристики дисперсных и волокнистых композитных материалов.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА ЯЧЕЙКЕ

Система функций, построенная выше, является фактически Т-полной системой функций (в смысле [30]): она аналитически точно удовлетворяет исходной системе уравнений, а полноту ей обеспечивает полиномиальная асимптотика (12) на бесконечности. Следовательно, аппроксимация решений задачи на ячейке может быть осуществлена в рамках метода Треффтца [18,31,32], который, как известно, является вариантом метода Ритца [31,32] на системе функций (полиномов), аналитически точно удовлетворяющих исходному уравнению.

В связи с этим рассмотрим потенциальную энергию напряженно-деформированного состояния упругого тела, образующую квадратичный функционал, аналогичный интегралу Дирихле в классическом методе Треффтца

$$E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_G \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dG = \frac{1}{2} \int_G c_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dG. \quad (32)$$

Здесь σ_{ij} – напряжения, ε_{ij} – деформации, c_{ijkl} – тензор жесткости, имеющий для изотропного тела следующий вид: $c_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}$, μ и λ – параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера. И рассмотрим соответствующую квадратичному функционалу (32) билинейную форму

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \int_G \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} dG = \int_G c_{ijkl} u_{i,j} u'_{k,l} dG.$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса для всех перемещений $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$, удовлетворяющих исходному уравнению, выполняется интегральное соотношение Грина

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \int_{\partial G} (\sigma_n(\mathbf{u}) u'_n + \tau_s(\mathbf{u}) u'_s) d(\partial G) = \int_{\partial G} (\sigma_n(\mathbf{u}') u_n + \tau_s(\mathbf{u}') u_s) d(\partial G),$$

где $\sigma_n(\mathbf{u})$ – нормальная составляющая поверхностных напряжений, $\tau_s(\mathbf{u})$ – касательная составляющая поверхностных напряжений.

Представим эту билинейную форму для задачи на ячейке в форме, соответствующей ее граничным условиям (7)-(9)

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \sum_j \int_{S_j} (\sigma_n(\mathbf{u}) u'_n + \tau_s(\mathbf{u}') u_s) dS \quad (33)$$

для задачи с краевыми условиями (7) аналогично для задачи с краевыми условиями (8), (9), т.е. мы выделяем на границе ту компоненту перемещений и напряжений, для которой задается краевое условие.

В методе Треффтца билинейная форма (33) рассматривается как скалярное произведение, соответствующее согласно (32) энергетической норме $\|\mathbf{u}\|_E = W(\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$, в которой осуществляется аппроксимация точного решения $\mathbf{u}_0$ на полной системе функций $\{\mathbf{u}_k\}$, точно удовлетворяющих исходным уравнениям, $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_E \rightarrow 0$. Поскольку $W(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ является квадратичным функционалом, то сходимость по норме эквивалентна проекционной схеме Бубнова-Галеркина на аппроксимирующей системе функций $\mathbf{u}_k$

$$W(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_k) = 0, \quad \mathbf{u}(P) = \sum_k a_k \mathbf{u}_k(P), \quad P \in G. \quad (34)$$

Отметим, что билинейная форма $W(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ является псевдоскалярным произведением, т.к. для нее не выполняется аксиома коммутативности $W_k(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \neq W_k(\mathbf{u}', \mathbf{u})$. Однако, несмотря на это, проекционная схема Бубнова-Галеркина (34) остается в силе и обеспечивает сходимость приближенного решения к точному, приводя к выполнению граничных условий с высокой степенью точности.

Реализация схемы аппроксимации (34) на Т-полной системе функций (11), (12), (31) приводит к плотно заполненной несимметричной системе линейных алгебраических уравнений $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{H}$ относительно неизвестных коэффициентов, которая эффективно решается без потери точности при помощи сингулярных разложений $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$ (см. [33]), где $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ – ортогональные матрицы, $\mathbf{D}$ – диагональная матрица сингулярных чисел, и дает эффективный инструмент для решения в аналитическом виде задачи на ячейке в случае многослойных включений сферической или цилиндрической формы.

Решения этой системы уравнений (системы уравнений Треффтца) обладают рядом полезных свойств: 1) при нахождении главных значений матрицы жесткости все три компоненты $\hat{C}_{11}$, $\hat{C}_{22}$ и $\hat{C}_{33}$ (и соответствующие компоненты тензора концентрации напряжений) определяются на основе одной и той же матрицы Треффтца $\mathbf{A}$; 2) для эффективных характеристик в сечении волокнистого материала модуль сдвига $\hat{G}_{12}$ определяется на основе той же матрицы Треффтца, что и $\hat{C}_{11}$, $\hat{C}_{22}$, $\hat{C}_{33}$; 3) остальные сдвиговые компоненты $\hat{G}_{13}$ и $\hat{G}_{23}$ определяются на основе решения вспомогательной задачи с дополнительной матрицей Треффтца.

Таким образом, при реализации решений задачи на ячейке методом Треффтца количество решаемых задач уменьшается: для волокнистых материалов их надо решать всего две вместо шести, а для дисперсных материалов – четыре. Этот результат справедлив для включений произвольной формы, произвольным образом располагающихся внутри ячейки параллелепипедной формы. Это предопределяет эффективность метода Треффтца для анализа композитных материалов с учетом локальной концентрации напряжений.

Представленный здесь алгоритм был реализован в программном пакете Uway [29].

3. ГРАДИЕНТНЫЙ МЕЖФАЗНЫЙ СЛОЙ

На основе аналитического решения задачи Эшелби (11), (12), (31) можно смоделировать градиентный межфазный слой с переменными характеристиками. Для этого при аналитическом решении задачи Эшелби разобьем межфазный слой на N частей с кусочно-постоянными характеристиками $E_L(r)$ (см. рис.2). В настоящей статье принята градиентная модель межфазного слоя следующего вида с параметром градиентности m

$$E_L(r) = E_I + (E_M - E_I) \left(\frac{r - r_0}{L} \right)^{1/m}, \quad m \geq 1, \quad (35)$$

где E_M – модуль Юнга матрицы, E_I – модуль Юнга включений; коэффициент Пуассона ν_L будем полагать постоянным для всего межфазного слоя. Здесь

r_0 – радиус включений, L – ширина межфазного слоя, m – «степень градиентности». При увеличении m среднее значение модуля Юнга приближается к значению модуля Юнга для матрицы

$$\tilde{E}_L = \frac{1}{L} \int_{r_0}^{r_1} \left[E_I + (E_M - E_I) \left(\frac{r - r_0}{L} \right)^{1/m} \right] dr = E_I + \frac{m(E_M - E_I)}{m+1}. \quad (36)$$

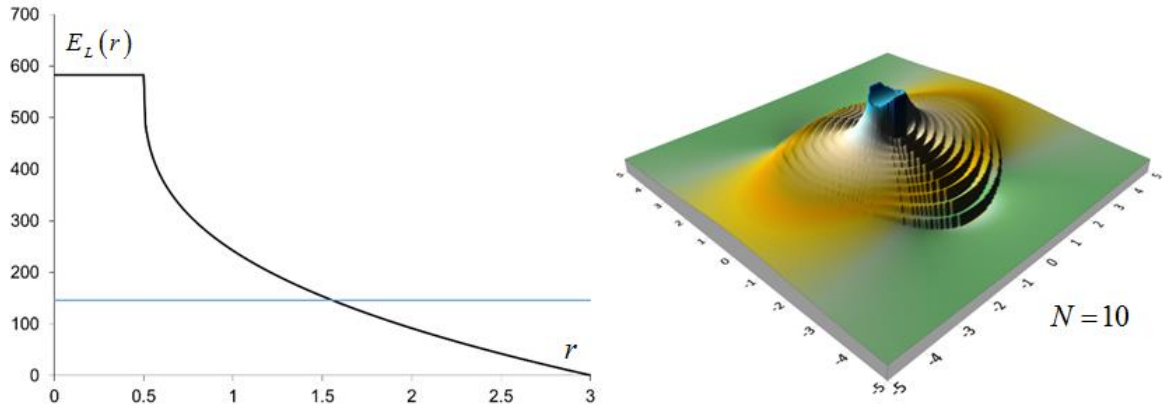


Рис.2. Градиентная модель межфазного слоя при $m = 3$ и решение задачи Эшелби с кусочно-постоянными характеристиками при разбиении межфазного слоя на $N = 10$ частей; $E_I = 583$ ГПа.

При достаточно большом разбиении погрешности скачкообразного разбиения межфазного слоя становятся незаметными. На рис.3 приведено распределение компоненты σ_1 тензора напряжений при одноосном напряженно-деформированном состоянии в случае разбиения на $N=100$ частей по градиентной модели (35) и при разбиении на $N=1$ со средними характеристиками (36). Наблюдается существенная разница в поведении локальных напряжений во включении и в матрице. Этот рисунок демонстрирует сильную зависимость картины концентрации локальных напряжений в зависимости от учета изменчивости характеристик межфазного слоя.

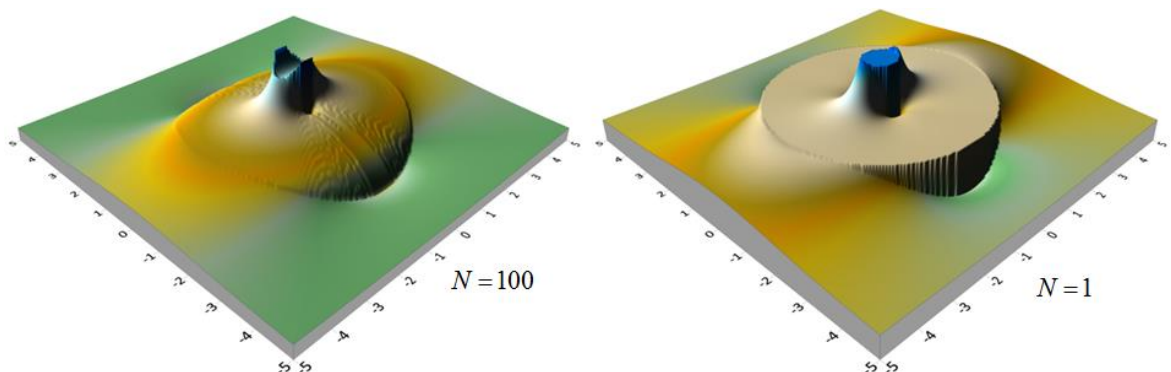


Рис.3. Распределение локальных напряжений в задаче Эшелби с кусочно-постоянными характеристиками при разбиении межфазного слоя на $N = 100$ частей с градиентными характеристиками при $m = 3$ и при постоянном значении со средними характеристиками $E_L = 146.3$ ГПа; $E_I = 583$ ГПа, $E_M = 0.71$ ГПа.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

4.1. Зависимость модулей жесткости от объемной концентрации без межфазного слоя.

На рис.4 приведен пример расчета модулей жесткости для эпоксидной смолы $E_M = 2.8$ ГПа, $\nu_M = 0.35$, наполненной стеклянными шариками $E_I = 71$ ГПа, $\nu_I = 0.23$ в зависимости от объемной доли наполнения c_0 . В этой модели было принято, что ячейка периодичности имеет единичные размеры $L_1 = L_2 = L_3 = 1$, и при увеличении радиуса включений, после объемной доли $c_0 = 0.524$, при которой происходит касание сферических частиц наполнителя, они постепенно заполняют все пространство, пересекаясь и сохраняя сферическую форму. Объемная доля в этом случае вычисляется по следующей формуле в зависимости от радиуса включений

$$c_0(r) = \frac{4\pi r^3}{3} - \frac{\pi(2r-1)^2(4r+1)}{4}, \quad 0.5 < r \leq 0.5\sqrt{2}. \quad (37)$$

На левом рис.4 представлены эффективные значения модуля Юнга $\hat{E} = \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = \hat{E}_3$, модуля сдвига $\hat{G} = \hat{G}_{12} = \hat{G}_{13} = \hat{G}_{23}$ и объемного модуля $\hat{K} = (\hat{C}_{11} + \hat{C}_{12} + \hat{C}_{13})/3$ в зависимости от объемной доли c_0 , на правом рис.4 дана зависимость коэффициента Пуассона $\hat{\nu} = \hat{\nu}_{12} = \hat{\nu}_{21} = \hat{\nu}_{13} = \hat{\nu}_{31} = \hat{\nu}_{23} = \hat{\nu}_{32}$ от объемной доли включений. В данном случае, когда межфазный слой отсутствует и включение сферической формы расположено в центре ячейки периодичности, ортотропный материал характеризуется тремя независимыми модулями $\hat{E}$, $\hat{G}$ и $\hat{\nu}$. Отметим точку минимума для коэффициента Пуассона при $c_0 = 0.5547$, что соответствует началу пересечения сферических частиц наполнителя ($r = 0.51$) и заполнению всего пространства. Это говорит о том, что материал при таких объемных долях наполнения может иметь меньшую сжимаемость, чем исходная матрица. Этот эффект объясняется дополнительной концентрацией напряжений между частицами при их сближении.

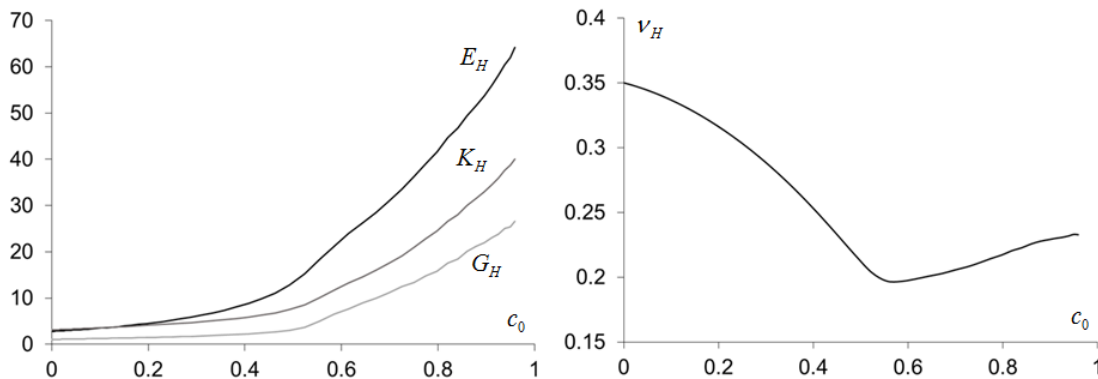


Рис.4. Эффективные модули жесткости для дисперсного композита в зависимости от объемной доли наполнения; $E_I = 71$ ГПа, $E_M = 2.8$ ГПа, $\nu_I = 0.23$, $\nu_M = 0.35$.

На рис.5 приведено сравнение результатов расчета по аналитическому алгоритму с результатами оценки эффективных характеристик по хорошо

известной модели трех сферических тел Эшелби-Кристенсена [6]. Как видим, объемный модуль (левый рис.5) очень хорошо совпадает с результатами расчетов вплоть до 40% объемного наполнения (когда частицы еще слабо взаимодействуют между собой), далее начинается сильное расхождение с оценкой Эшелби-Кристенсена, объясняемое нарастанием концентрации между частицами и общей перестройкой всего пространства композитного материала. Однако, в оценке модуля Юнга (правый рис.5) расхождение начинается гораздо раньше, уже с 20% объемного наполнения, несмотря на то, что взаимное влияние между частицами пока практически отсутствует.

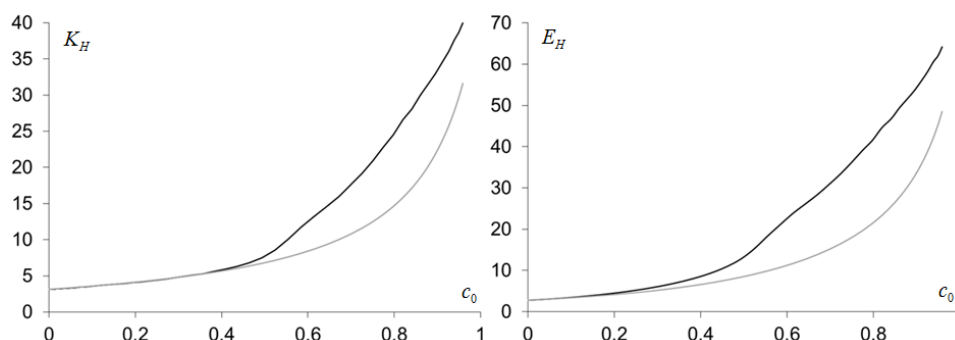


Рис.5. Сравнение эффективных значений объемного модуля K_H и модуля Юнга E_H для дисперсного композита (жирная линия) с оценкой по модели трех тел Эшелби-Кристенсена [6] (тонкая линия); $E_I = 71$ ГПа, $E_M = 2.8$ ГПа, $\nu_I = 0.23$, $\nu_M = 0.35$.

4.2. Локальная концентрация при одноосном напряженно-деформируемом состоянии.

На рис.6 представлена компонента $\sigma_1^{(1,1)}$ тензора концентрации напряжений, соответствующая одноосному растяжению композитного материала; здесь $E_I = 71$ ГПа, $E_M = 2.8$ ГПа, $\nu_I = 0.23$, $\nu_M = 0.35$, $c_0 = 0.18$ ($r = 0.35$).

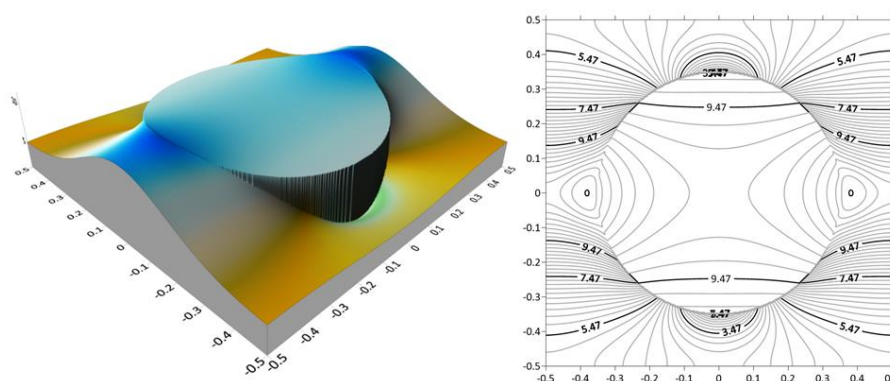


Рис.6. Поверхность и линии уровня компоненты $\sigma_1^{(1,1)}$ вектор-столбца тензора напряжений в среднем сечении $z = 0$ с максимальным значением напряжений вблизи границы включения.

Для нее характерна локальная концентрация напряжений, возникающая в матрице вблизи границы, но не на границе включения. Этот эффект объясняется

сжимаемостью материала матрицы в поперечном направлении при растяжении, и пропадает для материалов с $\nu_M = 0$ (см. рис.7).

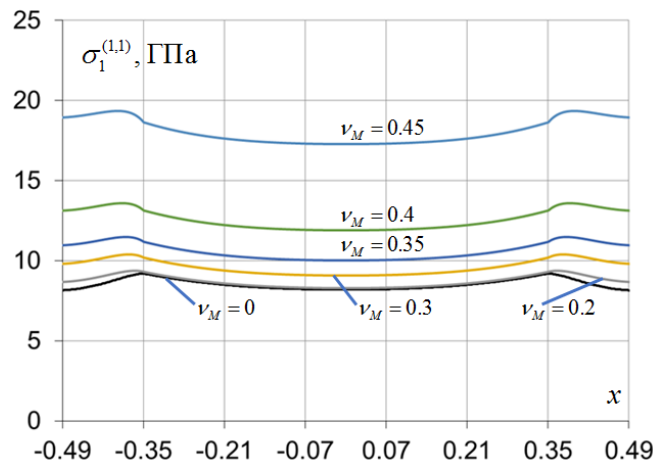


Рис.7. Локальный максимум в распределении компоненты $\sigma_1^{(1,1)}$ тензора концентрации напряжений в зависимости от сжимаемости ν_M матрицы на линии $y = z = 0$; остальные параметры $E_M = 2.8$ ГПа, $E_I = 71$ ГПа, $\nu_I = 0.23$.

Особенности распределения тензора концентрации напряжений предопределяют характер разрушения композитного материала на микроуровне. В данном случае максимум напряжений находится не на границе включений, а на некотором небольшом расстоянии в матрице, откуда и будет начинаться разрушение материала.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ МАСШТАБНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ АГГРЕГАЦИИ ЧАСТИЦ

5.1. Экспериментальные исследования.

Проанализируем результаты экспериментальных исследований, полученные авторами работы [34], где в качестве нанонаполнителя были использованы многослойные углеродные нанотрубки (МУНТ), имеющие диаметр 16.6 ± 3.9 нм и длину 1.20 ± 0.6 мкм. Указанные МУНТ функционализировались группами –ОН для получения смеси с полиметилметакрилатом (ПММА).

Для испытания синтезированных нанокомпозитов ПММА/МУНТ использовались образцы в виде полос размером 10×2.5 мм [34]. Механические испытания на одноосное растяжение выполнялись на приборе Zwick модели Z100 при температуре 293°K и скорости деформации $\sim 10^{-3} \text{ с}^{-1}$; экспериментальные данные представлены в Таблице 1. Значения объемной доли МУНТ для образцов нанокомпозитов ПММА/МУНТ рассчитывались по формуле [34]

$$\varphi_I = \left[1 + \frac{\rho_I}{\rho_M} \frac{1 - W_I}{W_I} \right]^{-1}, \quad (38)$$

где φ_I , W_I – объемное и массовое содержание нанонаполнителя в полимерном композите, $\rho_I = \rho_{NT}$, ρ_M – плотность нанонаполнителя и полимерной матрицы,

соответственно.

Заметим, что формулу (38) легко получить из следующих очевидных соотношений

$$\rho_C = \varphi_I \rho_I + \varphi_M \rho_M, \quad \varphi_I = \frac{\rho_C}{\rho_I} W_I,$$

где ρ_C – плотность нанокомпозита, а φ_M – объёмная доля матрицы.

Для определения объёмной доли МУНТ использовались [34] значения плотности ρ_I , которые принимались равными плотности отдельной нанотрубки $\rho_{NT} = 2150 \text{ кг/м}^3$, плотность полимера ПММА принималась равной $\rho_M = 1300 \text{ кг/м}^3$: значения плотностей отдельной нанотрубки и полимера были взяты из работы [35].

Таблица 1.

Модули упругости нанокомпозитов ПММА/МУНТ в зависимости от массового содержания и объёмной доли МУНТ.

Массовое содержание МУНТ, %	0.0	0.0331	0.0661	0.1322	0.2478	0.4952	0.9884
Объёмное содержание МУНТ, относительная доля	0.0	0.0002	0.0004	0.0008	0.0015	0.0030	0.0060
Модуль упругости нанокомпозитов, ГПа	0.71	0.94	1.05	1.26	1.38	0.75	1.04

Как видим из Таблицы 1, значительное увеличение модуля упругости наблюдалось при добавлении нанотрубок до $\sim 0.25 \text{ мас.}\%$. Далее, при увеличении содержания нанотрубок до $\sim 0.5 \text{ мас.}\%$ наблюдается переходная зона с минимальным значением модуля упругости в районе $0.5 \text{ мас.}\%$, после чего начинается рост его значений. При этом эффективное армирование, как это указано в статье [34], наблюдалось только до объёмного содержания нанотрубок приблизительно равного 0.001, после чего начинался процесс агрегации нанотрубок, которые при достижении массового содержания $\sim 0.5\%$, возможно, достигают уровня насыпной плотности. Отметим, что насыпную плотность можно оценить, воспользовавшись следующей аналитической зависимостью [36,37]

$$\rho_{NR} = 188 \sqrt[3]{D_{CNT}}, \quad (39)$$

где D_{CNT} – базовый размер исходных частиц нанонаполнителя в нм.

Для углеродных нанотрубок базовым размером является их наружный диаметр. В рассматриваемом случае он принимался равным $D_{CNT} = 16.6 \text{ нм}$ [34].

Таким образом, плотность частиц нанонаполнителя в соответствии с (39) будет равна $\rho_{NR} = 479.6 \text{ кг/м}^3$. Полученное значение очень хорошо согласуется со значениями насыпной плотности нанотрубок, которые указаны в [38], а также в материалах производителей нанотрубок [39,40]; они могут принимать значения в диапазоне от 110 кг/м^3 до 600 кг/м^3 .

5.2. Оценка геометрических параметров и деформационных свойств нанонаполнителя.

Оценивая объёмное содержание межфазной области, ее размер можно

определить из перколяционного соотношения [36,37,41]

$$\frac{E_C}{E_M} = 1 + 11(\varphi_I + \varphi_L)^{1.7}, \quad (40)$$

где E_C и E_M – модули упругости нанокompозита и матричного полимера, соответственно, ($E_M = 0.71$ ГПа), φ_L – относительное содержание межфазных областей.

По известным модулям упругости нанокompозитов и матричного полимера, а также относительному объемному содержанию МУНТ из Таблицы 1 в соответствии с (40) было определено относительное содержание межфазных областей.

Для оценки модуля упругости агрегатов, образованных нанотрубками, воспользуемся фрактальной моделью, предложенной в работе [42], в соответствии с которой модуль упругости агрегатов дисперсного нанонаполнителя определяется по формуле

$$E_I = E_{NT} \left(\frac{a}{R_I} \right)^{d+C}, \quad (41)$$

где E_{NT} – модуль упругости нанонаполнителя (нанотрубки), a – размер исходных частиц нанонаполнителя, R_I – радиус их агрегатов, $d = 3$ – размерность евклидова пространства, C – показатель степени связности ($C \approx 1.0$, согласно работе [42]).

В случае углеродных нанотрубок радиус их агрегатов можно оценить в соответствии со следующей формулой (см. [43])

$$R_I = 15\varphi_I^{-1/(d-D_f)}, \quad (42)$$

где фрактальная размерность $D_f \approx 1,8$, см. [42].

Заметим, что модуль упругости на растяжение углеродных нанотрубок может принимать значения от 1000 ГПа [44] до 2000 ГПа [45]; в работе [34] оно полагалось в пределах 1564 ± 140 ГПа. В расчетах по аналитической модели в настоящей статье будем считать, что $E_{nt} = 1564$ ГПа.

На основе зависимостей (41) и (42) были получены модули упругости агрегатов, образованных нанотрубками; их значения представлены в Таблице 2.

Таблица 2.

Модули упругости агрегатов и нанокompозитов ПММА/МУНТ в зависимости от массового содержания и объемной доли МУНТ.

Массовое содержание МУНТ, %	0.0	0.0331	0.0661	0.1322	0.2478	0.4952	0.9884
Объемное содержание МУНТ, относительная доля	0.0	0.0002	0.0004	0.0008	0.0015	0.0030	0.006
Модуль упругости частиц наполнителя, ГПа	–	1564	1564	1564	1564	51.5	583
Модуль упругости нанокompозитов, ГПа	$\frac{0.71}{0.71}$	$\frac{0.940}{0.938}$	$\frac{1.050}{1.047}$	$\frac{1.260}{1.257}$	$\frac{1.380}{1.379}$	$\frac{0.750}{0.751}$	$\frac{1.040}{1.038}$
Эксперимент/расчет							

5.3. Численное моделирование.

В численных расчетах была принята градиентная модель межфазного слоя (35), (36). Аналитическое решение (31) для задачи Эшелби (11), (12) строилось при разбиении исходного межфазного слоя на 40 одинаковых частей со значениями модуля Юнга из формулы (35), взятыми в середине каждого подслоя. Эффективные характеристики рассчитывались по аналитико-численному алгоритму настоящей статьи для нескольких моделей: со сферическим, цилиндрическим включением, с градиентным и с постоянным межфазным слоем со средним значением модуля Юнга (36). Были приняты следующие значения коэффициента Пуассона для матрицы, включений и межфазного слоя: $\nu_M = 0.38$, $\nu_I = 0.21$, $\nu_L = 0.4$. Результаты расчетов представлены в Таблице 3.

Таблица 3.

Результаты расчетов по аналитической модели.

Объемное содержание МУНТ, относительная доля	0.0002	0.0004	0.0008	0.0015	0.0030	0.006
Относительное содержание межфазных областей	0.1254	0.1577	0.2090	0.2343	0.0419	0.1229
Степень градиентности для аналитической модели	72	46	25	20	53	19
Модуль упругости сферическая градиентная модель, ГПа	0.9385	1.0468	1.2565	1.3790	0.7513	1.0382
Модуль упругости сферическая модель с усредненным слоем, ГПа	1.0165	1.1335	1.3511	1.4760	0.7630	1.0823
Модуль упругости цилиндрическая градиентная модель, ГПа	0.9845	1.1544	1.2762	1.3767	0.7831	1.0995
Модуль упругости цилиндрическая модель с усредненным слоем, ГПа	1.0461	1.0923	1.3366	1.4361	0.7927	1.1299

Как видим, не учитывающая градиентность межфазного слоя аналитическая модель дает более высокие значения эффективных характеристик. Отметим также, что цилиндрическая модель при одних и тех же условиях также дает завышенные результаты по сравнению с моделью сферических включений. Тем не менее, стоит отметить, что все полученные расчетом значения эффективных характеристик лежат в допустимых пределах (см. [34]) разброса определения экспериментальных данных (см. рис.8).

На рис.8 представлен график зависимости эффективного модуля Юнга композитного материала ПММА/МУНТ от объемной концентрации МУНТ, полученной расчетом, для сферической модели наполнителя с градиентным межфазным слоем. Из экспериментальных исследований следует, что зависимость эффективного модуля Юнга полимерного композитного материала ПММА/МУНТ от объемной концентрации МУНТ имеет два локальных максимума аномальных значений (усиления) деформационных свойств и локальный минимум между ними, где значения модулей близки к значениям модулей матрицы. Это подтверждается расчетами по аналитической модели с градиентным

межфазным слоем. Наличие двух локальных максимумов не описывается в рамках классических моделей теории упругости (значения эффективного модуля Юнга лежат вне вилки Фойгта-Рейсса, и при этом существенно выше верхних значений оценки Фойгта). Все эти эффекты прекрасно воспроизводятся с использованием метода асимптотического усреднения, математически точно учитывающего структуру материала. Следует отметить, что наличие двух локальных максимумов (областей усиления композитов) и локального минимума между ними, где практически отсутствует усиление, следует иметь в виду при производстве и проектировании композитных материалов со сверхмалой объемной долей нанонаполнителя.

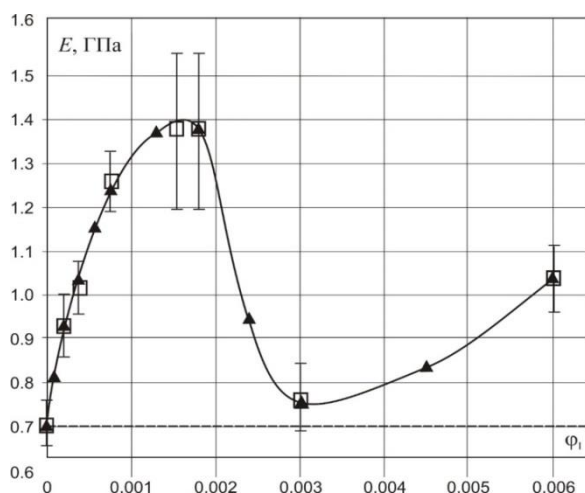


Рис.8. График зависимости эффективного модуля Юнга от объемной концентрации МУНТ в модели асимптотического усреднения с градиентным межфазным слоем (сплошные треугольники – расчет, полые квадратики – эксперимент).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан аналитический подход к решению задачи на ячейке в методе асимптотического усреднения Бахвалова, позволяющий с высокой степенью точности определять эффективные характеристики композитных материалов.

В случае если ячейка периодичности обладает симметрией расположения включений, где периодическая структура материала получается путем отражения включений, которые могут быть произвольной формы, относительно всех граней параллелепипеда, являющихся границей ячейки, то такая симметрия индуцирует ортотропию свойств материала и задача сводится к краевой задаче с условиями симметричного/антисимметричного отражения отдельных компонент перемещений.

Для волокнистых и дисперсных материалов, где ячейка периодичности представляет собой параллелепипед с включением цилиндрической или сферической формы с промежуточным межфазным слоем, который может иметь сложно изменяющиеся градиентные характеристики, разработана обобщенная схема Треффтца, основанная на аналитическом представлении перемещений с помощью вспомогательных потенциалов, удовлетворяющих уравнению Лапласа. При этом за счет точного удовлетворения исходному уравнению и граничным условиям на межфазных границах сферической

или цилиндрической формы, задача минимизации функционала энергии сводится к плотно заполненной системе уравнений, которая обеспечивает необходимые краевые условия на границе ячейки.

Разработанная в данной статье обобщенная аналитическая схема позволяет получать точное аналитическое решение задачи на ячейке периодичности и не только определить все модули ортотропного материала, но и оценить концентрацию напряжений на локальном уровне вблизи включений, что очень важно для расчета прочностных характеристик волокнистых и дисперсных материалов. Эта схема была применена для моделирования аномальных свойств полиметилметакрилатов, наполненных многослойными углеродными нанотрубками, а также приведены примеры нетривиального поведения локальной концентрации напряжений и оценки областей применимости инженерных методов расчета жесткостных характеристик композитных материалов методом Эшелби-Кристенсена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mori T., Tanaka K. *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions* // Acta Metall. – 1973. – Vol.21. – No.5. – Pp.571-574.
2. Eshelby J. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems* // Proc. R. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci. – 1957. – Vol.241. – No.1226. – Pp.376-396.
3. Takayanagi M., Uemura S., Minami S. *Application of equivalent model method to dynamic rheo-optical properties of crystalline polymer* // J. Polymer Sci. Part C: Polymer Symposia. – 1964. – Vol.5. – No.1. – Pp.113-122.
4. Halpin J., Kardos J. *The Halpin-Tsai equations: a review* // Poly. Eng. Sci. – 1976. – Vol.16. – No.5. – Pp.344-352.
5. Шермегор Т.Д. *Теория упругости микронеоднородных сред*. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
6. Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
7. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
8. Бахвалов Н.С. *Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами* // Доклады АН СССР. – 1975. – Т.221. – №3. – С.516-519.
9. Власов А.Н., Мерзляков В.П. *Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород*. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.
10. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodsky D.B. *Application of the asymptotic homogenization in a parametric space to the modeling of structurally heterogeneous materials* // J. Comput. Appl. Math. – 2021. – Vol.390. – 113191.
11. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. – М.: Издательство Московского университета, 1984. – 336 с.
12. Батэ К., Вилсон Е. *Численные методы анализа и метод конечных элементов*. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
13. Toupin R.A. *Elastic materials with couple stresses* // Arch. Rational Mech. Anal. – 1962. – Vol.11. – Pp.385-414.
14. Mindlin R.D. *Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity* // Int. J. Solids Struct. – 1965. – Vol.1. – Pp.417-438.

15. Papkovitch P.F. *Solution générale des équations différentielles fondamentales de l'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques* // C.R. Acad. Sci., Paris. – 1932. – Vol.195. – Pp.513-515.
16. Neuber H. *Ein neuer ansatz zur losung raumlicher probleme der elastizitatstheorie* // ZAMM. – 1934. – Vol.14. – No.4. – Pp.203-212.
17. Doyle J.M. *A general solution for strain-gradient elasticity theory* // J. Math. Anal. Appl. – 1969. – Vol.27. – Pp.171-180.
18. Trefftz E. *Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren* / Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech. Zurich. – 1925. – Pp.131-137.
19. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
20. Мальцев И.А. *Основы линейной алгебры*. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
21. Volkov-Bogorodskiy D.B. *Development Trefftz method for problems of nonhomogeneous media* // Lobachevskii J. Math. – 2024. – Vol.45. – No.5. – Pp.2429-2437.
22. Эшелби Дж. *Континуальная теория дислокаций*. – М.: ИЛ, 1963. – 248 с.
23. Christensen R.M., Lo K.H. *Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models* // J. Mech. Phys. Solids. – 1979. – Vol.27. – Pp.315-330.
24. Hervé E., Zaoui A. *Elastic behavior of multiply coated fiber reinforced composites* // Int. J. Eng. Sci. – 1995. – Vol.33. – No.10. – Pp.1419-1433.
25. Volkov-Bogorodskiy D.B. *Structural analysis in the problems of gradient elasticity* // Lobachevskii J. Math. – 2023. – Vol.44. – No.5. – Pp.2480-2500.
26. Papkovitch P.F. *Solution générale des équations différentielles fondamentales de l'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques* // C.R. l'Académie des Sci., Paris. – 1932. – Vol.195. – Pp.513-515.
27. Neuber H. *Ein neuer ansatz zur losung raumlicher probleme der elastizitatstheorie* // ZAMM. – 1934. – Vol.14. – No.4. – Pp.203-212.
28. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул*. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
29. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Мнушкин М.Г. *Программный комплекс «UWay». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. № 2011611833, 28 февраля, 2011 г.*
30. Zielinski A.P., Zienkiewicz O.C. *Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions* // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1985. – Vol.21. – Pp.509-528.
31. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений. Том 2*. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 620 с.
32. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
33. Голуб Дж., Лоун Ч. Ван. *Матричные вычисления*. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
34. Blond D., Barron V., Ruether M., Ryan K.P., Nicolosi V., Blau W.J., Coleman J.N. *Enhancement of modulus strength, and toughness in poly(methyl methacrylate)-based composites by the incorporation of poly(methyl methacrylate)-functionalized nanotubes* // Adv. Funct. Mater. – 2005. – Vol.16. – No.15. – Pp.1608-1614.
35. Qian D., Dickey E.C., Andrews R., Rantell T. *Load transfer and deformation mechanisms in carbon nanotube-polystyrene composites* // Appl. Phys. Lett. – 2000. – Vol.75. – Pp.2868-2870.

36. Mikitaev A.K., Kozlov G.V., Zaikov G.E. *Polymer Nanocomposites: Variety of Structural Forms and Applications*. – N.Y.: Nova Science Publishers, 2008. – 319 p.
37. Dolbin I.V., Karnet Yu.N., Kozlov G.V., Vlasov A.N. *Mechanism of growth of interfacial regions in polymer/carbon nanotube nanocomposites* // *Comp. Mech. Comput. Appl. Int. J.* – 2019. – Vol.10. – No.3. – Pp.213-220.
38. Першина С.В., Белогубцев С.Ф., Федоткин И.В. *Насыпная плотность углеродных наноматериалов* // *Международный студенческий научный вестник*. – 2015. – №3 (часть 2). – С.207-208.
39. Ткачев А.Г. и др. *Углеродные наноматериалы серии «Таунит»: Производство и применение* // *Химия и химич. технология*. – 2013. – Т.56. – Вып.4. – С.55-59.
40. Хузин А.Ф. и др. *Диспергируемость глобул многослойных углеродных нанотрубок различных производителей* // *Изв. КГАСУ. Строительные материалы и изделия*. – 2015. – Т.33. – №3. – С.164-171.
41. Kozlov G.V., Dolbin I.V., Karnet Yu.N., Vlasov A.N. *Relationship between the applied stress transfer and the nanofiller aggregation level for polymer/nanocomposites* // *Comp. Mech. Comp. Appl. Int. J.* – 2020. – Vol.11. – No.2. – Pp.129-135.
42. Witten T.A., Rubinstein M., Colby R.H. *Reinforcement of rubber by fractal aggregates* // *J. Phys. II France*. – 1993. – Vol.3. – No.3. – Pp.367-383.
43. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Корнев Ю.В. *Влияние углеродных добавок на механические характеристики эпоксидного связующего* // *Известия РАН. МТТ*. – 2020. – №3. – С.92-103.
44. Moniruzzaman M., Winey K.I. *Polymer nanocomposites containing carbon nanotubes* // *Macromolecules*. – 2006. – Vol.39. – No.16. – Pp.5194-5205.
45. Schaefer D.W., Justice R.S. *How are nanocomposites* // *Macromolecules*. – 2007. – Vol.40. – No.24. – Pp.8501-8517.

REFERENCES

1. Mori T., Tanaka K. *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*. *Acta Metall.*, 1973, Vol.21, No.5, Pp.571-574.
2. Eshelby J. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*. *Proc. R. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci.*, 1957, Vol.241, No.1226, Pp.376-396.
3. Takayanagi M., Uemura S., Minami S. *Application of equivalent model method to dynamic rheo-optical properties of crystalline polymer*. *J. Polymer Sci. Part C: Polymer Symposia*, 1964, Vol.5, No.1, Pp.113-122.
4. Halpin J., Kardos J. *The Halpin-Tsai equations: a review*. *Poly. Eng. Sci.*, 1976, Vol.16, No.5, Pp.344-352.
5. Shermegor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [Theory of elasticity of micro-inhomogeneous media.]*. Moskva, Nauka, 1977, 400 p.
6. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, Wiley, 1979, 348 p.
7. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Homogenisation: averaging processes in periodic media: mathematical problems in the mechanics of composite materials*. Dordrecht, Boston, Kluwer Academic Publishers, 1989, 366 p.
8. Bakhvalov N.S. *Osrednenie differentsial'nykh uravnenij s chastnymi proizvodnymi s bystro ostsilliruyushhimi koehffitsientami [Averaging of partial differential*

equations with rapidly oscillating coefficients]. Doklady AN SSSR, 1975, Vol.221, No.3, Pp.516-519.

9. Vlasov A.N., Merzliakov V.P. *Usrednenie deformatsionnykh i prochnostnykh svoystv v mekhanike skal'nykh porod* [Homogenization of deformation and strength properties in rock mechanics]. Moskva, Izdatel'stvo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2009, 208 p.
10. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodsky D.B. *Application of the asymptotic homogenization in a parametric space to the modeling of structurally heterogeneous materials*. J. Comput. Appl. Math., 2021, Vol.390, 113191.
11. Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1984, 336 p.
12. Bathe K.-J., Wilson E.L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice Hall, 1976, 528 p.
13. Toupin R.A. *Elastic materials with couple stresses*. Arch. Rational Mech. Anal., 1962, Vol.11, Pp.385-414.
14. Mindlin R.D. *Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity*. Int. J. Solids Struct., 1965, Vol.1, Pp.417-438.
15. Papkovitch P.F. *Solution générale des équations différentielles fondamentales de l'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques*. C.R. Acad. Sci., Paris. 1932, Vol.195, Pp.513-515.
16. Neuber H. *Ein neuer ansatz zur losung raumlicher probleme der elastizitatstheorie*. ZAMM, 1934, Vol.14, No.4, Pp.203-212.
17. Doyle J.M. *A general solution for strain-gradient elasticity theory*. J. Math. Anal. Appl., 1969, Vol.27, Pp.171-180.
18. Trefftz E. *Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren*. Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech. Zurich, 1925, Pp.131-137.
19. Lekhnitskii S.G. *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Mir Publishers, 1981, 430 p.
20. Mal'cev I.A. *Osnovy lineijnoj algebrы* [Fundamentals of Linear Algebra]. Moskva, Nauka, 1970, 400 p.
21. Volkov-Bogorodskiy D.B. *Development Trefftz method for problems of nonhomogeneous media*. Lobachevskii J. Math., 2024, Vol.45, No.5, Pp.2429-2437.
22. Eshelby J.D. *The Continuum Theory of Lattice Defects*. Solid State Physics, 1956, Vol.3, Pp.79-144.
23. Christensen R.M., Lo K.H. *Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models*. J. Mech. Phys. Solids, 1979, Vol.27, Pp.315-330.
24. Hervé E., Zaoui A. *Elastic behavior of multiply coated fiber reinforced composites*. Int. J. Eng. Sci., 1995, Vol.33, No.10, Pp.1419-1433.
25. Volkov-Bogorodskiy D.B. *Structural analysis in the problems of gradient elasticity*. J. Math., 2023, Vol.44, No.5, Pp.2480-2500.
26. Papkovitch P.F. *Solution générale des équations différentielles fondamentales de l'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques*. C.R. l'Académie des Sci., Paris, 1932, Vol.195, Pp.513-515.
27. Neuber H. *Ein neuer ansatz zur losung raumlicher probleme der elastizitatstheorie*. ZAMM, 1934, Vol.14, No.4, Pp.203-212.
28. Sobolev S.L. *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul* [Introduction to the theory of cubature formulas]. Moskva, Nauka, 1974, 808 p.

29. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskij D.B., Mnushkin M.G. *Programmnyj kompleks "UWay" [Software "UWay"]*. Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registratsii programmy dlya EhVM. Federal'naya sluzhba po intellektual'noj sobstvennosti, patentam i tovarnym znakam. №2011611833, 28 fevralya, 2011 g.
30. Zielinski A.P., Zienkiewicz O.C. *Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions*. Int. J. Num. Meth. Eng., 1985, Vol.21, Pp.509-528.
31. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychislenij. Tom 2 [Methods of calculations. Volume two.]*. Moskva, GIFML, 1959, 620 p.
32. Mihlin S.G. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike [Variational methods in mathematical physics]*. Moskva, Nauka, 1970, 512 p.
33. Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix Computations*. Baltimore, Johns Hopkins University Press, 1983, 694 p.
34. Blond D., Barron V., Ruether M., Ryan K.P., Nicolosi V., Blau W.J., Coleman J.N. *Enhancement of modulus strength, and toughness in polymethyl methacrylate-based composites by the incorporation of polymethyl methacrylate-functionalized nanotubes*. Adv. Funct. Mater., 2005, Vol.16, No.15, Pp.1608-1614.
35. Qian D., Dickey E.C., Andrews R., Rantell T. *Load transfer and deformation mechanisms in carbon nanotube-polystyrene composites*. Appl. Phys. Lett., 2000, Vol.75, Pp.2868-2870.
36. Mikitaev A.K., Kozlov G.V., Zaikov G.E. *Polymer Nanocomposites: Variety of Structural Forms and Applications*. New York, Nova Science Publishers, 2008, 319 p.
37. Dolbin I.V., Karnet Yu.N., Kozlov G.V., Vlasov A.N. *Mechanism of growth of interfacial regions in polymer/carbon nanotube nanocomposites*. Comp. Mech. Comput. Appl. Int. J., 2019, Vol.10, No.3, Pp.213-220.
38. Pershina S.V., Belogubcev S.F., Fedotkin I.V. *Nasybnaya plotnost' uglerodnykh nanomaterialov [Bulk density of carbon nanomaterials]*. Mezhdunarodnyj studencheskij nauchnyj vestnik, 2015, No.3, Part 2, Pp.207-208.
39. Tkachev A.G. et al. *Uglerodnye nanomaterialy serii "Taunit": Proizvodstvo i primeneniye [Carbon nanomaterials of the Taunit series: Production and application]*. Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya, 2013, Vol.56, Iss.4, Pp.55-59.
40. Khuzin A.F. et al. *Dispergiruemost' globul mnogoslojnykh uglerodnykh nanotrubok razlichnykh proizvoditelej [Dispersibility of multi-walled carbon nanotube globules from different manufacturers]*. Izvestiya KGASU. Stroitel'nye materialy i izdeliya, 2015, Vol.33, No.3, Pp.164-171.
41. Kozlov G.V., Dolbin I.V., Karnet Yu.N., Vlasov A.N. *Relationship between the applied stress transfer and the nanofiller aggregation level for polymer/nanocomposites*. Comp. Mech. Comp. Appl. Int. J., 2020, Vol.11, No.2, Pp.129-135.
42. Witten T.A., Rubinstein M., Colby R.H. *Reinforcement of rubber by fractal aggregates*. J. Phys. II France, 1993, Vol.3, No.3, Pp.367-383.
43. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskij D.B., Kornev Yu.V. *Vliyanie uglerodnykh dobavok na mekhanicheskie kharakteristiki ehпокsidного связууushhego [Effect of carbon additives on mechanical properties of epoxy binder]*. Izvestiya RAN. MTT, 2020, No.3, Pp.92-103.
44. Moniruzzaman M., Winey K.I. *Polymer nanocomposites containing carbon nanotubes*. Macromolecules, 2006, Vol.39, No.16, Pp.5194-5205.

45. Schaefer D.W., Justice R.S. *How are nanocomposites*. Macromolecules, 2007, Vol.40, No.24, Pp.8501-8517.

Поступила в редакцию 05 июня 2025 года.

Сведения об авторах:

Бласов Александр Николаевич – д.т.н., дир., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: bah1955@yandex.ru

Волков-Богородский Дмитрий Борисович – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: y-b1957@yandex.ru